Fachbereich Mathematik/Informatik **12. Dezember 2009**
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik I

Testklausur mit Lösungen

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die erreichte Punktzahl geht zweifach in Ihre Übungspunktzahl ein.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und auf jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Rückgabe in welcher Übungsgruppe ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
mögl. Pkt.:	3	2	4	14	3	5	3	8	2	3	3	4	4	4	2	64
erhalt. Pkt.:																

Note:

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Definiere die folgenden (*kursiv* gedruckten) Begriffe.

(1) Das *Urbild* von einer Teilmenge unter einer Abbildung.
(2) Die *Peano-Axiome*.
(3) Eine *konvergente* Folge in einem angeordneten Körper.
(4) Der *Betrag* einer komplexen Zahl.
(5) Der *Rang* einer linearen Abbildung.
(6) Die *Determinante* (rekursive Definition) einer $n \times n$-Matrix.

Lösung

(1) Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $T \subseteq M$ heißt

$$F^{-1}(T) = \{x \in L | \, F(x) \in T\}$$

das *Urbild von T unter F*.

(2) Eine Menge N mit einem ausgezeichneten Element $0 \in N$ (die *Null*) und einer (Nachfolger-)Abbildung

$$' : N \longrightarrow N, \, n \longmapsto n',$$

heißt *natürliche Zahlen* (oder *Peanomodell* für die natürlichen Zahlen), wenn die folgenden *Peano-Axiome* erfüllt sind.

(a) Das Element 0 ist kein Nachfolger (die Null liegt also nicht im Bild der Nachfolgerabbildung).
(b) Jedes $n \in N$ ist Nachfolger höchstens eines Elementes (d.h. die Nachfolgerabbildung ist injektiv).
(c) Für jede Teilmenge $T \subseteq N$ gilt: wenn die beiden Eigenschaften

- $0 \in T$,
- mit jedem Element $n \in T$ ist auch $n' \in T$,

gelten, so ist $T = N$.

(3) Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem angeordneten Körper. Die Folge heißt *konvergent*, wenn es ein $x \in K$ gibt derart, dass folgende Eigenschaft erfüllt ist. Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(4) Zu einer komplexen Zahl

$$z = a + bi$$

ist der *Betrag* definiert durch

$$|\, z \,| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

(5) Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann nennt man

$$\operatorname{rang} \varphi = \dim(\operatorname{bild} \varphi)$$

den *Rang* von φ.

(6) Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_i diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die entsteht, wenn man in M die erste Spalte und die i-te Zeile weglässt. Dann definiert man rekursiv

$$\det M = \begin{cases} a_{11} & \text{falls } n = 1\,, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i & \text{für } n \geq 2\,. \end{cases}$$

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

Lösung

Seien $x_1, x_2 \in L$ gegeben mit $f(x_1) = f(x_2)$. Wir müssen zeigen, dass $x_1 = x_2$ ist. Es ist

$$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2).$$

Da nach Voraussetzung $g \circ f$ injektiv ist, folgt $x_1 = x_2$, wie gewünscht.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Es sei M eine beliebige Menge. Zeige, dass es keine surjektive Abbildung von M in die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ geben kann.

Lösung

Wir nehmen an, dass es eine surjektive Abbildung

$$F : M \longrightarrow \mathfrak{P}(M),\ x \longmapsto F(x),$$

gibt, und müssen dies zu einem Widerspruch führen. Dazu betrachten wir

$$T = \{x \in M |\, x \notin F(x)\} .$$

Da dies eine Teilmenge von M ist, muss es wegen der Surjektivität ein $y \in M$ geben mit

$$F(y) = T .$$

Es gibt nun zwei Fälle, nämlich $y \in F(y)$ oder $y \notin F(y)$. Im ersten Fall ist also $y \in T$, und damit, nach der Definition von T, auch $y \notin F(y)$, Widerspruch. Im zweiten Fall ist, wieder aufgrund der Definition von T, $y \in T$, ebenfalls ein Widerspruch.

AUFGABE 4. (14 (=3+2+1+8) Punkte)

Betrachte auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ die Relation

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc \text{ ist} .$$

a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Zeige, dass es zu jedem (a, b) ein äquivalentes Paar (a', b') gibt mit $b' > 0$.

c) Es sei M die Menge der Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation. Wir definieren eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow M, \ z \longmapsto [(z, 1)].$$

Zeige, dass φ injektiv ist.

d) Definiere auf M (aus Teil c) eine Verknüpfung $+$ derart, dass M mit dieser Verknüpfung und mit $[(0, 1)]$ als neutralem Element eine Gruppe wird, und dass für die Abbildung φ die Beziehung

$$\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$$

für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ gilt.

Lösung

a) Wegen der Kommutativität der Multiplikation in $\mathbb{Z}$ ist $ab = ba$, woraus die Reflexivität folgt. Zur Symmetrie sei $(a, b) \sim (c, d)$, also $ad = bc$. Dann ist auch $cb = da$, was $(c, d) \sim (a, b)$ bedeutet. Zur Transitivität sei

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ und } (c, d) \sim (e, f) ,$$

also

$$ad = bc \text{ und } cf = de .$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$adf = bcf = bde.$$

Da $d \neq 0$ ist, folgt daraus $af = be$, was $(a, b) \sim (e, f)$ bedeutet.

b) Es sei (a, b) vorgegeben. Wegen $b \neq 0$ ist $b > 0$ oder $b < 0$. Bei $b > 0$ sind wir fertig, da (a, b) zu sich selbst äquivalent ist. Bei $b < 0$ betrachten wir $(-a, -b)$. Der zweite Eintrag ist positiv, und wegen

$$a(-b) = -(ab) = b(-a)$$

sind (a, b) und $(-a, -b)$ äquivalent zueinander.

c) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ vorgegeben und $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$. Das bedeutet $[(z_1, 1)] = [(z_2, 1)]$ bzw. $(z_1, 1) \sim (z_2, 1)$, also

$$z_1 = z_1 1 = 1 z_2 = z_2.$$

d) Wir setzen

$$[(a,b)] + [(c,d)] := [(ad+cb, bd)] .$$

Wegen $b, d \neq 0$ ist auch $bd \neq 0$. Zur Wohldefiniertheit dieser Verknüpfung sei

$$(a,b) \sim (a',b') \text{ und } (c,d) \sim (c',d') ,$$

also

$$ab' = a'b \text{ und } cd' = c'd .$$

Wir behaupten

$$(ad+cb, bd) \sim (a'd'+c'b', b'd') .$$

Dies folgt aus

$$\begin{aligned} (ad+cb)b'd' &= adb'd' + cbb'd' \\ &= ab'dd' + cd'bb' \\ &= a'bdd' + c'dbb' \\ &= bda'd' + bdc'b' \\ &= bd(a'd' + c'b'). \end{aligned}$$

Die Assoziativität folgt aus

$$\begin{aligned} ([(a,b)] + [(c,d)]) + [(e,f)] &= [(ad+bc, bd)] + [(e,f)] \\ &= [(ad+bc)f + bde, bdf] \\ &= [adf + bcf + bde, bdf] \\ &= [adf + b(cf+de), bdf] \\ &= [(a,b)] + ([(cf+de, df)]) \\ &= [(a,b)] + ([(c,d)] + [(e,f)]). \end{aligned}$$

Wegen

$$[(a,b)] + [(0,1)] \;=\; [(a1+b0, b1)] \;=\; [(a,b)]$$

(und ebenso in der anderen Reihenfolge) ist $(0,1)$ das neutrale Element.

Wir behaupten, dass zu $[(a,b)]$ das inverse Element durch $[(-a,b)]$ gegeben ist. Dies folgt aus

$$[(a,b)] + [(-a,b)] \;=\; [(ab+b(-a), b^2)] \;=\; [(ab-ab, b^2)] \;=\; [(0,b^2)] \;=\; [(0,1)],$$

wobei die letzte Gleichung sich aus $0 \cdot 1 = 0 \cdot b^2$ ergibt.

Schließlich ist für $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$

$$\varphi(z_1+z_2) \;=\; [(z_1+z_2, 1)] \;=\; [(z_1\cdot 1+1\cdot z_2, 1\cdot 1)] \;=\; [(z_1,1)]+[(z_2,1)] \;=\; \varphi(z_1)+\varphi(z_2).$$

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass für $x \geq 3$ die Beziehung

$$x^2 + (x+1)^2 \geq (x+2)^2$$

gilt.

Lösung

Wir rechnen die beiden Seiten aus, die zu zeigende Abschätzung bedeutet dann

$$2x^2 + 2x + 1 \geq x^2 + 4x + 4\,.$$

In einem angeordneten Körper erhalten sich bei beidseitiger Addition die Abschätzungen, so dass die Abschätzung äquivalent zu

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

ist. Wir schreiben die linke Seite als

$$x^2 - 2x - 3 \;=\; x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 \;=\; (x-1)^2 - 4.$$

Bei $x \geq 3$ ist $x - 1 \geq 2$ und daher

$$(x-1)^2 \;\geq\; 2(x-1) \;\geq\; 2^2 \;=\; 4,$$

also gilt für $x \geq 3$ die Abschätzung $(x-1)^2 - 4 \geq 0$ und damit die ursprüngliche Abschätzung.

Aufgabe 6. (5 Punkte)

Beweise durch Induktion, dass für $n \geq 10$ die Abschätzung

$$3^n \geq n^4$$

gilt.

Lösung

Induktionsanfang für $n = 10$. Es ist $3^{10} = 9^5 = 81 \cdot 81 \cdot 9 \geq 6000 \cdot 9 \geq 10000 = n^4$. Zum Induktionsschluss sei $n \geq 10$. Dann ist

$$3^{n+1} \; = \; 3 \cdot 3^n \; \geq \; 3 \cdot n^4 \; = \; n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4.$$

Andererseits ist nach der binomischen Formel

$$(n+1)^4 \; = \; n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$$

Wir müssen

$$n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 \; \geq \; n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

nachweisen. Der erste Summand stimmt links und rechts überein, für die anderen Summanden zeigen wir, dass die linken, also jeweils $\frac{1}{2}n^4$, mindestens so groß wie die rechten sind. Dies folgt aber direkt aus $n^4 \geq 8n^3$ (da $n \geq 10$), aus $n^4 \geq 12n^2$, da ja $n^2 \geq 12$ ist, aus $n^4 \geq 8n$ und aus $n^4 \geq 2$.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$x_n := \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Für $n \geq 1$ kann man die Folge (durch Erweiterung mit $1/n^3$) schreiben als

$$x_n := \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8} = \frac{3 - \frac{1}{n} - \frac{7}{n^3}}{2 + \frac{1}{n^2} + \frac{8}{n^3}} .$$

Folgen von Typ a/n, a/n^2 und a/n^3 sind Nullfolgen. Aufgrund der Summenregel für konvergente Folgen konvergiert der Zähler gegen 3 und der Nenner gegen 2, so dass nach der Quotientenregel die Folge insgesamt gegen $3/2 \in \mathbb{Q}$ konvergiert.

AUFGABE 8. (8 (=6+2) Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und sei

$$V = K^{\mathbb{N}_+}$$

der Vektorraum aller Folgen in K (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

a) Zeige (ohne Sätze über konvergente Folgen zu verwenden), dass die Menge der Nullfolgen, also

$$U = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}_+} \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}_+} \text{ konvergiert gegen } 0\}$$

ein K-Untervektorraum von V ist.

b) Sind die beiden Folgen

$$(1/n)_{n\in\mathbb{N}_+} \text{ und } (1/n^2)_{n\in\mathbb{N}_+}$$

linear unabhängig in V?

Lösung

a) Wir müssen zeigen, dass U nicht leer ist und bzgl. der Addition und der Skalarmultiplikation abgeschlossen ist. Die konstante Nullfolge, also das Nullelement von V, ist offenbar eine Folge, die gegen 0 konvergiert. Seien $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ zwei Folgen aus U, also zwei Nullfolgen. Wir müssen zeigen, dass auch die Summe $x + y$ gegen null konvergiert. Sei dazu $\epsilon > 0$ vorgegeben. Für $\epsilon/2$ gibt es, da die beiden Folgen gegen 0 konvergieren, natürliche Zahlen n_0 und m_0 mit

$$|x_n| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ für } n \geq n_0$$

und

$$|y_n| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ für } n \geq m_0\,.$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung für den Betrag gilt daher für $n \geq \max(n_0, m_0)$ die Abschätzung

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

also liegt eine Nullfolge vor. Zum Nachweis der Abgeschlossenheit unter der skalaren Multiplikation sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ konvergent und $s \in K$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass die Folge $sx_n, n \in \mathbb{N}_+$, gegen 0 konvergiert. Bei $s = 0$ ist dies die Nullfolge, sei also $s \neq 0$. Wegen

$$|sx_n| = |-sx_n|$$

können wir annehmen, dass s positiv ist. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann ist ϵ/s ebenfalls positiv und aufgrund der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ gegen 0 gibt es ein n_0 derart, dass für $n \geq n_0$ die Beziehung

$$|\, x_n \,| \leq \epsilon/s$$

gilt. Für $n \geq n_0$ gilt daher wegen der Multiplikativität des Betrags

$$|\, sx_n \,| = s \,|\, x_n \,| \leq s\epsilon/s = \epsilon,$$

so dass auch diese Folge gegen 0 konvergiert.

b) Die beiden Folgen sind linear unabhängig. Sie sind beide nicht die konstante Nullfolge. Sie wären also nur dann linear abhängig, wenn die eine Folge ein skalares Vielfaches der anderen wäre. Nehmen wir also an, dass für ein $s \in K$ die Beziehung

$$\frac{1}{n} = s\frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt. Für $n = 1, 2$ bedeutet dies insbesondere

$$1 = s1 \text{ und } \frac{1}{2} = s\frac{1}{4}\,.$$

Dies bedeutet $s = 1$ und $s = 2$, was nicht zugleich erfüllt sein kann.

Aufgabe 9. (2 Punkte)
Berechne über den komplexen Zahlen das Matrixprodukt

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1-3i & -1 \\ i & 0 & 4-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 2+5i \end{pmatrix} .$$

Lösung

Man multipliziert die erste Zeile mit der Spalte rechts und erhält
$(2-i)(1+i)+(-1-3i)(1-i)-(2+5i) \,=\, 2+2i-i+1-1+i-3i-3-2-5i \,=\, -3-6i.$
Die zweite Zeile multipliziert mit der Spalte rechts ergibt

$$i(1+i)+(4-2i)(2+5i) \,=\, i-1+8+20i-4i+10 \,=\, 17+17i.$$

Das Ergebnis ist also der Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} -3-6i \\ 17+17i \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann injektiv ist, wenn $\operatorname{kern} \varphi = 0$ ist.

Lösung

Wenn die Abbildung injektiv ist, so kann es neben $0 \in V$ keinen anderen Vektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$ geben. Also ist $\varphi^{-1}(0) = 0$. Sei umgekehrt $\operatorname{kern} \varphi = 0$ und seien $v_1, v_2 \in V$ gegeben mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann ist wegen der Linearität

$$\varphi(v_1 - v_2) \,=\, \varphi(v_1) - \varphi(v_2) \,=\, 0.$$

Daher ist $v_1 - v_2 \in \operatorname{kern} \varphi$ und damit $v_1 = v_2$.

Aufgabe 11. (3=(2+1) Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V und es sei $w_1, \ldots, w_n$ eine Familie von Vektoren in W.

a) Zeige, dass es maximal eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

mit $\varphi(v_i) = w_i$ für alle i geben kann.

b) Man gebe ein Beispiel für eine solche Situation an, wo es keine lineare Abbildung mit $\varphi(v_i) = w_i$ für alle i gibt.

Lösung

a) Es sei $v \in V$ beliebig. Da ein Erzeugendensystem vorliegt, gibt es eine Darstellung

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i .$$

Da eine lineare Abbildung Linearkombinationen erhält, muss für eine lineare Abbildung φ mit $\varphi(v_i) = w_i$ gelten

$$\varphi(v) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i .$$

Es gibt also für $\varphi(v)$ nur diese eine Möglichkeit und daher gibt es maximal ein φ.

b) Sei $V = W = K$ und sei $v_1 = 1$, $v_2 = 0$, $w_1 = w_2 = 1$. Die beiden Vektoren v_1 und v_2 sind ein Erzeugendensystem von K, da dies für v_1 allein schon gilt. Es gibt aber keine lineare Abbildung mit $\varphi(v_2) = \varphi(0) = 1$, da eine lineare Abbildung 0 auf 0 schickt.

Aufgabe 12. (4 Punkte)
Bestimme den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Lösung

Es geht darum, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y + 5z + 2w &= 0 \\ 3x - 2y + 7z - w &= 0 \\ 2x - y - 4z + 3w &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Wir eliminieren mit Hilfe der ersten Zeile die Variable y. Das resultierende System ist ($II' = II + 2I$, $III' = III + I$)

$$\begin{aligned} 2x + y + 5z + 2w &= 0 \\ 7x + 17z + 3w &= 0 \\ 4x + z + 5w &= 0\,. \end{aligned}$$

Wir eliminieren nun aus II' mittels III' die Variable z, das ergibt ($II' - 17III'$)

$$\begin{aligned} 2x + y + 5z + 2w &= 0 \\ 4x + z + 5w &= 0 \\ -61x - 82w &= 0\,. \end{aligned}$$

Wir können jetzt dieses System lösen, wobei $x \neq 0$ die anderen Variablen eindeutig festlegt. Sei $x = 82$. Dann ist $w = -61$. Damit ist

$$z = -4x - 5w = -4 \cdot 82 - 5(-61) = -328 + 305 = -23.$$

Schließlich ist

$$y = -2x - 5z - 2w = -2(82) - 5(-23) - 2(-61) = -164 + 115 + 122 = 73\,.$$

Die Lösungsmenge, also der Kern, ist somit

$$\left\{ s \begin{pmatrix} 82 \\ 73 \\ -23 \\ -61 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 13. (4 (=2+2) Punkte)

a) Bestimme, ob die komplexe Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2+5i & 1-2i \\ 3-4i & 6-2i \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

b) Finde eine Lösung für das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54+72i \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Lösung

a) Wir berechnen die Determinante der Matrix. Diese ist

$$\begin{aligned} \det M &= (2+5i)(6-2i) - (3-4i)(1-2i) \\ &= 12 + 10 + 30i - 4i - (3 - 8 - 4i - 6i) \\ &= 27 + 36i. \end{aligned}$$

Insbesondere ist die Matrix invertierbar.

b) Es ist

$$\begin{pmatrix} 54+72i \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \det M \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Daher können wir direkt eine Lösung angeben, nämlich

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 6-2i \\ -(3-4i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-4i \\ -6+8i \end{pmatrix} .$$

Es ist ja

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2+5i & 1-2i \\ 3-4i & 6-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2(6-2i) \\ 2(-3+4i) \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} (2+5i)(6-2i) + (1-2i)(-3+4i) \\ (3-4i)(6-2i) + (6-2i)(-3+4i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \det M \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Aufgabe 14. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Welche Dimension besitzt der Produktraum $V \times W$?

Lösung

Der Produktraum besitzt die Dimension $n + m$. Um dies zu beweisen sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und $w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von W. Wir behaupten, dass die Elemente

$$(v_j, 0),\ j \in \{1, \ldots, n\},\ \text{ und } (0, w_i),\ i \in \{1, \ldots, m\}\,,$$

eine Basis von $V \times W$ bilden.

Sei $(v, w) \in V \times W$. Dann gibt es Darstellungen

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \text{ und } w = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i\,.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} (v, w) &= (\sum_{j=1}^{n} a_j v_j, \sum_{i=1}^{m} b_i w_i) \\ &= (\sum_{j=1}^{n} a_j v_j, 0) + (0, \sum_{i=1}^{m} b_i w_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j (v_j, 0) + \sum_{i=1}^{m} b_i (0, w_i), \end{aligned}$$

d.h., es liegt ein Erzeugendensystem vor.

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit sei

$$\sum_{j=1}^{n} a_j (v_j, 0) + \sum_{i=1}^{m} b_i (0, w_i) = 0 = (0, 0)$$

angenommen. Die gleiche Rechnung rückwärts ergibt

$$(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j, \sum_{i=1}^{m} b_i w_i) = (0, 0)$$

und das bedeutet

$$\sum_{j=1}^{n} a_j v_j = 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{m} b_i w_i = 0\,.$$

Da es sich jeweils um Basen handelt, folgt $a_j = 0$ für alle j und $b_i = 0$ für alle i.

Aufgabe 15. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ der K-Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach W und es sei $v \in V$ ein fixierter Vektor. Zeige, dass die Abbildung

$$F : \mathrm{Hom}_K(V,W) \longrightarrow W,\ \varphi \longmapsto F(\varphi) := \varphi(v),$$

K-linear ist.

Lösung

Zur Additivität. Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$. Dann ist (nach der Definition der Addition auf $\mathrm{Hom}_K(V,W)$)

$$F(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v) = F(\varphi) + F(\psi).$$

Zur Skalarmultiplikation. Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ und $s \in K$. Dann ist (wieder aufgrund der Definition der Skalarmultiplikation auf $\mathrm{Hom}_K(V,W)$)

$$F(s\varphi) = (s\varphi)(v) = s\varphi(v) = sF(\varphi).$$