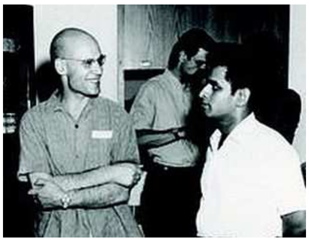
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Fundamentalgruppe und Vektorbündel

Vorlesung 1

Die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes wird über Homotopieklassen von stetigen geschlossenen Wegen definiert. Eine solche Konstruktion ist im Kontext der algebraischen Geometrie nicht direkt durchführbar. Wenn eine (glatte) Varietät X über den komplexen Zahlen vorliegt, so kann man zu dem zugehörigen komplexen Raum (bzw. der komplexen Mannigfaltigkeit) übergehen und dessen Fundamentalgruppe betrachten. Doch ist dieses Verfahren nicht algebraisch und für andere Grundkörper nicht durchführbar. Die Wege durch Morphismen von punktierten algebraischen Kurven (wie die punktierte affine Gerade $\mathbb{A}^{\times} = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$) nach X zu ersetzen und zu betrachten, welche sich zu Morphismen auf die unpunktierte Kurve fortsetzen lassen, ist ebenfalls nicht hilfreich, da es relativ wenige Morphismen von algebraischen Kurven in eine algebraische Varietät hinein gibt und diese Menge ziemlich unflexibel ist.



Grothendieck und Abhyankar 1970

Dagegen lässt sich der topologische Überlagerungsbegriff (mit endlichen Fasern), der eng mit der Fundamentalgruppe zusammenhängt, algebraisieren und bildet so den Ansatzpunkt für die Entwicklung einer algebraischen Theorie der Fundamentalgruppe (und auch für eine algebraische Kohomologietheorie mit topologischen Eigenschaften: die étale Kohomologie). Dabei wird mit Hilfe der Automorphismengruppen der Überlagerungen (die Gruppe der Decktransformationen) über einen geeigneten Limes die étale Fundamentalgruppe eingeführt. Durch diesen Zugang entsteht zugleich ein gemeinsamer Blick auf die Topologie von algebraischen Varietäten und auf die Galoistheorie. Diese Betrachtungsweise geht auf Abhyankar (im Kurvenfall) und Grothendieck (allgemein) zurück.

Der geeignete algebraische Ersatzbegriff für eine Überlagerung ist der des (endlichen) étalen Morphismus.

Étale Morphismen

Definition 1.1. Es sei
$$\varphi : Y \longrightarrow X$$
ein Schemamorphismus. Er heißt *unverzweigt* in einem Punkt $y \in Y$, wenn für die maximalen Ideale die Beziehung $\mathfrak{m}_y = \mathfrak{m}_{\varphi(y)} \cdot \mathcal{O}_y$ gilt und wenn die Körpererweiterung $\kappa(\varphi(y)) \subseteq \kappa(y)$ separabel ist. Wenn φ in jedem Punkt $y \in Y$ unverzweigt ist, so nennt man φ *unverzweigt*.

Definition 1.2. Es sei
$$\varphi : Y \longrightarrow X$$
ein Schema-Morphismus von endlichem Typ. Er heißt *étale*, wenn er flach ist und wenn die Garbe der relativen Differentiale $\Omega_{Y|X}$ gleich 0 ist.

Lemma 1.3. *Sei*
$$\varphi : Y \longrightarrow X$$
ein Schemamorphismus vom endlichen Typ. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) φ *ist étale.*
(2) φ *ist flach und unverzweigt.*

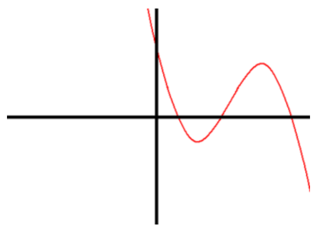
Beispiel 1.4. Eine endliche Körpererweiterung $K \subseteq L$ ist genau dann étale, wenn sie separabel ist.

Beispiel 1.5. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und
$$\mathbb{A}^\times = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$$
die punktierte affine Gerade, also die affine Gerade ohne das maximale Ideal (X). Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$, die kein Vielfaches der Charakteristik von K ist, ist die Abbildung
$$\mathbb{A}^\times \longrightarrow \mathbb{A}^\times,\, x \longmapsto x^n,$$
(die dem Einsetzungshomomorphismus zu $X \mapsto X^n$ entspricht) eine endliche étale Abbildung. Dies folgt unmittelbar aus der Ableitung von X^n, da sich aus $nX^{n-1}dX = 0$ direkt $dX = 0$ in $\Omega_{\mathbb{A}^\times|\mathbb{A}^\times}$ ergibt.

Die Automorphismengruppe dieser Überlagerung entspricht den n-ten Einheitswurzeln in K, wobei eine solche Einheitswurzel ζ auf $\mathbb{A}^\times$ durch $x \mapsto \zeta x$ wirkt, und ist daher zu $\mathbb{Z}/(n)$ isomorph.

Beispiel 1.6. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $F \in K[X]$ ein von 0 verschiedenes Polynom vom Grad n, das wir als Morphismus
$$F : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1,\, x \longmapsto F(x),$$
auffassen (zum Einsetzungshomomorphismus $Y \mapsto F$). Auf der Ringebene beschrieben geht es um die $K[Y]$-Algebra
$$K[X] \cong K[X,Y]/(Y - F) \cong K[Y] \cdot 1 \oplus K[Y] \cdot X \oplus \cdots \oplus K[Y] \cdot X^{n-1}$$

mit der durch F definierten Multiplikationsregel für X^n. Daher ist diese Abbildung endlich und frei vom Rang n und insbesondere flach.



Die Abbildung, um die es geht, ist die horizontale Projektion der roten Kurve auf die y-Achse. Die beiden Verzweigungspunkte sind die beiden Extremumspunkte. Wenn man deren horizontalen Projektionspunkte (also ihre beiden y-Koordinaten herausnimmt, bekommt man eine étale Abbildung. Wenn man von diesen y-Koordinaten alle Urbildpunkte herausnimmt, so liegt eine Überlagerung vor).

Der Modul der relativen Differentiale ist

$$K[X]dX/(dF) \cong K[X]dX/(F'dX)\,.$$

Daher ist die Einschränkung auf das Komplement der Verzweigungspunkte, also auf die offene Menge $D(F') \subseteq \mathbb{A}^1$, ein étaler Morphismus. Diese Einschränkung ist im Allgemeinen nicht endlich und bei $K = \mathbb{C}$ auch keine Überlagerung. Wenn man dagegen aus (dem Bildbereich) $\mathbb{A}^1$ sämtliche Bildpunkte B der Verzweigungspunkte herausnimmt und die Abbildung auf diese offene Menge und ihr Urbild einschränkt, so erhält man eine endliche étale Abbildung. Es handelt sich ja einfach um eine Nenneraufnahme zu der vorgegebenen endlichen Abbildung, wobei sich die Endlicheit und der Rang überträgt. Zu jedem Punkt $P \in \mathbb{A}^1 \setminus B$ besteht die Faser aus n Punkten, da die zugehörige K-Algebra, die die Faser beschreibt, die K-Dimension n besitzt, separabel (wegen der Unverzweigtheit) über K ist und sämtliche Restklassenkörper wegen der algebraischen Abgeschlossenheit isomorph zu K sind.

Beispiel 1.7. Es sei C eine elliptische Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K und

$$[n] : C \longrightarrow C,\ P \longmapsto nP,$$

die n-te Multiplikationsabbildung. Dies ist stets eine endliche Abbildung, die darüberhinaus étale ist, wenn n kein Vielfaches der Charakteristik des Grundkörpers K ist. In diesem Fall liegt also eine Überlagerung (und zwar vom Grad n^2) der elliptischen Kurve durch sich selbst vor.

Bei $K = \mathbb{C}$ besitzen elliptische Kurven die Beschreibung $C = \mathbb{C}/\Gamma$, wobei $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2$ ein (volles) Gitter in $\mathbb{C}$ ist ($\mathbb{C}$ ist dann auch die universelle Überlagerung der elliptischen Kurve, deren topologische Fundamentalgruppe gleich $\mathbb{Z}^2$ ist). Ein Punkt $P \in C$ wird durch einen Punkt $\tilde{P} \in \mathbb{C}$ in einer fixierten Gittermasche repräsentiert.

Die Multiplikationsabbildung $[n]$ liftet zur Multiplikationsabbildung auf $\mathbb{C}$, und wenn $P \in C$ durch den Punkt $\tilde{P} \in \mathbb{C}$ repräsentiert wird, so wird die

Faser von $[n]$ über P in der Gittermasche durch die n^2 Punkte

$$\tilde{P} + \frac{i}{n}v_1 + \frac{j}{n}v_2, 0 \leq i, j \leq n-1,$$

repräsentiert, wobei v_1 und v_2 Erzeuger des Gitters seien. Die Multiplikation auf C kann man auffassen als die (natürliche Restklassen)-Abbildung

$$\mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow \mathbb{C}/\frac{1}{n}\Gamma \cong \mathbb{C}/\Gamma.$$

Die Gruppe $\Gamma/\frac{1}{n}\Gamma \cong n\Gamma/\Gamma \cong \mathbb{Z}/(n) \times \mathbb{Z}/(n)$ operiert dabei auf C, indem eben $\frac{i}{n}v_1 + \frac{j}{n}v_2$ zu einem repräsentierenden Punkt $\tilde{P}$ addiert wird, und diese Operation ist einfach transitiv auf den Fasern. Insgesamt liegt das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & C \cong \mathbb{C}/\Gamma \\ & \searrow & \downarrow \\ & & C \cong \mathbb{C}/\frac{1}{n}\Gamma \end{array}$$

aus Überlagerungen vor.

Bemerkung 1.8. Es sei R ein normaler Integritätsbereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$ und $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G. Es sei S der ganze Abschluss von R in L. Dann operiert G auf S und der Invariantenring ist R. Der Morphismus

$$\varphi : \text{Spec } S \longrightarrow \text{Spec } R$$

ist i.A. nicht étale (weder flach noch unverzweigt). Es gibt aber natürliche offene nichtleere Mengen $U \subseteq \text{Spec } R$, so dass die Einschränkung

$$\varphi^{-1}(U) \longrightarrow U$$

étale ist.

Beispiel 1.9. Die symmetrische Gruppe S_n operiert auf dem Polynomring in n Variablen bzw. auf dem affinen Raum $\mathbb{A}_K^n$ (K ein Körper) Der Invariantenring ist der Polynomring in den n elementar-symmetrischen Polynomen $s_1, \ldots, s_n$. Die Ringerweiterung $K[s_1, \ldots, s_n] \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ ist frei (insbesondere flach). Die zugehörige Erweiterung der Quotientenkörper ist eine Galoiserweiterung. Die Gesamtabbildung

$$\mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^n,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (s_1, \ldots, s_n),$$

ist nicht étale, sie ist in denjenigen Punkten verzweigt, deren Bahnen weniger als $n!$ Punkte besitzen, und das sind diejenigen Punkte, wo mindestens zwei Koordinaten übereinstimmen.

In Hinblick auf die Frage, inwiefern Vektorbündel mit Darstellungen der algebraischen Fundamentalgruppe zusammenhängen, ist das folgende Beispiel wichtig.

Beispiel 1.10. Sei X ein Schema und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X, die in der Picardgruppe $\mathrm{Pic}\,(X)$ endliche Ordnung n besitze, wobei n in X invertierbar sei. Mit einem fixierten Isomorphismus $\mathcal{L}^n \cong \mathcal{O}_X$ kann man auf der direkten Summe

$$\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}^{n-1}$$

eine $\mathcal{O}_X$-Algebra-Struktur $\mathcal{A}$ definieren. Das zugehörige (relative) Spektrum definiert einen endlichen Schemamorphismus

$$Y = \mathrm{Spec}\mathcal{A} \longrightarrow X.$$

Dieser ist flach, da die Algebra lokal frei ist. Die Unverzweigtheit weist man auch lokal nach, wobei man zu offenen affinen Mengen $U \subseteq X$ übergeht, über denen $\mathcal{L}$ trivial ist. Auf einer solchen Menge $U = \mathrm{Spec}R$ wird die Algebra durch $B = R[T](T^n - r)$ mit einer Einheit $r \in R^\times$ gegeben. Die relativen Differentiale werden von dT erzeugt und dafür gilt

$$0 = d(T^n - r) = nT^{n-1}dT.$$

Da sowohl n als auch T (als Teiler von r) Einheiten sind, ist $dT = 0$. Wenn man die invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ nach Y zurückzieht, so ergibt sich wegen

$$\begin{aligned} & (\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}^{n-1}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L} \\ \cong\ & \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^2 \oplus \mathcal{L}^3 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}^n \\ \cong\ & \mathcal{A} \end{aligned}$$

die Strukturgarbe. Die konstruierte étale Abbildung trivialisiert also diese Torsionsgarbe.

Zusammenhang zur komplexen Situation

Satz 1.11. *Es seien X und Y glatte Varietäten über $\mathbb{C}$ und sei*

$$\varphi : Y \longrightarrow X$$

ein endlicher étaler Morphismus. Dann ist die zugehörige Abbildung

$$\varphi_{\mathbb{C}} : Y_{\mathbb{C}} \longrightarrow X_{\mathbb{C}}$$

eine Überlagerung von komplexen Mannigfaltigkeiten.

Beweis. Wegen der vorausgesetzten Glattheit sind die Garben der Differentialformen Ω_Y und Ω_X lokal frei, und ihr Rang ist gleich der (wegen der Flachheit und Endlichkeit gemeinsamen) Dimension von Y und X. Wir betrachten auf Y die exakte Sequenz

$$\varphi^*\Omega_X \longrightarrow \Omega_Y \longrightarrow \Omega_{Y|X} \longrightarrow 0\,.$$

Wegen étale ist dabei $\Omega_{Y|X} = 0$, so dass ein surjektiver Garbenhomomorphismus $\varphi^*\Omega_X \to \Omega_Y$ vorliegt. Da beide Garben lokal frei sind und denselben

Rang besitzen, handelt es sich um einen Isomorphismus. Es folgt durch Dualisieren, dass auch die Tangentialabbildung

$$\mathcal{T}(\varphi) : \mathcal{T}_Y \longrightarrow \varphi^* \mathcal{T}_X$$

ein Isomorphismus ist.

Wir gehen nun zu den zugehörigen komplexen Mannigfaltigkeiten $Y_\mathbb{C}$ und $X_\mathbb{C}$ über. Nach der Überlegung von eben ist insbesondere für jeden Punkt $y \in Y_\mathbb{C}$ die Tangentialabbildung

$$T_{Y,y} \longrightarrow T_{X,\varphi(y)}$$

ein Vektorraum-Isomorphismus, und dieser wird auf geeigneten Karten durch das totale Differential $(D\varphi)_y$ beschrieben. Nach dem Satz über die Umkehrabbildung gibt es daher eine offene Umgebung (in der komplexen Topologie) von y, die unter $\varphi_\mathbb{C}$ eine Diffeomorphie mit einer offenen Umgebung von $\varphi(y)$ induziert. D.h., dass ein lokaler Homöomorphismus vorliegt. Da φ endlich ist, ist φ auch eigentlich und daher ist $\varphi_\mathbb{C}$ auch eigentlich im Sinne der Topologie, d.h. Urbilder von kompakten Mengen sind wieder kompakt. Daraus folgt insgesamt, dass $\varphi_\mathbb{C}$ eine Überlagerung mit endlichen Fasern ist. □

Der folgende Satz ist der sogenannte Riemannsche Existenzsatz. Er wurde in der Dimension 1 - für projektive algebraische Kurven bzw. kompakte riemannsche Flächen - von Riemann und in beliebiger Dimension von Grauert und Remmert bewiesen. Er bildet die Grundlage dafür, dass man die topologische Fundamentalgruppe in sinnvoller Weise mit der Grothendieckschen Fundamentalgruppe in Beziehung setzen kann.

Satz 1.12. *Sei X eine glatte Varietät über $\mathbb{C}$ und sei $X_\mathbb{C}$ die zugehörige komplexe Mannigfaltigkeit. Es sei*

$$\psi : Z \longrightarrow X_\mathbb{C}$$

eine endliche Überlagerung (also eine topologisch eigentliche Überlagerung mit endlichen Fasern) durch eine komplexe Mannigfaltigkeit Z. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Varietät Y über $\mathbb{C}$ und einen endlichen étalen Morphismus

$$\varphi : Y \longrightarrow X$$

mit $Z = Y_\mathbb{C}$ und $\psi = \varphi_\mathbb{C}$.

Bemerkung 1.13. Für eine komplexe Mannigfaltigkeit X und eine Überlagerung

$$Y \longrightarrow X$$

besitzt Y eine eindeutig bestimmte Struktur als komplexe Mannigfaltigkeit derart, dass die Abbildung zu einem lokalen Isomorphismus von komplexen Mannigfaltigkeiten wird. Dies beruht auf einer unmittelbaren Konstruktion und ist trivial im Vergleich mit dem Auffinden einer algebraischen Struktur auf Y, falls X eine besitzt.

Abbildungsverzeichnis