تأليف

شفيق بك منصور

(يكن)

طبع بالمطبعة الميرية ببولاق

سنة ١٣٠١

ويوجد في المكتبة العمومية بشارع كلوت بك

بالقاهرة

كتب اخرى للمؤلف

تطبيق الرياضيات على علم القوانين (بالفرنساوى)
حساب التفاضل والتكامل (الجزء الاول)
مختصر علم الحساب
مختصر علم الهندسة } تحت الطبع
مختصر علم الطبيعة }

(مختصر علم الجبر)

(تعريفات)

(١) علم الجبر تعميم علم الحساب وذلك باستعمال الحروف الهجائية والعلامات أما الحروف فتوضع عوضاً عن الكميات وأما العلامات فتدل على العمليات التي يراد اجراؤها على الكميات

والعلامات هي + (زائد) للجمع و — (ناقص) للطرح و × (في) للضرب (وعدم العلامة بين حرفين علامة للضرب أيضاً) و ÷ أو — (على) للقسمة و > للاكبر و < للاصغر و = (يعادل) للمساواة . لتكن مثلا الكميات

$$\text{ا} + \text{ب} - \text{حـ ء} - \frac{\text{حـ}}{\text{هـ}} = \text{و}$$

فتقرأ ا زائد ب ناقص حـ في ء ناقص حـ على هـ يعادل و ومعناه انه اذا أضيف ب الى ا وطرح من المجموع حاصل الضرب حـ ء ثم طرح من الفاضل خارج القسمة $\frac{\text{حـ}}{\text{هـ}}$ يفضل باق يعادل و .

(٢) مكرر كمية هو عدد يرقم عن يمينها يدل على قدر مرات تكرارها نحو ٣ س فانه يدل على س + س + س وأس كمية هو عدد يرقم عن يسارها من ارتفاعها يدل على درجة قوتها أي على عدد العوامل المتساوية المضروب بعضها في بعض مثاله $\text{س}^{٣}$ فانه يدل على س × س × س

جذر كمية هو عدد اذا ترقى الى درجة معلومة حدثت تلك الكمية مثاله حـ فانه الجذر الثالث أي التكعيبي للكمية $\text{حـ}^{٣}$ وعلامته هكذا $\sqrt{\ }$ فيكتب $\sqrt[٣]{\text{حـ}^{٣}} = \text{حـ}$ والعدد ٣ الموضوع على العلامة يسمى دليل الجذر

(تنبيه) لا يكتب الدليل في الجذر الثاني أي التربيعي مثاله $\sqrt{\text{حـ}^{٢}} = \text{حـ}$

(٤) الكمية المركبة هي التي تتركب من أجزاء منفصلة بعضها عن بعض بإحدى العلامتين + أو −

$$ب + ح ء - \frac{ق}{و}$$

وكل من هذه الأجزاء يسمى حداً أو كمية بسيطة وإذا كانت المركبة ذات حدين تسمى ثنائية وإن كانت ذات ثلاثة حدود سميت ثلاثية وهلم جراً والحدود التي تتقدمها العلامة + تسمى إيجابية والتي تتقدمها العلامة − تسمى سلبية والتي ليست لها علامة تقدر لها العلامة + والحدود المتشابهة هي التي تشابهت حروفها وقواتها نحو

$$٣ ح^{٢} ء - ٤ ح ء - ٩ ح^{٢} ء + ٧ ح ء$$

ويمكن اختصارها أي ضمها في حد واحد بأن تختصر الحدود المتشابهة العلامة أي نطرح المكرر الأصغر من الأكبر ونجعل له علامة الأكبر فيكون في هذا المثال ثلاثة $ح^{٢} ء$ وأربعة $ح^{٢} ء$ فيحصل ٧ $ح^{٢} ء$ وهي مختصر الحدين الإيجابيين ثم نختصر الحدين الآخرين فيحصل − ١٣ $ح^{٢} ء$ فنطرح ٧ من ١٣ فيفضل ٦ ويكون مختصر الكمية المفروضة هو − ٦ $ح^{٢} ء$

وينتج من هذا أنه إذا كان في كمية حدان متشابهان متضادان في العلامة فقد يمكن حذفهما لأنهما يتلاشيان مثال ذلك

$$٢ ح هـ + ٢ ح - ٢ ح هـ = ٣ ح$$

(٥) يظهر لك فضل علم الجبر على علم الحساب في حل هذه المسألة

ما ربح ٤٠٠٠٠ قرش كل مائة قرش بخمسة في السنة

فنقول في حل هذه المسألة بما أن ربح كل ١٠٠ قرش هو ٥ فالقرش يربح $\frac{٥}{١٠٠}$ أو ٠,٠٥ فالأربعون ألف قرش تربح في سنة واحدة ٠,٠٥ × ٤٠٠٠٠ أي ٢٠٠٠ قرش وفي سنتين ٢٠٠٠ وهو الجواب

ولكن هذه الطريقة ليست بعامة ولا بد لحل مسائل مثل هذه من ... تذكرا

كل ما قلناه بخلاف ما اذا استعملنا الحروف ورمزنا بالحرف م مثلا لرأس المال وبالحرف س لسعره وبالحرف ح للاجل ثم قلنا حيث ان ١٠٠ فرنك تربح س فالفرنك يربح $\frac{\text{س}}{١٠٠}$ و م فرنكات تربح في السنة $\frac{\text{م س}}{١٠٠}$ وفي المدة ح تربح $\frac{\text{س م ح}}{١٠٠}$ فانا نرى ان كل مسئلة من هذا النوع تحل بضرب رأس المال في سعره وفي الاجل ثم بقسمة الحاصل على ١٠٠ ليكن مثلا المطلوب فائدة ١٥٠٠ فرنك في ٤ سنوات على حسب المئة ٣ فنجعل في النتيجة السابقة م = ١٥٠٠ و س = ٣ و ح = ٤ فنجد حالا $\frac{١٥٠٠ \times ٣ \times ٤}{١٠٠}$ أي ١٨٠ فرنكا وهو الجواب

(تنبيه) كل عبارة جبرية تستعمل لحل مسائل من نوع واحد تسمى قانونا

(الباب الاول)

(في الجمع)

(١) تجمع الكميات الجبرية بكتابتها متتالية مع علاماتها مثلا ان قيل اجمع الكمية ب والكمية — ح والكمية د كان المجموع

ب — ح + د

واذا كانت الكميات بعضها متشابهة وبعضها غير متشابهة فتكتب المتشابهة بعضها تحت بعض ثم تختصر ومثال ذلك ان قيل اجمع ٢ ب ح^{٢} — ٤ ب د + ٩ ب ه و ب ح^{٢} + ٣ ب د — ٩ ب ه و ٥ ب ه — ٣ ب ح^{٢} فتجري العمل هكذا

٢ ب ح^{٢} — ٤ ب د + ٩ ب ه

ب ح^{٢} + ٣ ب د — ٩ ب ه

— ٤ ب ح^{٢} + ٥ ب ه

— ب ح^{٢} — ب د + ٥ ب ه

مثال آخر

— ح + ح د — هـ

٣ ح — ٤ ح د + ٥ هـ

٥ ح — ٤ هـ

+ ٣ ح د — ٩ هـ

---

٧ ح — ٩ هـ

(في الطرح)

(٢) في الطرح يلزم تغيير علامات المطروح من + الى — وعكسه ثم يجري العمل كما في الجمع فان قيل اطرح — ح من ب كان الفاضل ب + ح وان قيل اطرح ٣ ح — ٤ د + هـ من ٥ ح — ٧ د + ٣ هـ فتأخذ العملية هذه الصورة

٥ ح — ٧ د + ٣ هـ

— ٣ ح + ٤ د — هـ

---

٢ ح — ٣ د + ٢ هـ

ولنطرح ٤ ح د — د هـ^{٢} — ٣ ب و + ٦ و

من ٣ ح د — د هـ^{٢} — ٣ ب و فنجد

٣ ح د — د هـ^{٢} — ٣ ب و

— ٤ ح د + د هـ^{٢} + ٣ ب و — ٦ و

— ح د — ٦ و

(تنبيه) اذا أريد بيان طرح كمية من كمية اخرى بدون اجراء العمل يوضع المركبة بين قوسين هكذا

ا — (ب — ح + د)

فان أريد حذف القوسين لزم تغيير علامات الكميات المحصورة بينهما فتصير

ا — ب + ح — د

(تمرينات)

(في الجمع)

(١) ح^{٣} + ٣ ح^{٢} د + ٣ ح د^{٢} + د^{٣}

ح^{٣} — ٣ ح^{٢} د + ٣ ح د^{٢} — د^{٣}

٢ ح^{٣} + ٦ ح د^{٢}

(٢) — ٢ ح — ٢ د — ٢ هـ

٩ ح + ٢ د — ٢ و

— ٦ ح + ٣ د + ٥ هـ + ٦ و

ح + ٣ د + ٣ هـ + ٤ و

(٣) — ٢ ح + ٣ د — ٥ هـ + ٨ و

٣ ح — ٥ د + ٦ هـ — ٩ و

— ٥ ح + ٨ د — ٩ هـ + ١٢ و

٦ ح — ٩ د + ١١ هـ — ١٣ و

٢ ح — ٣ د + ٣ هـ — ٢ و

(في الطرح)

اطرح ١٠ ح — ٧ د + ٥ هـ من ٦ ح — ٤ د

٦ ح — ٤ د

— ١٠ ح + ٧ د — ٥ هـ

— ٤ ح + ٣ د — ٥ هـ

اطرح ٥ ح د — ٤ هـ و + ٣ د^{٢} + ٣ ح^{٢} من ٤ ح د — هـ و — ٢ د^{٢} + ٣ ح^{٢}

٤ ح د — هـ و — ٢ د^{٢} + ٣ ح^{٢}

— ٥ ح د + ٤ هـ و — ٣ د^{٢} — ٣ ح^{٢}

— ح د + ٣ هـ و — ٥ د^{٢}

اطرح

اطرح س^{٤} − ٤ س^{٣} ص + ٦ س^{٢} ص^{٢} − ٤ س ص^{٣} + ص^{٤}

من س^{٤} + ٤ س^{٣} ص + ٦ س^{٢} ص^{٢} + ٤ س ص^{٣} + ص^{٤}

س^{٤} + ٤ س^{٣} ص + ٦ س^{٢} ص^{٢} + ٤ س ص^{٣} + ص^{٤}

− س^{٤} + ٤ س^{٣} ص − ٦ س^{٢} ص^{٢} + ٤ س ص^{٣} − ص^{٤}

٨ س^{٣} ص + ٨ س ص^{٣}

(الباب الثاني)

(في الضرب)

(١) لضرب كمية بسيطة في أخرى يلزم اعتبار أربع قواعد (أولها) قاعدة المكررات وهي ان تضرب المكرر في المكرر ويجعل الحاصل مكررا للحاصل المطلوب (ثانيها) قاعدة الحروف وهي ان تكتب كل الحروف في الحاصل بدون تكرار (ثالثها) قاعدة الاسس وهي ان تجمع أسس الحروف المتشابهة (رابعها) قاعدة العلامات وهي ان كان العاملان متحدي العلامة فالحاصل يكون ايجابيا وان كان مختلفي العلامة يكون الحاصل سالبا وبعبارة أخرى

+ مضروب في + أو − مضروب في − يحصل +

+ مضروب في − أو − مضروب في + يحصل −

مثال ذلك اذا قيل اضرب ٣ ح^{٢} د^{٥} في ٢ ح د^{٤} فيكون الحاصل ٦ ح^{٣} د^{٩} لانه يمكن تحليل العاملين المفروضين هكذا ٣ ح ح د د د د د × ٢ ح د د د د أو هكذا ٣ × ٢ ح ح ح د د د د د د د د د أعني ٦ ح^{٣} د^{٩}

(٢) ولضرب كمية مركبة في أخرى يلزم أولا ترتيبهما بالنسبة الى حرف واحد أعني بحيث ان أسس هذا الحرف في العاملين تكون آخذة في التصاعد أو في التنازل في آن واحد ثم يضرب حسب القواعد السابقة كل حد من المضروب

مبتدأ من اليمين فى كل حد من المضروب فيه ويوضع الحد الاول من كل حاصل جزئى على حذاء الحد الذى ضرب فيه ثم تجمع الحواصل الجزئية باختصار الحدود المتشابهة ان وجدت فما كان هو الجواب مثال ذلك ان قيل

اضرب $٥ح^{٣} - ٣حد^{٢} + ٧ح^{٢}د$

فى $٥د^{٣} - ٤حد^{٢} + ٣ح^{٢}د$

فترتب العاملين بالنسبة الى أسس ح التنازلية مثلا ثم تجرى الضرب فيأخذ العمل هذه الصورة

$$٥ح^{٣} + ٧ح^{٢}د - ٣حد^{٢}$$
$$٣ح^{٢}د - ٤حد^{٢} + ٥د^{٣}$$
$$١٥ح^{٥}د + ٢١ح^{٤}د^{٢} - ٩ح^{٣}د^{٣}$$
$$- ٢٠ح^{٤}د^{٢} - ٢٨ح^{٣}د^{٣} + ١٢ح^{٢}د^{٤}$$
$$٢٥ح^{٣}د^{٣} + ٣٥ح^{٢}د^{٤} - ١٥حد^{٥}$$
$$١٥ح^{٥}د + ح^{٤}د^{٢} - ١٢ح^{٣}د^{٣} + ٤٧ح^{٢}د^{٤} - ١٥حد^{٥}$$

(فى تربيع الكميات البسيطة)

(٣) ينتج مما سبق فى (١) انه لتربيع الكميات البسيطة يلزم (اولا) تربيع المكرر (وثانيا) تضعيف الاسس (وثالثا) اعطاء العلامة + للمربع المطلوب مثاله $٤ح^{٢}د هـ$ فان مربعها $١٦ح^{٤}د^{٧}هـ^{٢}$ وكذلك $-٤ح^{٢}د هـ$ فمربعها $١٦ح^{٤}د^{٢}هـ^{٢}$ فاذا لكل مربع جذران احدهما ايجابي والآخر سالبي فيكون

$$\sqrt{١٦ح^{٤}د^{٢}هـ^{٢}} = \pm ٤ح^{٢}د هـ$$

(فى تربيع الكميات الثنائية)

(٤) اذا ضربنا ا + ب فى نفسه نجد

ا + ب

$$
\begin{array}{r}
\text{أ} + \text{ب} \\
\text{أ} + \text{ب} \\
\hline
\text{أ}^2 + \text{أ}\,\text{ب} \\
\text{أ}\,\text{ب} + \text{ب}^2 \\
\hline
\text{أ}^2 + 2\,\text{أ}\,\text{ب} + \text{ب}^2
\end{array}
$$

يعني ان تربيع مجموع كميتين يعادل تربيع الحد الاول + مضاعف حاصل ضربهما + مربع الحد الثاني واذا ضربنا أ − ب في نفسه نجد

$$
\begin{array}{r}
\text{أ} - \text{ب} \\
\text{أ} - \text{ب} \\
\hline
\text{أ}^2 - \text{أ}\,\text{ب} \\
- \text{أ}\,\text{ب} + \text{ب}^2 \\
\hline
\text{أ}^2 - 2\,\text{أ}\,\text{ب} + \text{ب}^2
\end{array}
$$

يعني تربيع فاضل كميتين يعادل تربيع الحد الاول − مضاعف حاصل ضربهما + تربيع الحد الثاني

(حاصل ضرب مجموع كميتين في فاضلهما)

(٥) اذا ضربنا أ + ب في أ − ب نجد

$$
\begin{array}{r}
\text{أ} + \text{ب} \\
\text{أ} - \text{ب} \\
\hline
\text{أ}^2 + \text{أ}\,\text{ب} \\
- \text{أ}\,\text{ب} - \text{ب}^2 \\
\hline
\text{أ}^2 \qquad - \text{ب}^2
\end{array}
$$

يعني ان حاصل ضرب مجموع كميتين في فاضلهما يعادل تربيع الحد الاول — تربيع الحد الثاني

(تنبيه) للدلالة على ضرب كمية مركبة في كمية بسيطة توضع المركبة بين قوسين هكذا

$$(\text{ا} + \text{ب} - \text{ح})\,\text{د}$$

فان اريد حذف القوسين لزم ضرب كل من الكميات المحصورة بينهما في الكمية البسيطة فيحدث

$$\text{ا}\,\text{د} + \text{ب}\,\text{د} - \text{ح}\,\text{د}$$

وبالعكس اذا وجد حرف مشترك في حدود كمية مركبة يمكن جعله عاملا مشتركا مثال ذلك

$$\text{ح}\,\text{د}\,\text{هـ}^{2} - \text{ب}\,\text{هـ}^{3} + \text{ح}\,\text{هـ}^{4}$$

فيمكن كتابتها كذا

$$(\text{ح}\,\text{د} - \text{ب}\,\text{هـ} + \text{ح}\,\text{هـ}^{2})\,\text{هـ}^{2}$$

واذا كان العاملان كميتين مركبتين يمكن وضعهما كذا

$$(\text{ا} + \text{ب} - \text{ح})(\text{د} - \text{هـ} + \text{و})$$

(تمرينات)

$$-\text{ح}^{\text{م}-\text{ا}}\,\text{د} \times 2\,\text{ح}^{2}\,\text{د} = -2\,\text{ح}^{\text{م}+\text{ا}}\,\text{د}^{2}$$

$$(\text{ا}^{2} + \text{ا}\,\text{ب} + \text{ب}^{2})(\text{ا} - \text{ب}) = \text{ا}^{3} - \text{ب}^{3}$$

$$(\text{ا}^{2} - \text{ا}\,\text{ب} + \text{ب}^{2})(\text{ا} + \text{ب}) = \text{ا}^{3} + \text{ب}^{3}$$

$$(\text{ا} + \text{ب})^{3} = \text{ا}^{3} + 3\,\text{ا}^{2}\,\text{ب} + 3\,\text{ا}\,\text{ب}^{2} + \text{ب}^{3}$$

$$(\text{ا}^{2} + \text{ا}\,\text{ب} + \text{ب}^{2})(\text{ا}^{2} - \text{ا}\,\text{ب} + \text{ب}^{2})(\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2}) = \text{ا}^{6} - \text{ب}^{6}$$

(الباب الثالث)

(في القسمة)

(١) لقسمة كمية بسيطة على اخرى يلزم اعتبار اربع قواعد (اولها) قاعدة المكررات وهي ان تقسم مكرر المقسوم على مكرر المقسوم عليه فما كان هو مكرر الخارج المطلوب (وثانيها) قاعدة الحروف وهي ان تكتب على يسار مكرر الخارج كل حروف المقسوم ان كانت الحروف متشابهة في الكميتين (وثالثها) قاعدة الاس وهي ان تطرح أس كل حرف في المقسوم عليه من أس الحرف المشابه له في المقسوم (ورابعها) قاعدة العلامات وهي ان كانت الكميتان متحدتي العلامة فعلامة الخارج تكون + والا فتكون —
وبعبارة أخرى

$$+ \text{ مقسوم على } + \quad \text{أو} \quad - \text{ مقسوم على } - = +$$
$$+ \text{ مقسوم على } - \quad \text{أو} \quad - \text{ مقسوم على } + = -$$

مثال ذلك اذا اريد قسمة $٨\,ح^{٣}\,د^{٥}$ على $٢\,ح^{٢}\,د^{٣}$ كان الخارج $٤\,ح\,د^{٢}$ (تنبيه) متى كان أس واحد لحرف واحد في كل من المقسوم والمقسوم عليه يمكن محوه منهما أو كتابته في الخارج بالاس صفر اذ قد اصطلحوا على ان كل كمية قوتها صفر تعادل الواحد نحو $ح^{٠} = ١$ وسبب ذلك هو ان الخارج من قسمة كمية على نفسها يعادل واحد فاذن يكون

$$\frac{١٢\,ح^{٥}\,د^{٣}\,و}{٣\,ح^{٢}\,د^{٣}\,ه} = ٤\,ح^{٣}\,د^{٠}\,ه^{-١}\,و = ٤\,ح^{٣} \times ١ \times ه^{-١}\,و = ٤\,ح^{٣}\,ه^{-١}\,و$$

(في القسمة المركبة)

(٢) استحالة قسمة الكميات البسيطة تكون في ثلاث حالات (الاولى) اذا كان مكرر المقسوم لا يقبل القسمة على مكرر المقسوم عليه (الثانية) اذا كان أس حرف في المقسوم عليه أكبر من أسه في المقسوم (الثالثة) اذا كان في المقسوم عليه حرف لم يوجد في المقسوم ففي هذه الحالات يكون الخارج كسرا

[illegible]

$\frac{١}{٣}$ ح $-$ ... ووجدت الى

فتقسم حداً على ٣ وعلى $ح^٣$ وعلى د وعلى هـ وجدت

$$\frac{١١\ ح^٣ - هـ}{١٥\ ح^٢\ د^٣\ هـ} = \frac{٤\ ح^٣}{٥\ هـ}$$

(٣) ونقسم الكميات المركبة على البسيطة بقسمة كل من حدود المركبة على البسيطة مثال ذلك

$$\frac{ح + هـ\ د - ط\ د}{د} = ح + هـ - ط$$

مثال آخر

$$\frac{ب - هـ\ د + ر\ د^٣}{د^٢} = \frac{ب}{د^٢} - \frac{هـ}{د} + ر\ د$$

(٤) القسمة ... على كمية أخرى يلزم ترتيبها بالنسبة الى حرف واحد كما تقدم في الضرب ثم يقسم اول حد من المقسوم على اول حد من المقسوم عليه فما كان فهو اول حد من الخارج ثم تضرب حدود المقسوم عليه في هذا الحد ويطرح الحاصل من المقسوم ثم تقسم اول حد من الباقي على اول حد من المقسوم عليه فما كان فهو الحد الثاني من الخارج ثم يضرب المقسوم عليه في هذا الحد الثاني ويطرح من المقسوم عليه ويجري العمل على هذا المنوال حتى يفنى ان كان المقسوم قابل القسمة على المقسوم عليه مثال ذلك

$$١٥\ ح^٥ د^٣ - ٧\ ح^٤ د^٥ - ٤\ ح^٣ د^٧ \quad \Big| \quad ٥\ ح^٣ د + ٤\ ح د^٣$$

$$\frac{١٥\ ح^٥ د^٣ + ١٢\ ح^٤ د^٥}{- ٥\ ح^٤ د^٥ - ٤\ ح^٣ د^٧} \qquad ٣\ ح^٢ د^٢ - ح د^٤$$

$$- ٥\ ح^٤ د^٥ - ٤\ ح^٣ د^٧$$

[illegible]

(٥) [illegible]

[illegible]

(٦) [illegible]

ثم نجمع الفاضل والمطروح فان ساوى المجموع المطروح منه كان العمل صحيحا
وحيث ان الضرب ضد القسمة لان تقسيم الحاصل على احدهما ان كان يسوى الخارج
العامل الآخر كان العمل صحيحا فيلزم ان تحقيق القسمة هو ان تضرب الخارج في
المقسوم عليه فان كان العمل صحيحا لزم ان الحاصل يكون مساويا للمقسوم

(تمرينات)

١٥ ح^٣ د^٢ ÷ ٥ ح^٤ = ٣ ح^{-١} د

− ١٨ ح^{٢م−ن−١} د ÷ ٩ ح^{م+ن−١} = − ٢ ح^{م−٢ن}

١٠ س^م ص ÷ ٢ س ص^ن = ٥ س^{م−١} / ص^{ن−١}

(٢١ س^٤ ص^٢ − ١٤ س^٣ ص^٣ + ٣٥ س^٢ ص^٤) ÷ ٧ س^٢ ص^٢ = ٣ س^٢ − ٢ س ص + ٥ ص^٢

(ح^٢ − د^٢ + هـ^٢ − و^٢ + ٢ ح هـ − ٢ د و) ÷ (ح − د + هـ − و) = ح + د + هـ + و

(الباب الرابع)

(في الكسور)

(الفصل الاول)

(في التحليل والاختزال)

(١) ان كل مقدار مركب هو محلل الى عوامله لاصلية كمثاله

ح د + ح هـ تنحل الى ح (د + هـ)

و ح^٢ − د^٢ تنحل الى (ح + د) (ح − د)

و ... ٢ س − ٣ ... ١

... = (س − ١) − (... س − ١)

= (... − ١) (... − ٢ − ١) (... ١) (س − ٣)

(٣) في بعض الأحيان يمكن إضافة كمية ثم طرحها من الكمية التي يراد تحليلها مثال ذلك

$$٢ س^٢ − ٣ س + ١$$

فتضاف كمية ... ونطرحها

$$٢ س^٢ − ٤ س + ١ + س$$

ثم نضم إلى هذه واحد ثم نطرحه منها فيجب

$$٢ س^٢ − ٤ س + ٢ + س − ١ =$$

$$٢ (س^٢ − ٢ س + ١) + س − ١$$

أو

$$٢ (س − ١)^٢ + س − ١ = (س − ١) ×$$

$$[٢ (س − ١) + ١] = (س − ١) (٢ س − ٣ س)$$

(تمرينات)

$$ح^٢ د + ح^٢ هـ − ح د هـ ، ح − د ، ح − د) (ح + د)$$

$$٩ (س − ص)^٢ − ٤ س^٢ − (٥ س − ٣ ص) (س − ٣ ص)$$

$$ح^٣ + د^٣ ، هـ^٣ − ٣ ح^٢ − ٣ ح هـ ، ح^٢ هـ^٢ − (ح + د + هـ) ×$$

$$(ح + د − هـ) (ح − د + هـ) (ح − د − هـ)$$

(٢) الأمر يحتمل بقسمة المبدأ والتام كليهما على قوى عومها المشتركة مثله

$$\frac{ح\,د^{2}}{ح\,هـ} = \frac{د^{2}}{هـ} \quad و \quad \frac{٦\,هـ}{٤\,ح\,هـ} = \frac{٣}{٢\,ح} \quad و \quad \frac{ح^{2} + ح\,د}{ح + ح\,د^{2}} = \frac{ح + د}{١ + د^{2}}$$

ويسهل ايجاد القواسم المشتركه بفك كل من البسط والمقام مثال ذلك

$$\frac{(ح + ١)^{2} - ح^{2}}{٦\,ح^{2} + ٣\,ح} = \frac{٢\,ح + ١}{٣\,ح\,(٢\,ح + ١)} = \frac{١}{٣\,ح}$$

مثال آخر

$$\frac{\left(\frac{ح + د}{٢}\right)^{2} - \left(\frac{ح - د}{٢}\right)^{2}}{ح + ح\,د} = \frac{ح\,د}{ح\,(١ + د)} = \frac{د}{١ + د}$$

(تمرينات)

$$\frac{ح^{2} - د^{2}}{ح^{2} + ح\,د} = \frac{ح - د}{ح}$$

$$\frac{س^{2} + (ح + د)\,س + ح\,د}{(س + ح)^{2}} = \frac{س + د}{س + ح}$$

$$\frac{س^{2} - ٥\,س - ٦}{س^{3} - ٩\,س^{2} + ٢٦\,س - ٢٤} = \frac{١}{س - ٤}$$

(الفصل الرابع)

(في جمع الكسور)

(١) اذا كانت الكسور متحدة المقام فاجمع البسوط واجعل المجموع بسطا على المقام المشترك مثاله

$$\frac{١}{هـ} - \frac{ح}{هـ} + \frac{د}{هـ} = \frac{١ - ح + د}{هـ}$$

[illegible]

[illegible]

فبالضرب

[illegible]

وبالجمع

[illegible]

(تمرينات)

[illegible]

[illegible]

[illegible]

(في طرح الكسور)

(٢) اذا كان المطروح والمطروح منه متحدي المقام فبدل علامة المطروح واجعل فاضل البسطين بسطا على المقام المشترك مثاله اذا قيل اطرح $\frac{ح}{د}$ من $\frac{ﻫ}{د}$ يأخذ العمل هذه الصورة

$$\frac{ح}{د} - \frac{ﻫ}{د} = \frac{ح - ﻫ}{د}$$

وان قيل اطرح $\frac{ج}{ﻫ}$ من $-\frac{ح}{ﻫ}$ يكون العمل

$$-\frac{ح}{ﻫ} - \frac{ج}{ﻫ} = \frac{-ح-ج}{ﻫ}$$

(تنبيه) يمكن وضع النتيجة الاخيرة وهي $\frac{-ح-ج}{ﻫ}$ على هذه الصورة

$-\frac{ح+ج}{ﻫ}$ أو على هذه $-\frac{ح+ج}{ﻫ}$

فيعلم من هنا انه اذا كانت العلامة — امام كسر فيمكنك حذفها بشرط ان تغير علامات الكميات التي في البسط

(٢) وأما اذا كانت الكسور مختلفة المقام فابتدئ بتجنيسها واجر العمل حسبما ذكر مثاله

$$\frac{\text{ا}}{\text{حـ}} - \frac{\text{ء}}{\text{هـ}} \quad \text{فبالتجنيس والجمع} \quad \frac{\text{ا هـ} - \text{حـ ء}}{\text{حـ هـ}}$$

(في ضرب الكسور)

(٣) يضرب البسط في البسط والمقام في المقام حسبما سبق في الحساب ثم يختزل الحاصل ان أمكن ذلك مثاله

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب هـ}} \times \frac{\text{حـ هـ}}{\text{ء}} = \frac{\text{ا حـ هـ}}{\text{ب ء هـ}} = \frac{\text{ا حـ}}{\text{ب ء}}$$

(تمرينات)

$$\frac{\text{٣ س ص}}{\text{٨ حـ}^{٢}\,\text{ء}^{٣}} \times \text{٤ حـ}^{٢}\,\text{ء} = \frac{\text{٣ س ص}}{\text{٢ ء}^{٢}}$$

$$\frac{\text{حـ}^{٢} - \text{٤ س}^{٢}}{\text{حـ} + \text{س}} \times \frac{\text{حـ} + \text{س}}{\text{حـ} - \text{٢ س}} = \text{حـ} + \text{٢ س}$$

$$\frac{\text{حـ} + \text{ء}}{\text{حـ} - \text{ء}} \times \frac{\text{حـ} - \text{هـ}}{\text{حـ} + \text{هـ}} \times \frac{\text{حـ}^{٢} - \text{ء}^{٢}}{\text{حـ}^{٢} - \text{هـ}^{٢}} = \left(\frac{\text{حـ} + \text{ء}}{\text{حـ} + \text{هـ}}\right)^{٢}$$

(في قسمة الكسور)

(٤) لقسمة كسر على كسر آخر يضرب بسط المقسوم في مقام المقسوم عليه ومقامه في بسطه كما مر في الحساب ومثال ذلك

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} \div \frac{\text{هـ}}{\text{ء}} = \frac{\text{ا ء}}{\text{ب حـ}}$$

مثال آخر

$$\frac{\text{١٨ حـ}^{٣}\,\text{ء}^{٢}}{\text{٣٥ هـ}^{٢}\,\text{و}^{٢}} \div \frac{\text{٣ حـ ء}^{٢}}{\text{٧ هـ}^{٢}\,\text{و}} = \frac{\text{٦ حـ}^{٢}}{\text{٥ و}}$$

(تمرينات)

(تمرينات)

$$\frac{\text{١٦ ا ح}^{\text{٤}}\text{ ء}^{\text{٥}}}{\text{٥ س}^{\text{٣}}\text{ ص}} \quad : \quad \text{١ ح ء}^{\text{٢}} = \frac{\text{٢ ح ء}^{\text{٢}}}{\text{٥ س}^{\text{٢}}\text{ ص}^{\text{٢}}}$$

$$\frac{\text{٥ س}^{\text{٣}}\text{ ص}^{\text{٢}}}{\text{٣ س} - \text{ص}^{\text{٢}}} \quad : \quad \frac{\text{س} - \text{ص}^{\text{٣}}}{\text{٢ س} - \text{ص}} = \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{ص}^{\text{٢}}(\text{٢ س} - \text{ص})}$$

$$\frac{\text{ح و} + \text{ء ه}}{\text{ح ه} - \text{ه ء}} \quad : \quad \frac{\text{ح ه} - \text{ه}^{\text{٢}}}{\text{ح} - \text{ء}} = \frac{\text{ح}^{\text{٢}}}{\text{ه}^{\text{٢}}}$$

(الباب الرابع)

(في المعادلات ذات الدرجة الاولى)

(١) المعادلة عبارة جبرية تدل على المساواة بين كميتين محتويتين على أجزاء معلومة وأخرى مجهولة نحو

$$\text{٤ س} - \text{٢٣} = \text{س} + \text{١}$$

فالكمية التى عن يمين العلامة = تسمى الطرف الاول والتى عن يسارها الطرف الثانى

حل معادلة هو تحويلها من صورة الى أخرى لاستخراج الكمية المجهولة وهذا التحويل مبنى على انه لا تتغير المعادلة اذا أضيف وطرح من طرفيها كميات متساوية وكذلك اذا ضربا وقسما على كميات متساوية ويتفرع من هذا

(أولا) انه يمكن نقل كمية من طرف الى آخر بتبديل علامتها مثاله

$$\text{س} - \text{ب} = \text{ح}$$

لاننا اذا أضفنا الى الطرفين الكمية ب يحصل

$$\text{س} = \text{ح} + \text{ب}$$

(وثانيا) انه يمكن تغيير علامات كل الحدود فى الطرفين مثاله

س — ب = ح

لانا اذا ضربنا الطرفين فى — ١ يحدث

— س + ب = — ح

(فى حل المعادلة ذات الدرجة الاولى والمجهول الواحد)

(٣) المعادلة ذات الدرجة الاولى هى التى لا تحتوى على المجهول الا بدرجة أولى فلحلها يلزم نقل الحدود المجهولة فى الطرف الاول والمعلومة فى الطرف الثانى (وهذا العمل يسمى بالمقابلة) ثم بعد اختصار الحدود المتشابهة يقسم الطرفان على مكرر المجهول

لنفرض المعادلة ١٣ س — ٧ = ٢ س + ١٥

فبالمقابلة ١٣ س — ٢ س = ١٥ + ٧

وبالاختصار ١١ س = ٢٢

وبالقسمة س = ٢

واذا كان فى المعادلة كسور ينبغى تحويل كل الحدود الى مقام مشترك ثم حذفه منها (وهذا العمل يسمى بالجبر) مثاله

٥/٣ س — ٤ = ١٠ — ٢/٧ س

فبالتحويل الى مقام مشترك يحدث

٣٥/٢١ س — ٨٤/٢١ = ٢١٠/٢١ — ٦/٢١ س

وبالجبر

٣٥ س — ٨٤ = ٢١٠ — ٦ س

وبالمقابلة ٣٥ س + ٦ س = ٢١٠ + ٨٤

وبالاختصار ٤١ س = ٢٩٤

وبالقسمة س = ٢٩٤/٤١ = ٧ ٧/٤١

ـ ـصـ = ...

+ ـ ا ـ = ب ـ ح ـ ١

(فى الميزان)

ـدل فيها المجهول بقيمته فان تساوى الطرفان

فهذا الحل صحيح والا ففاسد فاذا وضعنا فى المثال الاول ٢ عوضا

- ٧ = ٢ × ٢ + ١٥

١ = ١٩ فالعمل صحيح

(المعادلات الدرجة الاولى وجملة مجاهيل)

يشترط أن يكون عددها كعدد المعادلات المحتوية

وان لزم معادلتان واذا كان المراد ايجاد ثلاثة

ـرا

على الحذف وهو عملية الغرض منها اخراج

المعادلات وللحذف ثلاث طرق وهى المقارنة

(الحذف بالمقارنة)

مجهولين

ـ ٣ ص = ٨

+ ٣ ص = ٣٢

مثلا فلنا

$$\text{س} = \frac{٨ + ٣\,\text{ص}}{٤}$$

$$\text{س} = \frac{٣٣ - ٢\,\text{ص}}{٥}$$

ومن البديهي ان الشيئين المتساويين لشيء واحد فهما متساويان فلنا

$$\frac{٨ + ٣\,\text{ص}}{٤} = \frac{٣٣ - ٢\,\text{ص}}{٥}$$

وبالجبر $٤٠ + ١٥\,\text{ص} = ١٣٢ - ٨\,\text{ص}$

وبالمقابلة $١٥\,\text{ص} + ٨\,\text{ص} = ١٣١ - ٤٠$

وبالاختصار $٢٣\,\text{ص} = ٩٢$

وبالقسمة $\text{ص} = ٤$

وللتحصيل على س نضع مقدار ص في احدى المعادلتين المفروضتين فنجد $\text{س} = ٥$

(في الحذف بالوضع)

(٦) يؤخذ من احدى المعادلتين مقدار أحد المجهولين ويوضع في الاخرى لنفرض المعادلتين السابقتين فنأخذ من الاولى مثلا

$$\text{س} = \frac{٨ + ٣\,\text{ص}}{٤}$$

ثم نضع هذا المقدار في الثانية فيحدث

$$٥\left(\frac{٨ + ٣\,\text{ص}}{٤}\right) + ٢\,\text{ص} = ٣٣$$

وبالجبر $٤٠ + ١٥\,\text{ص} + ٨\,\text{ص} = ١٣٢$

وبالمقابلة $١٧\,\text{ص} + ٨\,\text{ص} = ٣٢١ - ٤٠$

وبالاختصار $٢٣\,\text{ص} = ٩٢$

وبالقسمة $\text{ص} = ٤$

وبوضع هذا المقدار في احدى المعادلتين المفروضتين نجد $\text{س} = ٥$ كما تقدم

[illegible]

٧ [illegible]

[illegible]

مثاله

٤ س − ٣ ص = ٨

٥ س + ٢ ص = ٣٣

لحذف س تضرب المعادلة الأولى في ٥ والثانية في ٤ فله

٢٠ س − ١٥ ص = ٤٠

٢٠ س + ٨ ص = ١٣٢

تطرح الأولى من الثانية فتحصل

٨ ص + ١٥ ص = ١٣٢ − ٤٠

وبالاختصار والقسمة ص = ٤

وإن أريد حذف ص ضربت المعادلة الأولى في ٢ والثانية في ٣ ثم جمعتهما

(قاعدة عامة)

(٨) إذا كانت المعادلات عددها ن يحذف أحد المجاهيل من الأولى مع كل واحدة من الأخرى فتبقى معادلات عددها ن − ١ ثم يحذف مجهول ثانٍ من إحداها مع كل من الأخرى فتبقى معادلات عددها ن − ٢ وهكذا إلى أن تؤول إلى معادلة ذات مجهول واحد فيستخرج منها مقداره فيوضع في إحدى المعادلتين المحتويتين على ذلك المجهول ومجهول آخر فيعلم المجهول الثاني ثم يوضع مقدار هذين المجهولين في المعادلات المحتوية عليهما وعلى مجهول ثالث فيعلم المجهول الثالث وهكذا إلى أن تعين كل المجاهيل

مفروض مثلاً المعادلات الثلاث

س + ص + ط = ٦

٢ س − ص + ط = ٣

س + ٢ ص − ط = ٢

فنطرح الثانية من الاولى فيحصل

− س + ٢ ص = ٣

ثم نجمع الاولى والثالثة فيحصل

٢ س + ٣ ص = ٨

حل هاتين المعادلتين نجد س = ١ و ص = ٢ وبالتعويض في احدى المعادلات المفروضة نجد ط = ٣

(تنبيه) قد فرضنا في الامثلة السابقة ان جميع المجاهيل داخلة في كل المعادلات فلا فرق في العمل ان كان الامر بخلاف ذلك غير انه يلزم لاجل ان الحاسب يميز الطريقة للتوصل الى المطلوب باكثر سرعة مثال ذلك

(١) س + ص = ٦

(٢) − س + ط = ٤

(٣) س + ص + ط = ١٢

فبطرح (١) من (٣) نجد ط = ٦ وبوضع هذا المقدار في (٢) س = ٢ وبالتعويض في (١) ص = ٤

(مسائل محلولة)

(الاول) ما العدد اللازم ضمه الى ٨ ليكون المجموع ١٤

نرمز بالحرف س للعدد المجهول فاذا ضممناه الى ٨ هكذا س + ٨ ينبغي ان هذا المجموع يعادل ١٤ فاذاً المعادلة

س + ٨ = ١٤ ومنها س = ٦ وهو الجواب

(الثانية)

[illegible]

[illegible]

[illegible] ٤٠

[illegible] ٩ [illegible]

[illegible] ٩ [illegible]

[illegible] ٣ [illegible] ٢٧

[illegible] ٧

[illegible] ١٠٠ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] ١٠٠ [illegible] ١٠ [illegible]

[illegible] ١٠٠ [illegible] العددين تكونان

[illegible] المعادلة

[illegible] ١ [illegible] ١٠٠

[illegible] المعادلة الاخرى

[illegible] ١٠٠ [illegible] ٣ [illegible] ١٠٠

[illegible] ٥٠٠ [illegible] و [illegible] ٧٠٠ [illegible]

[illegible] من المقادير المتبادر

[illegible]

[illegible]

[illegible] الثالث

فانه يدل على ان المسألة [illegible] معادلة [illegible] الرابع يدل [illegible]

[illegible] الحل [illegible] على شروط

[illegible] من الحاصل

(مسائل منثورة)

(١) مجموع ربع ما عندى وخمسه يعادل فرنكين وربع فرنك فكم عندى

(الجواب) ٥ فرنكات

(٢) اقسم ٢٣٧ فرنك ما بين زيد وعمرو بحيث يكون نصيب الاول ربع نصيب الآخر

(الجواب) ٤٧٫٤ و ١٨٩٫٦

(٣) ما العددان اللذان مجموعهما ٧٠ وفاضلهما ١٦

(الجواب) ٤٣ و ٢٧

(٤) رجل اشترى من البرتقال والليمون باثنين وعشرين قرشا بسعر كل أربع برتقالات بقرش واحد وكل خمس ليمونات بقرش أيضا ثم باع نصف البرتقال وثلث الليمون بسعر ما اشترى به فبلغ الثمن ١٣ قرشا فكم اشترى من كل صنف

(الجواب) ٤٠ برتقالة و ٦٠ ليمونة

(الباب الخامس)

(فى التجذير)

(١) قد ذكرنا فى الباب الثانى انه لتجذير الكميات البسيطة يجب تجذير مكررها ثم تنصيف أسس الحروف الداخلة فيها نحو

$$\sqrt{٤٩\,ح^{٤}\,د^{٢}\,هـ^{٦}} = \pm\, ٩\,ح^{٢}\,د\,هـ^{٣}$$

فاذا كان المكرر ليس بمربع تام أو ان كان أحد الاسس عددا فرديا كان التجذير مستحيلا ففى هذه الحالة يلزم اخراج الحروف ذات الاسس الزوجية وابقاء الاخرى تحت العلامة مثاله

$$\sqrt{١٦\,ح^{٣}\,د^{٢}} = \pm\, ٤\,ح\,د\,\sqrt{ح}$$

مثال آخر

$$\sqrt{\text{١٣ ح}^{٢}\text{ د}} = \pm \text{ ح} \sqrt{\text{١٣ د}}$$

وينتج من ذلك أنه إذا كان جذر [illegible] العلامة بعدد [illegible] أمثال

$$\sqrt[٣]{\text{ح}^{٣}\text{ هـ}} = \text{ح} \sqrt[٣]{\text{هـ}}$$

وينتج أيضا مما قلناه في الباب المذكور أن [illegible] مربع الكمية الأولى + مربع الثانية + [illegible] ضرب الاثنين على حسب [illegible] الكمية الثانية [illegible] أو ا — ب

(تنبيه) الطريقة التي تستعمل في حساب لاستخراج [illegible] مبنية على هذه القاعدة

(تمرينات)

$$\sqrt{\text{١٢١ ح}^{٨}\text{ د}^{٤}\text{ هـ}^{٢}} = \pm \text{ ١١ ح}^{٤}\text{ د}^{٢}\text{ هـ}$$

$$\frac{١}{٢}\sqrt{\frac{[illegible]}{٤٩}\text{ ح}^{٢}\text{ د}^{[illegible]}} = [illegible]$$

$$\sqrt{\text{٩ ح}^{٢م}\text{ د}^{[illegible]}} = \pm \text{ ٣ ح}^{م}\text{ د}^{[illegible]}$$

(في حل المعادلات ذات الدرجة الثانية)

(٢) المعادلات ذات الدرجة الثانية [illegible]
٢ [illegible] معادلة [illegible] ومعادلة [illegible]

المجهول بدرجة ثانية فقط نحو $س^{٢} - ٩$ [illegible] المحتوية على

المجهول بدرجة أولى وثانية نحو $س^{٢} - ٢ س - ٢ = ٠$

[illegible]

(٣) لتكن المعادلة $\text{س}^{٢} = \text{ح}$ فالحل بجذر طرفيها يجد أن $\text{س} = \pm\sqrt{\text{ح}}$ أعني أن المعادلة المفروضة لها جذران هما $\text{س} = +\sqrt{\text{ح}}$ و $\text{س} = -\sqrt{\text{ح}}$ ويسميان جوابي المعادلة

(تطبيق) ما العدد الذي إذا أضيف إليه ١٥ وطرح منها فكان حاصل ضرب الناتجين ٣٠٠

لتكن س العدد المجهول فبحسب المطلوب

$$(\text{١٥} + \text{س})(\text{١٥} - \text{س}) = \text{٣٠٠}$$

فبالضرب $\text{٢٢٥} - \text{س}^{٢} = \text{٣٠٠}$

وبتغيير العلامات وبالمقابلة $\text{س}^{٢} = \text{٢٥}$

وبالتجذير $\text{س} = \pm \text{٥}$ وهو الجواب

(في المعادلة الممتزجة)

(٤) كل معادلة ممتزجة من الدرجة الثانية يمكن تحويلها إلى هذه الصورة

$$\text{ب}\,\text{س}^{٢} + \text{ح}\,\text{س} + \text{ء} = ٠$$

المفروض فيها أن ب و ح و ء كميات موجبة أو سالبة فإذا قسمنا الطرفين على ب يخرج

$$\text{س}^{٢} + \frac{\text{ح}}{\text{ب}}\,\text{س} + \frac{\text{ء}}{\text{ب}} = ٠$$

لنضع للاختصار $\frac{\text{ح}}{\text{ب}} = \text{ط}$ و $\frac{\text{ء}}{\text{ب}} = \text{ع}$ فتصير

$$\text{س}^{٢} + \text{ط}\,\text{س} + \text{ع} = ٠$$

$$\text{س}^{٢} + \text{ط}\,\text{س} = -\,\text{ع}$$

وبإضافة الكمية $\left(\frac{\text{ط}}{٢}\right)^{٢}$ إلى الطرفين لإتمام التربيع في الطرف

او ينتج منه

$$س^2 + ط\,س + \left(\frac{ط}{2}\right)^2 = \left(\frac{ط}{2}\right)^2 - ع$$

او

$$\left(س + \frac{ط}{2}\right)^2 = \frac{ط^2}{4} - ع$$

وبالجذر

$$س + \frac{ط}{2} = \pm \sqrt{\frac{ط^2}{4} - ع}$$

والحاصل

$$س = -\frac{ط}{2} \pm \sqrt{\frac{ط^2}{4} - ع} \qquad (١)$$

وهو القانون المستعمل لحل المعادلات ذات الدرجة الثانية ذات مجهول واحد

(تنبيه) الحل السابق ثلاث حالات اما ان يكون

$$\frac{ط^2}{4} > ع \quad او \quad \frac{ط^2}{4} = ع \quad او \quad \frac{ط^2}{4} < ع$$

في الحالة الاولى تكون الكمية موجبة وفي المعادلة جوابان موجبان مختلفان وفي الثانية تكون الكمية المذكورة صفرا وللمعادلة جواب واحد وفي الحالة الثالثة فالكمية $\frac{ط^2}{4} - ع$ سالبة وحيث ان الكميات السالبة لا جذر لها فجوابا المعادلة يكونان تخيليين اذ لا وجود لهما

(تطبيق) لتكن المعادلة المفروضة هنا

$$س^2 - ٣\,س + ٢ = ٠$$

فحلها بجعل في القانون (١) ط $= -٣$ و ع $= ٢$ فنجد

$$س = \frac{٣}{٢} \pm \sqrt{\frac{٩}{٤} - ٢}$$

ومنها

$$س = \frac{٣}{٢} \pm \frac{١}{٢}$$

وبأخذ العلامة العليا يكون احد الجوابين $س = ٢$ وبأخذ العلامة السفلى يكون الجواب الآخر $س = ١$

(مسائل محلولة)

(الاولى) ما العدد الذي اذا ضرب نصفه في ثلثه يحصل ٨٦٤

ليكن س المجهول فلنا المعادلة

$$\frac{س}{٢} \times \frac{س}{٣} = ٨٦٤$$

فبالضرب والجبر $س^{٢} = ٥١٨٤$

وبالتجذير $س = \pm ٧٢$

(الثانية) ما العدد الذى اذا أضيف الى جذره التربيعى يكون المجموع ٦٠٠

لنرمز بالحرف س للمجهول فلنا

$$س + \sqrt{س} = ٦٠٠$$

فلاجل حل هذه المعادلة يجب حذف علامة الجذر ولذا نقابل بالعدد س فتصير

$$\sqrt{س} = ٦٠٠ - س$$

ثم نرقى الطرفين الى القوة الثانية فيحصل

$$س = ٣٦٠٠٠٠ - ١٢٠٠ س + س^{٢}$$

وبالمقابلة $س^{٢} - ١٢٠١ س + ٣٦٠٠٠٠ = ٠$

وبجعل ط $= -١٢٠١$ و ع $= ٣٦٠٠٠٠$ فى القانون (١) يحدث

$$س = \frac{١٢٠١}{٢} \pm \sqrt{\frac{١٢٠١^{٢}}{٤} - ٣٦٠٠٠٠} = \frac{١٢٠١}{٢} \pm \frac{٤٩}{٢}$$

ومنها $س' = ٥٧٦$ و $س'' = ٦٢٥$ فالجواب ٥٧٦ لانا اذا اضفنا اليه جذره وهو ٢٤ يحصل ٦٠٠

(تنبيه) العدد ٦٢٥ جواب أيضا لان $س + \sqrt{س}$ معناه فى علم الجبر $س + (\pm \sqrt{س})$ فاذا طرحت من ٦٢٥ جذره وهو ٢٥ يحصل أيضا ٦٠٠

(الثالثة) ما عددان مجموعهما ح وحاصل ضربهما د

لنا $س + ص = ح$

$$س ص = د$$

فاذا أخذ من الأولى

$$\text{ص} = \text{ح} - \text{س}$$

ووضع هذا المقدار في الثانية فتصير

$$\text{س}^{٢} - \text{ح}\,\text{س} + \text{د} = ٠$$

ومنها

$$\text{س} = \frac{\text{ح} + \sqrt{\text{ح}^{٢} - ٤\,\text{د}}}{٢}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{ح} - \sqrt{\text{ح}^{٢} - ٤\,\text{د}}}{٢}$$

(مسائل منثورة)

(١) ما العدد الذى ثلث الحاصل من ضرب ثمنه فى سبعه $\frac{٣}{٤}$ ٢٩٨

(الجواب) ٢٢٤

(٢) ما العدد الذى اذا طرح منه نصف جزره يكون الفاضل $\frac{١}{٢}$ ٦

(الجواب) ٩

(٣) سئل رجل عن عمره فقال حين ولادتى كان عمر أبى ٢٠ سنة والآن مجموع عمرينا أقل من حاصل ضربهما بعدد سنين ٢٥٠٠ فما عمره

(الجواب) ٤٢ سنة

(الباب السادس)

(فى المتواليات)

(١) المتواليات نوعان فاضلية وقسمية أما الفاضلية فهى ما تكونت من حدود متعددة بحيث الفاضل بين كل حدين متواليين لا يتغير ويسمى هذا الفاضل أساسها ومثالها هذه الاعداد

٢ و ٤ و ٦ و ٨ و ١٠ و ١٢

فتتركب منها متوالية فاضلية أساسها ٢ وتكتب كذا

÷ ٢ . ٤ . ٦ . ٨ . ١٠ . ١٢

إذا كان الاساس موجبا كما فى مثالنا تسمى المتوالية تصاعدية وان كان سالبا سمى تنازلية كهذه

÷ ١٢ . ١٠ . ٨ . ٦ . ٤ . ٢

لان أساسها ــ ٢

أما المتوالية القسمية فهى ما تكونت من حدود بحيث اذا قسم كل منها على الذى قبله يكون الخارج عددا واحدا وهذا الخارج يسمى أساسها ومثالها هذه الاعداد

١ , ٣ , ٩ , ٢٧ , ٨١ , ١٣٢

تتركب منها متوالية قسمية أساسها ٣ وتكتب كذا

÷÷ ١ : ٣ : ٩ : ٢٧ : ٨١ : ٢١٣

فاذا كان الاساس أكبر من الواحد تسمى المتوالية تصاعدية كما فى مثالنا وان كان أصغر منه سميت تنازلية كهذه

÷÷ ٢١٣ : ٨١ : ٢٧ : ٩ : ٣ : ١

(فى المتوالية الفاضلية)

(٢) لنفرض المتوالية

÷ ب . حـ . د . هـ ...... الخ ...... ل . م

التى عدد حدودها ن وأساسها س فلنا بمقتضى التعريف السابق

حـ = ب + س , د = حـ + س , هـ = د + س

, ... , م = ل + س

فبوضع مقدار حـ فى المعادلة الثانية يحدث د = ب + ٢ س

وبوضع هذا المقدار فى الثالثة تصير هـ = ب + ٣ س فيرى بالقياس

ان أى حد يعادل الحد الاول مضافاً اليه حاصل ضرب عدد الحدود اسابقة فى الاساس فاذ يكون الحد الاخير

م = ب + (ن − ١) س (١)

فاذا علمت ثلاث من الكميات م و ب و ن و س امكن استخراج الرابعة بحل هذه المعادلة بالنسبة اليها مثال ذلك

ما عدد حدود المتوالية التفاضلية التى اساسها ٣ وحدها الاول ٢ والاخير ٢٣

فنضع هذه المقادير فى المعادلة (١) فيحدث

٢٣ = ٢ + (ن − ١) ٣

ومنها ن = ٨

وفى الحقيقة المتوالية هى

÷ ٢ . ٥ . ٨ . ١١ . ١٤ . ١٧ . ٢٠ . ٢٣

ويعلم من القانون (١) ان مجموع كل حدين كائنين على بعد واحد من الطرفين (١) يعادل مجموع هذين الطرفين فى المتوالية مثلا

÷ ب . ح . ء . هـ . . . . ن . ع

فلما ح = ب + س و ع = ن + س

ومن هذه ن = ع − س وبجمعهما الى الاولى يحصل

ح + ن = ب + ع

وقس على ذلك

والبحث الان عن مجموع الحدود المتوالية التفاضلية ونرمز له لاجل الاختصار

ع = ب + ح + ... + ل + م

أو كما هو ظاهر ع = م + ل + ... + ح + ب

(١) نعنى بالطرفين الحد الاول والحد الاخير

ثم نجمع هاتين المعادلتين فيحصل

$$٢\,ج = (ب + م) + (ح + ل) + \cdots + (ل + ح) + (م + ب)$$

وبما تقدم كل من هذه الكميات الثنائية تعادل مجموع الطرفين ب + م

فاذا كان عدد الحدود ن تصير هذه المعادلة

$$٢\,ج = (ب + م)\,ن$$

وبالقسمة

$$ج = (ب + م)\,\frac{ن}{٢}$$ (٢) وهو المطلوب

لنبحث مثلا عن مجموع حدود المتوالية المذكورة فى المثال السابق فنجعل فى القانون (٢)

$$ب = ٢ \text{ و } م = ٢٣ \text{ و } ن = ٨$$

فنجد ٢ + ٥ + ٨ + ١١ + ١٤ + ١٧ + ٢٠ + ٢٣ = ج = ١٠٠

(فى المتوالية القسمية)

(٣) لنفرض المتوالية القسمية

$$\because ب : ح : د : هـ : \cdots : ل : م$$

التى عدد حدودها ن وأساسها س فينتج من التعريف ان

$$ح = ب\,س \text{ و } د = ح\,س \text{ ، } هـ = د\,س \cdots\cdots \text{ و } م = ل\,س$$

فبوضع مقدار ح فى المعادلة الثانية تصير $د = ب\,س^{٢}$ وبوضع هذا المقدار فى الثالثة يحدث $هـ = ب\,س^{٣}$ فيرى بالقياس ان أى حد يعادل الحد الاول مضروبا فى الاساس المرفوع لدرجة مساوية لعدد الحدود السابقة له فالحد الاخير يكون حينئذ

$$م = ب\,س^{ن-١}$$

فينتج من ذلك انه يمكن وضع المتوالية المفروضة على هذه الصورة

$$\therefore ب : ب س : ب س^{٢} : \cdots\cdots : ب س^{ن-٢} : ب س^{ن-١}$$

ويتضح من هنا ان حاصل ضرب كل حدين كائنين على بعدين متساويين من الطرفين هو كحاصل ضرب هذين الطرفين مثاله

$$ب س \times ب س^{ن-٢} = ب \times ب س^{ن-١} .$$

ولنبحث عن مجموع الحدود فنجعل

$$ج = ب + ب س + ب س^{٢} + \cdots + ب س^{ن-٢} + ب س^{ن-٢}$$

فاذا ضربنا الطرفين في الاساس س لنا

$$ج س = ب س + ب س^{٢} + ب س^{٣} + \cdots + ب س^{ن-١} + ب س^{ن}$$

وبطرح الاولى من الثانية يفضل بعد مجموع الحدود المتشابهة

$$ج س - ج = ب س^{ن} - ب$$

ومنها $$ج = \frac{ب س^{ن} - ب}{س - ١}$$

وبوضع م عوضا عن $ب س^{ن}$ لنا

$$ج = \frac{م س - ب}{س - ١}$$ وهو المطلوب

لنبحث مثلا عن مجموع حدود المتوالية

$$\therefore ١ : ٣ : ٩ .. ٢٧ : ٨١ : ٢١٣$$

فنجعل في القانون الاخير $ب = ١$ و $م = ٢١$ و $س = ٣$ فنجد

$$ج = ٣١٩$$

(تمرينات)

(١) ما الحد الخامس عشر من المتوالية الفاضلية

∵ ٢ . ٦ . ١٢ ....

(الجواب) ٧٢

(٢) ما الحد الثاني والاربعين من المتوالية

∵ = — ١٢ $\frac{١}{٢}$ — ١٠ . — ٧ $\frac{١}{٢}$ ......

وما مجموع خمسين من حدودها

(الجواب) ٩٠ و ج = ٢٤٣٧ $\frac{١}{٢}$

(٣) ما عدد حدود المتوالية التي طرفها الاول ٢ $\frac{١}{٢}$ وأساسها $\frac{١}{٢}$ ومجموع حدودها ١٩٠٠

(الجواب) ١٠٠

(٤) متوالية قسمية عدد حدودها ١٠ وحاصل ضرب الطرفين ١٢٥ والحد الخامس يعادل الاساس فما هي

(الجواب) ∵ $\frac{١}{١٢٥}$: $\frac{١}{٢٥}$: $\frac{١}{٥}$: ١ : ٥ : ٢٥ : ١٢٥ : ٣٢٥ : ٣١٢٥ : ١٥٣٢٦

تم علم الجبر ويليه علم الهندسة