

Invariantentheorie

Vorlesung 29

Lineare Gruppen und Operationen

Wir besprechen einige Beispiele von typischen Operationen von unendlichen algebraischen Gruppen wie der allgemeinen linearen Gruppe oder der speziellen linearen Gruppe. Ein solches Beispiel - die Operation auf der Menge der Dreiecke - haben wir schon in Beispiel 1.1 und in der fünften Vorlesung besprochen.

BEISPIEL 29.1. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum. Die natürliche Operation der allgemeinen linearen Gruppe $G = \text{GL}(V)$ besitzt nur zwei Bahnen, nämlich den Nullpunkt 0 und $V \setminus \{0\}$. Je zwei von 0 verschiedene Vektoren können ja mit einem geeigneten $g \in G$ ineinander überführt werden. Hier sind also keine interessanten Invarianten zu erwarten.

Ein $g \in G$ transformiert aber nicht nur einen einzigen Punkt $v \in V$ (einen Vektor), sondern beliebige Teilmengen $T \subseteq V$. Die Frage, ob zwei Teilmengen $T_1, T_2 \subseteq V$ mittels einem $g \in G$ ineinander überführt werden können, wird schnell kompliziert (die Menge der betrachteten Objekte muss im Allgemeinen kein Vektorraum mehr sein). Hier betrachten wir endliche geordnete Punktfolgen. Wir fixieren eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ und betrachten Punktfolgen

$$(P_1, \dots, P_n) \in V^n,$$

die wir uns als eine geordnete Punktfolge in V vorstellen. Die Punkte sind also durchnummeriert, und es ist auch der Fall erlaubt, dass $P_i = P_j$ ist. Die Operation der allgemeinen linearen Gruppe dehnt sich sofort auf diese Situation aus, und zwar ist die Operation durch

$$\text{GL}(V) \times V^n \longrightarrow V^n, (g, v_1, v_2, \dots, v_n) \longmapsto (g(v_1), g(v_2), \dots, g(v_n)),$$

gegeben.

Im einfachsten Fall, bei $V = K$, geht es um die Operation der Einheitsgruppe K^\times auf K^n durch skalare komponentenweise Multiplikation. Die Bahnen sind neben dem Nullpunkt die punktierten Geraden durch den Nullpunkt. Außer den konstanten Funktionen gibt es keine invarianten Polynome. Die auf $K^n \setminus \{0\}$ eingeschränkte Operation besitzt den $n - 1$ -dimensionalen projektiven Raum als Quotienten.

BEISPIEL 29.2. Es sei K ein Körper und V ein n -dimensionaler K -Vektorraum. Es sei $r \in \mathbb{N}$ (man denke an $r \leq n$) und wir betrachten die Wirkungsweise von $\text{GL}_r(K)$ auf dem r -fachen Produkt von V mit sich selbst, bei der

ein r -Tupel v_1, \dots, v_r von r Vektoren aus V auf ein anderes, durch die Matrix $g \in \text{GL}_r(K)$ bestimmtes r -Tupel abgebildet wird. Mit $g = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$ interessieren wir uns also für die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{GL}_r(K) \times V^r &\longrightarrow V^r \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}, v_1, v_2, \dots, v_r \right) \\ &\longmapsto \left(\sum_{i=1}^r a_{1i} v_i, \sum_{i=1}^r a_{2i} v_i, \dots, \sum_{i=1}^r a_{ri} v_i \right). \end{aligned}$$

Ein Tupel wird also stets auf ein Tupel aus Linearkombinationen der Einträge abgebildet. Daher ist der von v_1, \dots, v_r erzeugte K -Untervektorraum gleich dem vom Bildtupel $g(v_1, \dots, v_r)$ erzeugten Untervektorraum. Wenn die v_1, \dots, v_r linear unabhängig sind, so gilt dies auch für das Bildtupel. Für einen r -dimensionalen Untervektorraum $U \subseteq V$ und zwei Basen von U gibt es stets einen Automorphismus von U , der die eine Basis in die andere Basis überführt. Wenn man also die Operation von $\text{GL}_r(K)$ auf die (offene und dichte) Teilmenge $T \subseteq V^r$ einschränkt, die aus allen linear unabhängigen r -Tupeln besteht, so entsprechen die Bahnen der Operation den r -dimensionalen Untervektorräumen von V , und die Elemente der einzelnen Bahnen durchlaufen sämtliche Basen des zugehörigen Raumes. Die Bahnen der Operation auf ganz V^r sind schwieriger zu charakterisieren.

Wir beschreiben die algebraische Version dieser Operation. Die linearen Funktionen auf dem der Operation zugrunde liegenden Vektorraum $W = V^r$ sind die Linearformen $f = (f_1, \dots, f_r)$ mit

$$f(v_1, \dots, v_r) = f_1(v_1) + \dots + f_r(v_r).$$

Dabei sind die f_i Linearformen auf V , die wir direkt als Linearformen auf V^r über die i -te Projektion auffassen. Zu $g \in \text{GL}_r(K)$ und $f = (f_1, \dots, f_r)$ ist die verknüpfte Abbildung gleich

$$\begin{aligned} (fg)(v_1, \dots, v_r) &= f \left(\sum_{i=1}^r a_{1i} v_i, \sum_{i=1}^r a_{2i} v_i, \dots, \sum_{i=1}^r a_{ri} v_i \right) \\ &= f_1 \left(\sum_{i=1}^r a_{1i} v_i \right) + f_2 \left(\sum_{i=1}^r a_{2i} v_i \right) + \dots + f_r \left(\sum_{i=1}^r a_{ri} v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^r a_{1i} f_1(v_i) + \sum_{i=1}^r a_{2i} f_2(v_i) + \dots + \sum_{i=1}^r a_{ri} f_r(v_i) \\ &= \sum_{i,j} a_{ji} f_j(v_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^r a_{j1} f_j(v_1) + \sum_{j=1}^r a_{j2} f_j(v_2) + \dots + \sum_{j=1}^r a_{jr} f_j(v_r) \\
&= \left(\sum_{j=1}^r a_{j1} f_j, \sum_{j=1}^r a_{j2} f_j, \dots, \sum_{j=1}^r a_{jr} f_j \right) (v_1, \dots, v_r).
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
fg &= (f_1, \dots, f_r) g \\
&= \left(\sum_{j=1}^r a_{j1} f_j, \sum_{j=1}^r a_{j2} f_j, \dots, \sum_{j=1}^r a_{jr} f_j \right).
\end{aligned}$$

Es sei nun $V = K^n$, so dass wir die Gesamtsituation mit Variablen schreiben können. Zum Vektorraum V^r gehört der Polynomring

$$K[X_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r].$$

Dabei repräsentieren die X_{ij} , $1 \leq i \leq n$, die Koordinatenfunktionen der j -ten Kopie des Vektorraums K^n . Die Variable X_{ij} ist die j -te Projektion von V^r auf $V = K^n$ gefolgt von der i -ten Projektion p_i von K^n auf K . Somit ist (es steht p_i an der j -ten Stelle)

$$\begin{aligned}
X_{ij}g &= (0, \dots, p_i, 0, \dots, 0) g \\
&= (a_{j1}p_i, \dots, a_{jr}p_i) \\
&= \sum_{k=1}^r a_{jk} X_{ik}.
\end{aligned}$$

Wenn eine Linearform (also eine Linearkombination aller X_{ij}) in Matrixform als

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nr} \end{pmatrix}$$

gegeben ist, wobei die c_{ij} die Koeffizienten zu X_{ij} bezeichnen, so erhält man die durch g transformierte Linearform, indem man die Matrix von rechts mit der transponierten Matrix zu g multipliziert, also

$$\begin{pmatrix} c'_{11} & c'_{12} & \dots & c'_{1r} \\ c'_{21} & c'_{22} & \dots & c'_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c'_{n1} & c'_{n2} & \dots & c'_{nr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nr} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}^{tr}.$$

Damit liegt eine Operation der $GL_r(K)$ auf dem Polynomring in nr Variablen vor. Um invariante Polynome zu bekommen, schränken wir die Operation auf

die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}_r(K) \subseteq \mathrm{GL}_r(K)$ ein. Dann sind sämtliche r -Minoren der Variablenmatrix

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1r} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nr} \end{pmatrix}$$

invariant unter der Gruppenoperation. Dazu betrachten wir die universelle alternierende Abbildung

$$V^r \longrightarrow \bigwedge^r V, (v_1, \dots, v_r) \longmapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_r.$$

Diese Abbildung ist nach einer geeigneten Verallgemeinerung von Korollar 80.7 (Mathematik (Osnabrück 2009-2011)) invariant unter der Gruppenoperation (dafür braucht man, dass die Determinanten von g gleich 1 sind). Die r -Minoren sind Linearformen auf dem r -ten Dachprodukt.

DEFINITION 29.3. Zu einem K -Vektorraum V und einer natürlichen Zahl r nennt man die Menge der r -dimensionalen Untervektorräume $U \subseteq V$ die r -te *Graßmann-Varietät*. Sie wird mit $G(r, V)$ und bei $V = K^n$ mit $G(r, n)$ bezeichnet.

Nach Beispiel 29.2 ist $G(r, V)$ der Bahnenraum zur dort beschriebenen Operation der $\mathrm{GL}_r(K)$ auf $T \subseteq V^r$, wobei T aus den linear unabhängigen r -Tupeln besteht. Dieses T ist in der Zariski-Topologie eine offene Teilmenge und bei $K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} auch in der metrischen Topologie offen. Man kann $G(r, V)$ mit der Quotiententopologie unter der Quotientenabbildung versehen. Im metrischen Fall erhält man sogar eine Mannigfaltigkeitsstruktur auf $G(r, V)$, man spricht dann von der *Graßmann-Mannigfaltigkeit*.

BEISPIEL 29.4. Sei K ein Körper. Wir betrachten Paare von Matrizen

$$(B, C),$$

wobei B eine $m \times n$ -Matrix und C eine $n \times k$ -Matrix ist. Es gibt also insgesamt $n(k + m)$ Koordinaten. Die allgemeine lineare Gruppe $G = \mathrm{GL}_n(K)$ operiert auf der Menge dieser Matrizenpaare in folgender Weise: Zu $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ setzen wir

$$A \cdot (B, C) := (BA^{-1}, AC).$$

Dass eine Operation vorliegt, folgt aus

$$\begin{aligned} A_1 \cdot (A_2 \cdot (B, C)) &= A_1 \cdot (BA_2^{-1}, A_2C) \\ &= ((BA_2^{-1})A_1^{-1}, A_1(A_2C)) \\ &= (B(A_2^{-1}A_1^{-1}), (A_1A_2)C) \\ &= (B(A_1A_2)^{-1}, (A_1A_2)C) \\ &= (A_1A_2) \cdot (B, C), \end{aligned}$$

woraus auch die Wahl der Reihenfolge und der Grund der Invertierung klar wird. Mit Hilfe der Variablenmatrizen

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \dots & X_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1k} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nk} \end{pmatrix}$$

kann man einfach invariante Polynome aus $R = K[X, Y]$ angeben, nämlich die Einträge der Produktmatrix XY , also die Ausdrücke der Form

$$F_{ij} := X_{i1}Y_{1j} + X_{i2}Y_{2j} + \dots + X_{in}Y_{nj}.$$

Die Invarianz dieser Formen folgt direkt aus der Invarianz der Produktabbildung

$$\psi: \text{Mat}_{m \times n}(K) \times \text{Mat}_{n \times k}(K) \longrightarrow \text{Mat}_{m \times k}(K), (B, C) \longmapsto BC,$$

welche sich direkt aus

$$\psi(A \cdot (B, C)) = \psi(BA^{-1}, AC) = BA^{-1}AC = BC = \psi(B, C)$$

ergibt. Darüber hinaus kann man zeigen, dass der Invariantenring von den F_{ij} erzeugt wird und auch eine explizite Restklassendarstellung ist bekannt: Wenn man den Polynomring $K[W] = K[W_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k]$ heranzieht und die surjektive Abbildung

$$\pi: K[W] \longrightarrow R^G, W_{ij} \longmapsto F_{ij},$$

betrachtet, so wird der Kern von π durch sämtliche $n + 1$ -Minoren der Variablenmatrix W erzeugt. Dieser Invariantenring ist daher ein sogenannter Minorenring (oder Determinantenring), und insbesondere lassen sich Minorenringe als Invariantenringe realisieren.

Wenn beispielsweise $n = 1$ ist, so gibt es die Variablen X_1, \dots, X_m und Y_1, \dots, Y_k und es ist

$$F_{ij} = X_i Y_j.$$

Zwischen den F_{ij} bestehen die Relationen

$$F_{ij}F_{rs} = X_i Y_j X_r Y_s = X_i Y_s X_r Y_j = F_{is}F_{rj},$$

d.h.

$$F_{ij}F_{rs} - F_{is}F_{rj} = 0.$$

Diese Relationen sind die 2-Minoren der Matrix $(W_{ij})_{ij}$. In diesem Fall ist der Invariantenring sogar ein Monoidring.

Affin-algebraische Gruppen

DEFINITION 29.5. Sei K ein Körper. Eine *affin-algebraische Gruppe* (über K) ist eine Gruppe G der Form

$$G = (\text{Spek}(H))(K),$$

wobei H eine kommutative endlich erzeugte K -Hopf-Algebra ist.

Eine affin-algebraische Gruppe ist also die Menge der K -Punkte eines affinen Gruppenschemas von endlichem Typ. Dazu gehören die endlichen Gruppen, die additive Gruppe $(K, +, 0)$, die multiplikative Gruppe $(K^\times, \cdot, 1)$, die allgemeine lineare Gruppe, die spezielle lineare Gruppe.

DEFINITION 29.6. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\text{GL}_n(K)$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen. Eine Zariski-abgeschlossene Untergruppe $G \subseteq \text{GL}_n(K)$ nennt man eine *lineare Gruppe* (oder eine *linear-algebraische Gruppe*).

Man kann zeigen, dass affin-algebraische Gruppen und lineare Gruppen äquivalente Konzepte sind. Das erste Konzept ist begrifflich stärker, während das zweite Konzept die typischen Beispiele abdeckt. Der Zusammenhang beruht im Wesentlichen auf der Hopf-Interpretation der allgemeinen linearen Gruppe, siehe Beispiel 18.6.

Wir reformulieren Definition 18.9 für eine affin-algebraische Gruppe.

DEFINITION 29.7. Zu einer affin-algebraischen Gruppe G über einem Körper K , die durch die kommutative K -Hopf-Algebra H gegeben sei, nennt man eine Operation von G auf einer kommutativen K -Algebra R *algebraisch* (oder *regulär*), wenn sie durch eine Kooperation von H auf R gegeben ist.