Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2008/2009**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 2

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$x^2 + y^2 + xy = 1$$

für die Körper $K = \mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_4$ und $\mathbb{F}_8$. Man kann für die Körper diese Darstellungen verwenden.

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Bestimme alle simultanen Lösungen der beiden Gleichungen

$$x^3 + y^2 = 2 \text{ und } 2xy = 3$$

für die Körper $K = \mathbb{Z}/(3)$, $\mathbb{Z}/(5)$ und $\mathbb{Z}/(7)$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Betrachte Gleichungen der Form

$$y^2 = G(x) \text{ mit } G(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

über $\mathbb{R}$. Skizziere die verschiedenen Lösungsmengen für die Koeffizienten $a, b, c \in \{1, -1, 0\}$.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Berechne die Schnittpunkte der beiden Kurven

$$C = V(x^2 + 2y^2 + 3xy + x - 2) \text{ und } L = V(4x + 3y - 5)\,.$$

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Betrachte in $\mathbb{A}^3_K$ die beiden Ebenen

$$E_1 = V(3x + 4y + 5z) \text{ und } E_2 = V(2x - y + 3z)\,.$$

Parametrisiere den Schnitt $E_1 \cap E_2$.

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Zeige, dass zu einem Punkt $P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n_K$ das zugehörige Ideal

$$(X_1 - a_1, X_2 - a_2, \ldots, X_n - a_n)$$

maximal ist.

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Bestimme Idealerzeuger für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{R}[X, Y, Z]$, dessen Nullstellenmenge genau die vier Punkte

$$(2, 3, 4), (1, 1/5, 0), (0, 0, 1), (-1, -2, \sqrt{3}) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$$

sind.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Es sei S das Nullstellengebilde in $\mathbb{A}^3_K$, das durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

gegeben ist. Der Schnitt von S mit einer Ebene E ist eine Kurve und wird in E durch eine Gleichung in zwei (geeigneten) Variablen beschrieben. Finde eine solche Gleichung für die Ebenen

$$E_1 = V(x),\ E_2 = V(z-1),\ E_3 = V(x+2y+3z),\ E_4 = V(3x-2z)\,.$$