Функцыг интерполяцлах

$f(x)$ функцын $x_0, x_1, \ldots, x_n$ цэгүүд дээрх утгууд $f_i = f(x_i)$, $i = \overline{0;n}$ өгөгдсөн байг. Ө.х $(x_i; f_i)$, $i = \overline{0;n}$ цэгүүд өгөгдсөн байг. Эдгээр цэгүүдийг дайрсан ямар нэг функцыг олохыг интерполяцлах гэдэг.

Интерполяцын функцыг $\varphi(x)$ гэвэл $\varphi(x_i) = f_i$, $i = \overline{0;n}$ байна. Интерполяцын функцыг янз бүрийн хэлбэрээр авч болох бөгөөд энд зөвхөн олон гишүүнт байх тохиолдлыг авч үзэх болно.

Лагранжын интерполяцын томъёо

$L_n(x_i) = f_i$, $i = \overline{0;n}$ нөхцлийг хангах *n* зэргийн олон гишүүнт $L_n(x)$–ийг дараах Лагранжын томъёогоор бичиж болно:

$$L_n(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ \ldots\ \cdot(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot\ \ldots\ \cdot(x_0-x_n)}\cdot f_0 +$$
$$+\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot\ \ldots\ \cdot(x-x_n)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot\ \ldots\ \cdot(x_1-x_n)}\cdot f_1 +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ \ldots\ \cdot(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\cdot(x_n-x_1)\cdot\ \ldots\ \cdot(x_n-x_{n-1})}\cdot f_n$$

Үүнийг хураангуй бичвэл: $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod_{j=0;\, j\neq i}^{n} (x-x_j)}{\prod_{j=0;\, j\neq i}^{n} (x_i-x_j)}\cdot f_i$

Жишээ1. Таблицад өгөгдсөн $(x_i; f_i)$, $i = \overline{0;3}$ цэгүүдийн хувьд Лагранжын интерполяцын олон гишүүнт бич.

x_i	1	2	3	5
f_i	1.5	3.4	5.3	4.8

◂ Лагранжын томьёо ёсоор:

$$L_3(x)=\frac{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-5)}{(1-2)\cdot(1-3)\cdot(1-5)}\cdot 1.5+\frac{(x-1)\cdot(x-3)\cdot\cdot(x-5)}{(2-1)\cdot(2-3)\cdot(2-5)}\cdot 3.4+$$

$$+\frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-5)}{(3-1)\cdot(3-2)\cdot(3-5)}\cdot 5.3+\frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot\cdot(x-3)}{(5-1)\cdot(5-2)\cdot(5-3)}\cdot 4.8$$

буюу

$$L_3(x)=-0.17916667x^3+1.075x^2-0.0708333x+0.675$$

Ньютоны интерполяцын томъёо

Уг томъёог бичихийн өмнө ялгаварт харьцааг авч үзэх шаардлагатай. $f(x)$ функцын x_k цэгүүд дээрх утга өгөгдсөн байг. ($k=1;2;.....$)

$$f(x_i,x_j)=\frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}$$

Үүнийг x_i , x_j цэгүүд дээрх 1-р эрэмбийн ялгаварт харъцаа гэнэ.

x_i , x_j , x_k гэсэн гурван цэгийн хувьд:

$$f(x_i,x_j,x_k)=\frac{f(x_j,x_k)-f(x_i,x_j)}{x_k-x_i}.$$ - ийг

2-р эрэмбийн ялгаварт харьцаа гэнэ.(2-р эрэмбийн ялгаварт харьцаа нь 1-р эрэмбийн ялгаварт харьцаагаар илэрхийлэгдэж байна.)
Гэх мэтчилэн *k+1*-р эрэмбийн ялгаварт харьцааг тодорхойлбол:

$$f(x_{i1},x_{i2},\ .\ .\ .\ x_{ik+1})=\frac{f(x_{i2},x_{ik+1})-f(x_{i1},x_{ik})}{x_{ik+1}-x_{i1}}$$

$(x_i;f_i)$, $i=\overline{0;n}$ цэгүүдийг дайрсан Ньютоны интерполяцын олон гишүүнт дараах томъёогоор бичигддэг:

$$P_n(x)=f(x_0)+f(x_0,x_1)\cdot(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)\cdot(x-x_0)(x-x_1)+\ .\ .\ .$$
$$.\ .\ .\ +f(x_0,x_1,\ldots,x_n)\cdot(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

$P_n(x)$ Ньютоны интерполяцын олон гишүүн нь *n* зэргийн олон гишүүнт байна.Өгөгдсөн $(x_i;f_i)$, $i=\overline{0;n}$ цэгүүдийг дайрсан *n* зэргийн олон гишүүнт зөвхөн ганц байдаг.Иймд эдгээр цэгүүдийг дайрсан Лагранжын ба Ньютоны интерполяцын олон гишүүнтүүд тэнцүү.

Жишээ2. $(x_i; f_i)$, $i=\overline{0;3}$ цэгүүд таблицад өгөгдөв.

x_i	2	3	5	6
f_i	10	12	17	15

Ньютоны интерполяцын олон гишүүнт бич.

◄ Юуны өмнө дараах ялгаварт харьцаануудыг бодох шаардлагатай.

1-р эрэмбийн харьцаанууд:

$$f(2;3)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{12-10}{3-2}=2$$

$$f(3;5)=\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=\frac{17-12}{2}=2.5$$

$$f(5;6)=\frac{f(6)-f(5)}{6-5}=\frac{15-17}{1}=-2$$

2-р эрэмбийн харьцаанууд:

$$f(2;3;5)=\frac{f(3;5)-f(2;3)}{5-2}=\frac{2.5-2}{3}=\frac{1}{6}$$

$$f(3;5;6)=\frac{f(5;6)-f(3;5)}{6-3}=\frac{-2-2.5}{3}=-\frac{3}{2}$$

3-р эрэмбийн харьцаа:

$$f(2;3;5;6)=\frac{f(3;5;6;)-f(2;3;5)}{6-2}=\frac{-3/2-1/6}{4}=-\frac{5}{12}$$

Ньютоны интерполяцын олон гишүүнт бичвэл:

$$P_3(x)=f(2)+f(2;3)\cdot(x-2)+f(2;3;5)\cdot(x-2)(x-3)+$$
$$+f(2;3;5;6)\cdot(x-2)(x-3)(x-5)=$$
$$=10+2\cdot(x-2)+\frac{1}{6}\cdot(x-2)(x-3)-\frac{5}{12}\cdot(x-2)(x-3)(x-5)$$

буюу $$P_3(x)=-\frac{5}{12}x^3+\frac{13}{3}x^2-\frac{47}{4}x+19.5$$ ►

Тодорхой интеграл ойролцоо бодох

$\int_a^b f(x)dx$ интегралыг ойролцоо бодох зарим томъёог авч үзье.

$[a;b]$ завсрыг *n* хэсэгт жигд хуваая. Хуваалтын алхам $h=\dfrac{b-a}{n}$ болох ба зангилааны цэгүүд $x_i=a+i\cdot h$, $i=\overline{0;n}$ болно.

1. Тэгш өнцөгтийн томъёо:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i - \frac{h}{2}) \qquad (1)$$

Энэ ойролцоо томъёоны алдаа *R* нь дараах тэнцэтгэл бишээр үнэлэгддэг:

$$R \le \frac{h^2 \cdot (b-a)}{24} \cdot M_2 \ , \qquad \text{энд} \quad M_2 = \max_{[a;b]} \left| f^{//}(x) \right|$$

Жишээ1. $\int_1^2 xLnxdx$ интегралыг тэгш өнцөгтийн томъёогоор бод. Алдааг үнэл. (*n*=*5* гэж ав.)

$$a=1, \quad b=2, \quad f(x) = xLnx \ , \quad n=5$$

хуваалтын алхам : $h = \frac{2-1}{5} = 0.2$

зангилааны цэгүүд x_i : *1 ; 1.2 ; 1.4 ; 1.6 ; 1.8 ; 2*

$x_i - \frac{h}{2}$ цэгүүд : *1.1 ; 1.3 ; 1.5 ; 1.7 ; 1.9*

$f(x_i - \frac{h}{2})$ утгууд : *0.104841 ; 0.341073 ; 0.608197 ; 0.902067 ; 1.219520*

(1) томъёо ёсоор : $\int_1^2 xLnxdx \approx$0.2·(*0.104841*+ *0.341073*+ *0.608197*+

+*0.902067*+*1.219520*)=*0.635138*

Одоо интегралын ойролцоо утга *0.635138* –ийн алдаа *R* –ийг үнэлэе. Эхлээд M_2-ийг бодъё.

$$f^{/}(x) = \ln x + 1, \qquad f^{//}(x) = \frac{1}{x}, \qquad M_2 = \max_{[1;2]} \left| \frac{1}{x} \right| = 1$$

$$R \le \frac{0.2^2 \cdot (2-1)}{24} \cdot 1 = 0.0016666.$$

Ө.х ойролцоо утга *0.635138* –ийн алдаа 0.0016666-ээс хэтрэхгүй.