برای مطالعه ی خواص جمله های مثلث کافی هست از تعریف استفاده کنیم

$$\binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad (۱ \cdot ۳)$$

$$\binom{n+۱}{k} = \binom{n}{k-۱} + \binom{n}{k}, \qquad (۲ \cdot ۳)$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{۰}a^n + \binom{n}{۱}a^{n-۱}b + \cdots + \binom{n}{n}b^n. \qquad (۳ \cdot ۳)$$

دنباله های ویژه در داخل مثلث پاسکال:

دنباته *توان ۲:دنباله توان ۲ به صورت زیر می باشد.*

$$۲^۰ = ۱,\ ۲^۱ = ۲,\ ۲^۲ = ۴,\ ۲^۳ = ۸,\ ۲^۴ = ۱۶, \ldots$$

الگوی جالبی در داخل مثلث پاسکال برای محاسبه توان ۲ وجود دارد:

$$\begin{aligned}
2^0 &= 1\\
2^1 &= 1+1 = 2\\
2^2 &= 1+2+1 = 4\\
2^3 &= 1+3+3+1 = 8\\
2^4 &= 1+4+6+4+1 = 16\\
&\vdots
\end{aligned}$$

جمع عناصر هر سطر به ترتیب توان ۲ ایجاد میکند

با توجه به رابطه (۳,۳)اگر

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} \qquad (n \geq 0)$$

اگر a=1وb=-1به رابطه ی زیر میرسیم

$$0^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} \qquad (n \geq 0)$$

در رابطه اخیر اگر n=0قرارداد $0^0=1$

با مشتق گیری از طرفین از طرفین رابطه ی (۳,۳)برای a=xوb=1داریم

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \cdots + r\binom{n}{r}x^{r-1} + \cdots + nx^{n-1}$$

حال اگر x=1یا x=-1باشد

$$\sum_{r=0}^{n} r\binom{n}{r} = n2^{n-1},$$

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r-1} r\binom{n}{r} = 0.$$

با مشتق گرفتن از مراتب بالاتر از رابطه ی (۴,۳)به روابط دیگری دست می یابیم با تعویض عمل مشتق گیری با روابط دیگری به دست می اید.

-دنباله ی توان های عدد ۱۱:

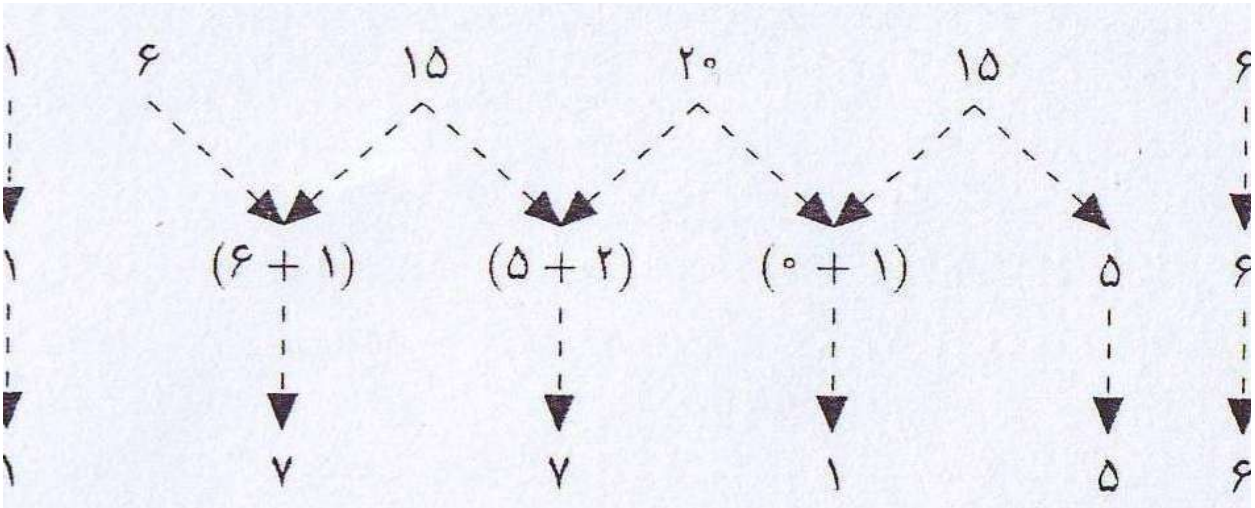
$$11^0 = 1, 11^1 = 11, 11^2 = 121, 11^3 = 1331, 11^4 = 14641, \ldots$$

در حالت کلی اگر جمله های سطر nام مثلث را از راست به چپ از دیدگاه تعداد یکان دهگان ...نگاه‌کنیم وبدین طریق عدد N_nرا $11^{n-1} = (1+10)^{n-1}$ بسازیم طبق اتحاد دو جمله ای خیام عدد N_nتوانی از ۱۱ است.

مثلا:

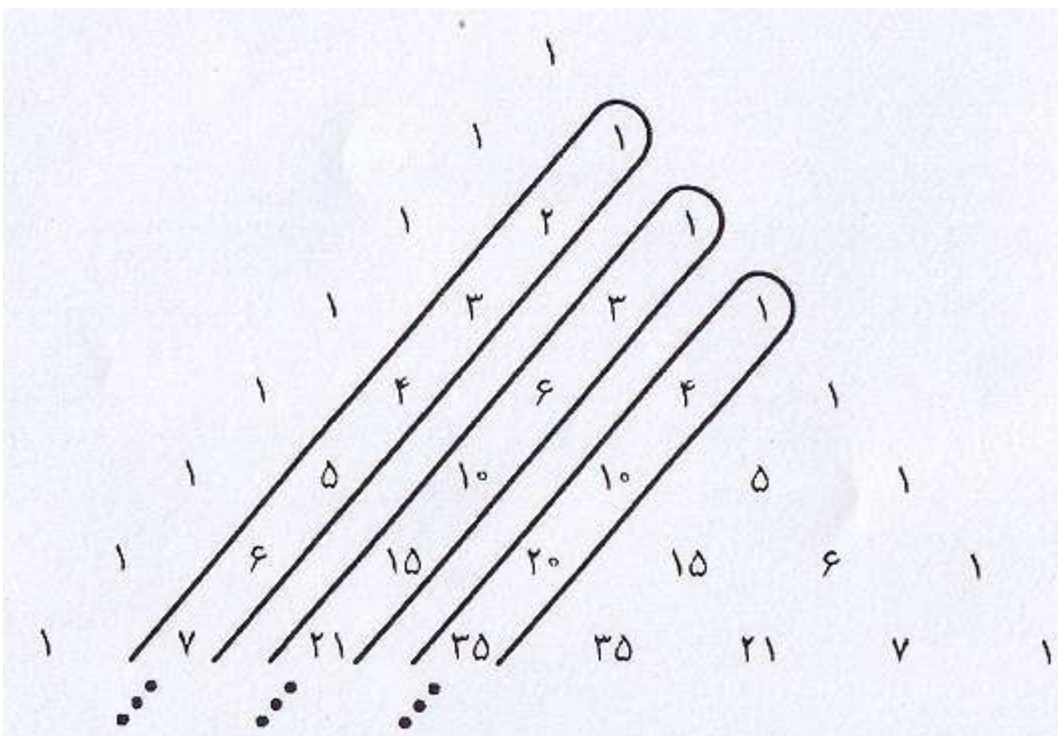
$$\begin{aligned} 11^6 &= 1\times 10^6 + 6\times 10^5 + 15\times 10^4 + 20\times 10^3 + 15\times 10^2 + 6 \\ &= 1000000 + 600000 + 150000 + 20000 + 1500 + 60 + 1 \\ &= 1771561 \end{aligned}$$

در مورد سطر ۷ام دقت کنید .الگوی زیر رعایت شده.



--*دنباله اعداد مصور :*

در مثلث پاسکال قطر از اعداد طبیعی ,قطر ۲ از اعداد مثلثی وقطر۳ از اعداد ۴وجهی تشکیل شده اند.



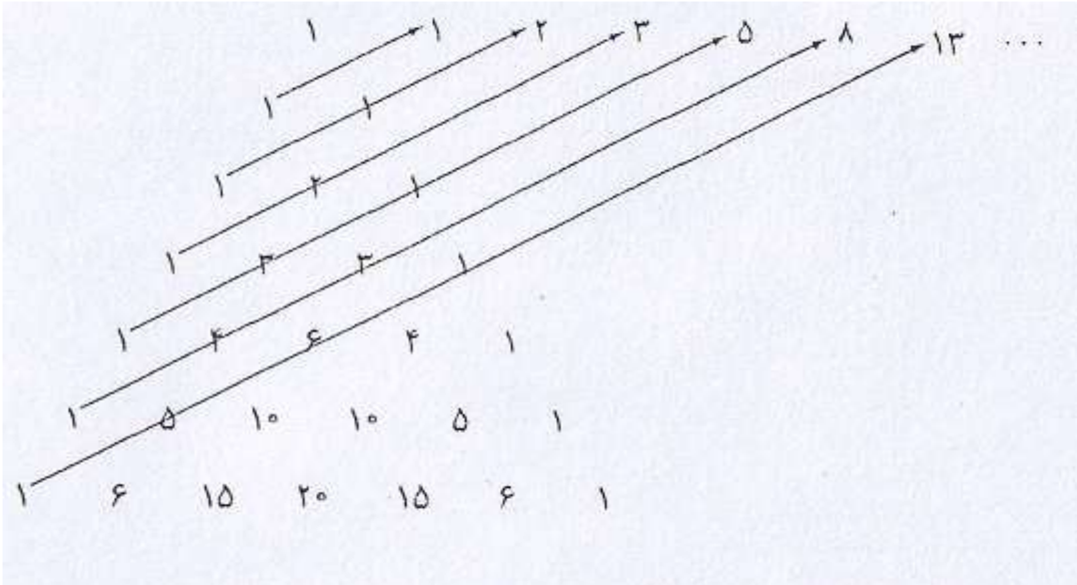
شکل ۳.۳ دنباله‌ی اعداد طبیعی، اعداد مثلثی و اعداد چهار وجهی.

با نگاه به قطرهای مثلث ملاحظه می شود که هر عدد مثلثی مجموع چند عدد طبیعی وهر عدد ۴ وجهی مجموع چند عدد مثلثی است.به طور کلی می توان گفت که قطر kام از اعداد مصور kبعدی تشکیل شده اند که به صورت c(n,k) می باشد.در ضمن داریم:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-۱}{k-۱} + \binom{n-۲}{k-۱} + \cdots + \binom{k-۱}{k-۱}$$

--دنباله فیبوناچی:

اگر قطرها را با شیب بیشتر انتخاب کنیم.داریم:



شکل ۴.۳ انتهای پیکان‌ها نشانگر دنباله‌ی اعداد فیبوناتچی است.

مجموعه اعداد روی قطر ها دنباله ی :

...و۱۳و۸و۵و۳و۱و۱

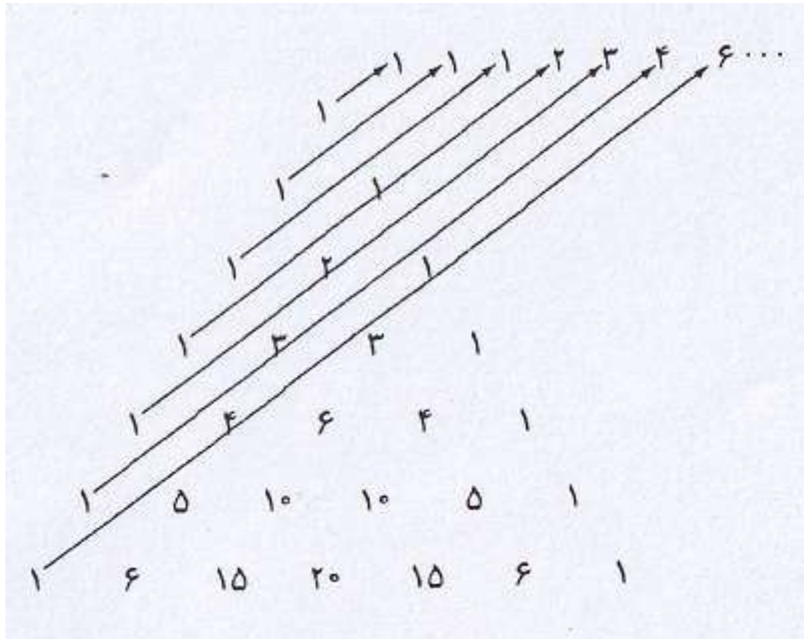
تشکیل می دهد.در این دنباله جمله اول ودوم ۱ است بقیه جملات جمع دو جمله قبلی اش می شوند

$F_1=F_2=1$

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

اثبات این خاصیت به وسیله مثلث به راحتی قابل مشاهده است.

اگرشیب قطر های فیبوناچی را بیشتر کنیم.به تعمیمی از این دنباله دست خواهیم یافت



اگر ان را با G_nنمایش دهیم داریم $G_1=G_2=G_3=1$

$$G_{n+2}=G_{n+1}+G_{n-1}$$

تعمیم های مختلف از دنباله فیبوناچی داریم.

---دنباله c(2n,n):

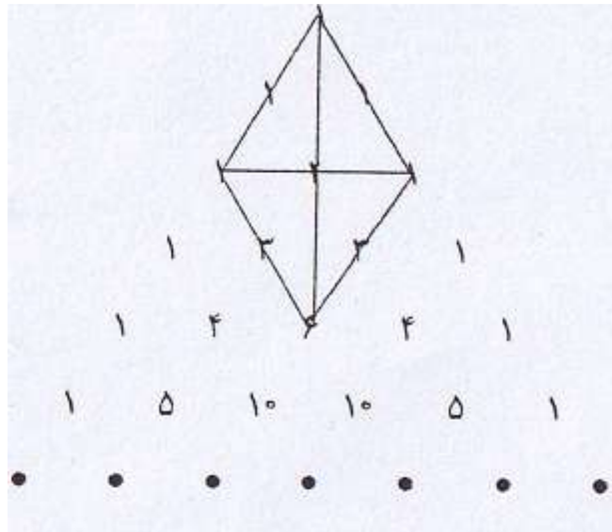
دنباله واقع بر عمود منصف مثلث را به صورت زیر در نظر می گیریم....و۲۵۲و۷۰و۲۰و۶و۲و۱

$$1 = 1^2$$
$$2 = 1^2 + 1^2$$
$$6 = 1^2 + 2^2 + 1^2$$
$$20 = 1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2$$
$$70 = 1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2$$
$$\cdots$$

تعمیم دنباله بالا به صورت زیر است

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 \qquad (n \geq 0)$$

به عبارت دیگر مجموع مربعات جمله های سطر nام برابر است با رآس تحتانی یک لوزی که این لوزی که این سطر یکی از قطرهای ان می باشد.



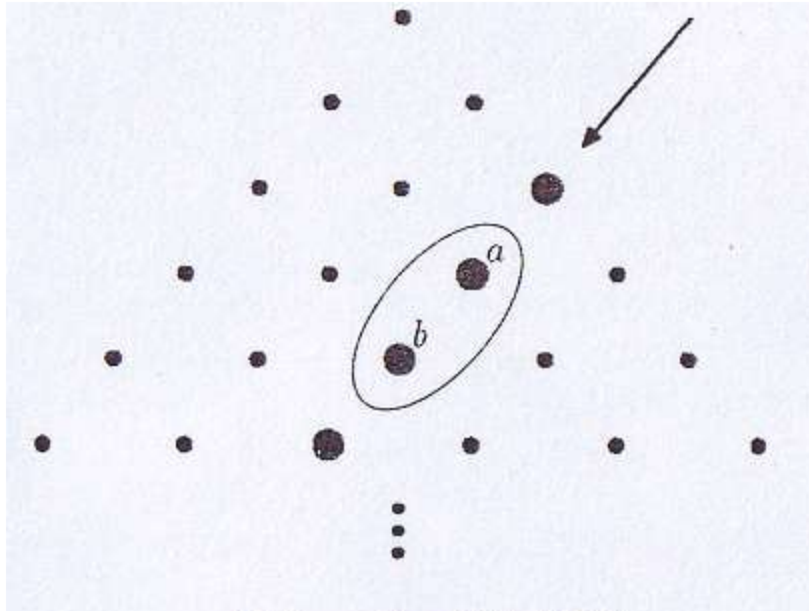
شکل ۷.۳ $\binom{2}{2}^2+\binom{2}{1}^2+\binom{2}{0}^2=\binom{4}{2}$.

--ویژگی هندسی فانگ:

ایا دو عدددر مثلث پاسکال می توان یافت که مجموع یا تفاضلشان مربع کامل باشد؟

عناصر واقع در قطر ۳,اعداد مثلثی هستندو نیز مجموع ۲ عدد مثلثی متوالی یک مربع کامل است.اگر T_nنشان دهنده nامین عدد مثلثی باشد.داریم: $T_n+T_{n+1}=n^2$

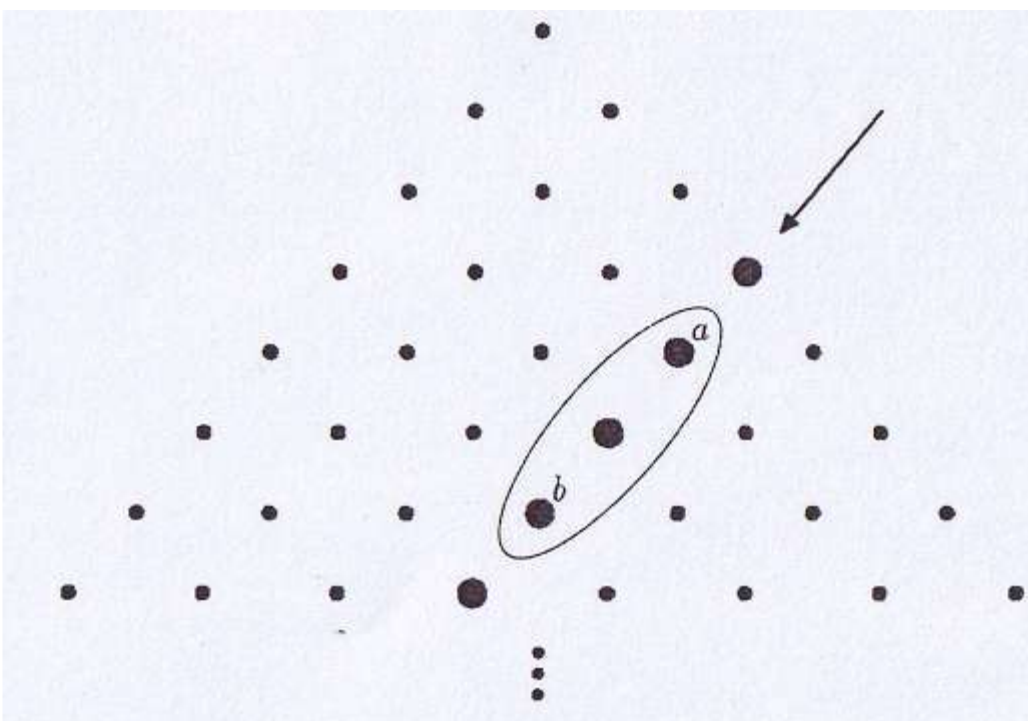
واین نتیجه می دهد.



شکل ۸.۳ $a + b$ یک مربع کامل است.

برای تفریق داریم

$$\binom{n+۲}{۳} - \binom{n}{۳} = n^{۲}.$$

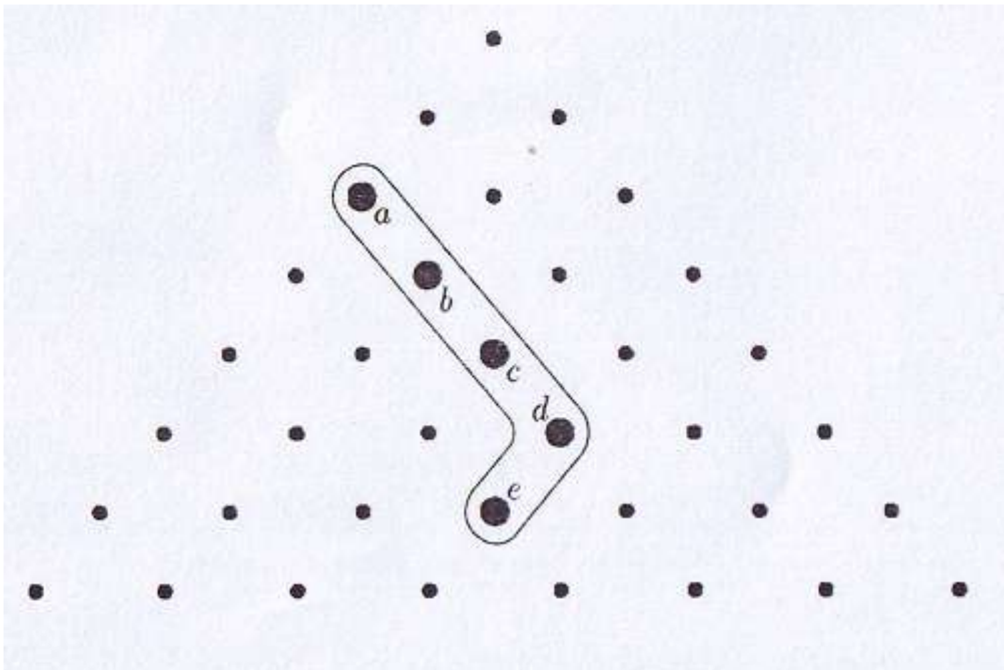


شکل ۹.۳ $a - b$ یک مربع کامل است.

--**ویژگی چوب چوگان:**تساوی زیر را در نظر بگیرید.

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\binom{n+3}{3}=\binom{n+4}{4} \quad (n\geq 0)$$

اگر هر کدام از عناصر دو طرف تساوی را به صورت نقاط هندسی در نظر بگیرید



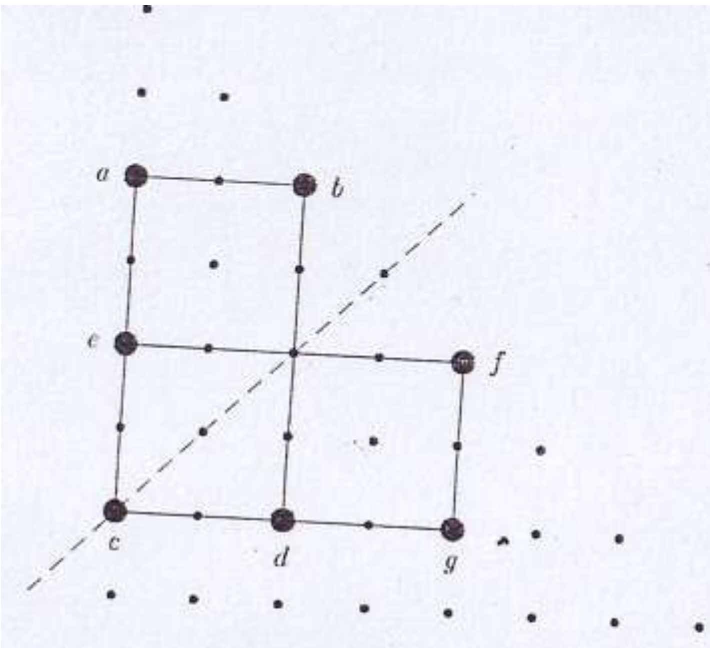
شکل ۱۰.۳ اعداد روی چوب چوگان در تساوی $a+b+c+d=e$ صدق می‌کنند.

اگر طول چوب چوگان را kدر نظر بگیریم(رابطه بالا را تعمیم دهید)

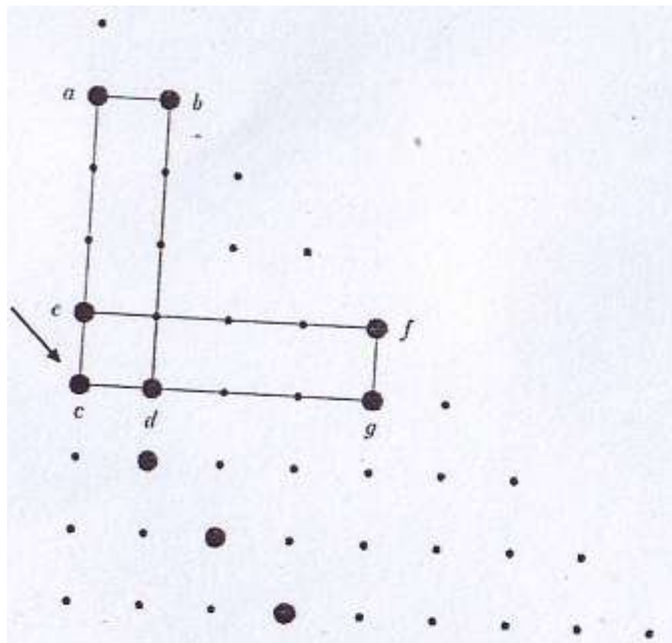
$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k+1} \quad (n,k\geq 0).$$

--**ضرب صلیبی:**در اینجا مستطیل هایی را به صورت قائم الزاویه و افقی در داخل مثلث خیام در نظر می گیریم.رئوس این مستطیل ها که بر روی درایه های این مثلث واقع شده اند در اینجا رابطه ای بر حسب درایه های واقع بر رئوس این مستطیل به دست می اوریم.

نکته جالب این است که با لغزاندن مستطیل به نحوی که نقطه ی cدر طول قطر (در امتداد پیکان)جا به جا شود همواره نسبت (c*b)/(a*d)یک مقدار ثابت خواهد بوذ



شکل ۱۱.۳ $\frac{c\times b}{a\times d} = \frac{c\times f}{e\times g}$.



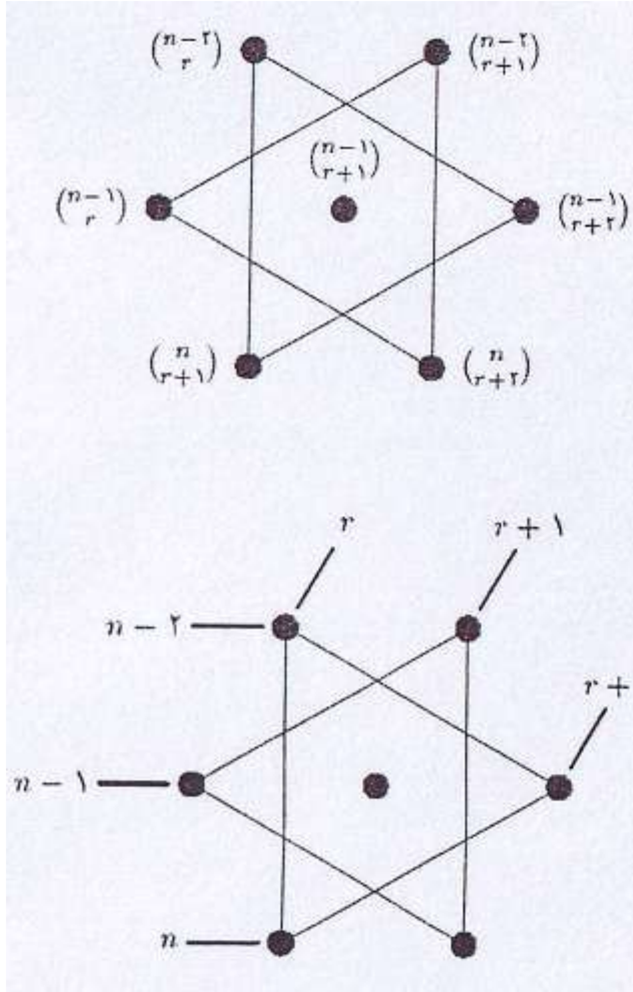
شکل ۱۲.۳ $\frac{c\times b}{a\times d} = \frac{c\times f}{e\times g}$.

--ستاره داوود:

در خاصیت ضرب صلیبی اگر به جای مسطتیل ها یک ستاره به صورت زیر در نظر بگیریم به قسمتی که رئوس ان بر درایه های مثلث خیام قرار گیرند.به تساوی زیر میرسیم.

$$\binom{n-2}{r+1}\binom{n-1}{r}\binom{n}{r+2}=\binom{n-2}{r}\binom{n}{r+1}\binom{n-1}{r+2},$$

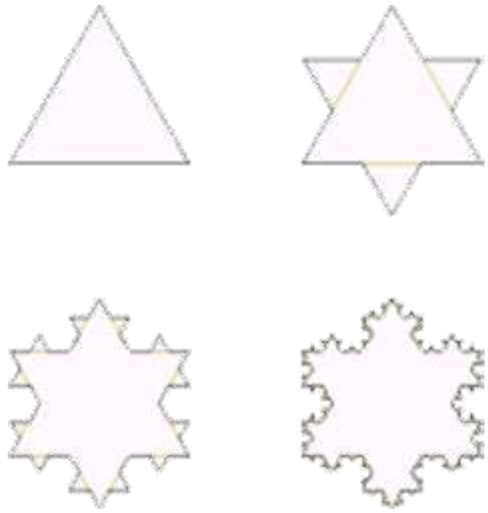
در مرکز این ستاره عنصر $\binom{n-1}{r+1}$ قرار دارد.



شکل ۱۴.۳ ستاره‌ی داوود به مرکز $\binom{n-1}{r+1}$.

حال آیا در مورد «فراکتال»ها (معادل فارسی آن «برخال» است) چیزی شنیده‌اید. در این مورد در کتاب‌های درسی ریاضی‌اتان مطالبی گفته شده است.

در واقع «برخال»ها موجوداتی هندسی‌اند که هرچه آن را از نزدیک نگاه کنیم شبیه شکل نخستین است مانند: «گل کلم». به این اشیا



اصطلاحاً «خودمتشابه» گویند. (به کتاب هندسه ۲ مراجعه کنید.)

ایده‌ی «خود متشابه» در اصل توسط «لایبنیتس» بسط داده شد. او حتی بسیاری از جزئیات را حل کرد. در سال ۱۸۷۲ «کارل وایرشتراس» مثالی از تابعی را پیدا کرد با ویژگی‌های غیربصری که در همه‌جا پیوسته بود ولی در هرجا مشتق‌پذیر نبود. گراف این تابع اکنون «برخال» نامیده می‌شود.

در سال ۱۹۰۴ «هلگه فون کخ» به‌همراه خلاصه‌ای از «تعریف تحلیلی وایرشتراس»، تعریف هندسی‌تری از تابع متشابه ارائه داد که حالا به «برفدانه کخ» معروف است. در سال ۱۹۱۵ «واکلو سرپینسکی» مثلثاش را و سال بعد فرش‌اش (برخالی) را ساخت.

ایده‌ی «منحنی‌های خودمتشابه» توسط «پاول پیر لوی» مطرح شد او در مقاله‌اش در سال ۱۹۳۸ با عنوان «سطح یا منحنی‌های فضایی» و «سطوحی شامل بخش‌های متشابه نسبت به کل» منحنی برخالی جدیدی را توصیف کرد.

منحنی «لوی سی. گئورگ کانتور»مثالی از زیرمجموعه‌های خط حقیقی با ویژگی‌های معمول ارائه داد. این «مجموعه‌های کانتور» اکنون به‌عنوان«برخال» شناخته می‌شوند.

اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم «توابع تکرار شونده در سطح پیچیده» توسط «هانری پوانکاره»،«فلیکس کلاین»، «پیر فاتو» و «گاستون جولیا» شناخته شده بودند. با این وجود بدون کمک گرافیک کامپیوتری آن‌ها نسبت به نمایش زیبایی بسیاری از اشیایی که کشف کرده بودند، فاقد معنی بودند.

در سال ۱۹۶۰ «بنوا مندلبرو» تحقیقاتی را در شناخت خودمتشابه‌ای طی مقاله‌ای با عنوان «طول ساحل بریتانیا چقدر است؟ خود متشابه‌ای آماری و بعد کسری» آغاز کرد. این کارها براساس کارهای پیشین «ریچاردسون» استوار بود.

در سال ۱۹۷۵ «مندلبروت» جهت مشخص کردن شیئی که بعد «هاوسدورف بیسکویچ» آن بزرگ‌تر از بعد توپولوژیک است کلمه‌ی «برخال» را ایجاد کرد. او این تعریف ریاضی را از طریق شبیه‌سازی خاص کامپیوتری تشریح کرد.

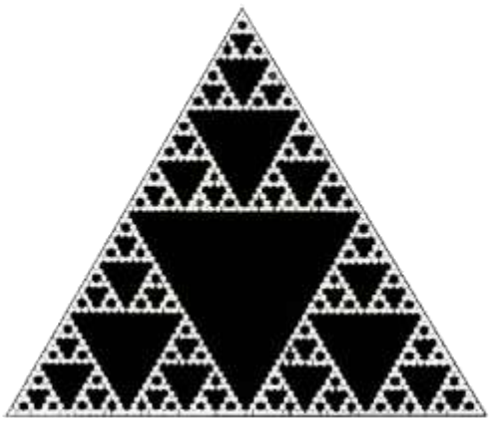
---مثلث خیام – پاسکال ومثلث سرپینسکی

حال با این توضیح مختصر در مورد برخال‌ها برمی‌گردیم به «مثلث خیام – پاسکال».

در مورد این مثلث زیاد شنیده‌ایم از جمله در مورد کاربرد فراوانش در نظریه‌ی اعداد و ترکیبیات.

حال می‌خواهم یک «برخال» ساده را در این مثلث به شما نشان دهم. موضوعی که باعث می‌شود این مثلث جایی را نیز در دنیای برخال‌ها – یعنی سیستم‌های دینامیکی – پیدا کند.

مسأله خیلی ساده است، تمام اعداد زوج را در «مثلث خیام – پاسکال» پاک کنید، آن‌چه باقی می‌ماند برخالی معروف است با نام «مثلث سرپینسکی»:



---چطور میتوان در بحث ایکس دوی انطباقی از مثلث پاسکال استفاده کرد؟

در خی دو زمانی که ویژگی مورد اندازه گیری ، ویژگی باشد که از نظر آماری در جامعه دارای شکل هنجاری باشد(یعنی دارای توزیع نرمال باشد مثل هوش، ویژگی های شخصیتی، و ...) از مثلث پاسکال استفاده می شود .

برای استفاده و محاسبه مثلث پاسکال-خیام به شکل زیر عمل می کنیم

درهر ردیف اولین و آخرین عدد ۱ است پس ردیف اول همیشه عدد ۱ قرار ۱

می گیرد در ردیف دوم همیشه عدد ۱،۲،۱ قرار می گیرد از ردیف دوم ۱ ۲ ۱

به بعد می توانید با جمع کردن اعداد ردیف بالا تر، ردیف پایین را محاسبه کنید ۱ ۳ ۳ ۱

)اگر خوب به اعداد روبرو دقت کنید اعداد ردیف پایین همیشه در راستای وسط دو ۱ ۴ ۶ ۴ ۱

عدد ردیف بالا قرار گرفته است به عنوان مثال عدد ۳ در ردیف سوم بین عدد ۱ و ۲ ولی در ریف پایین تر قرار گرفته است پس کافی است عدد ردیف فوق یعنی عدد ۱ و ۲ را با هم جمع کنیم تا عدد ۳ به دست بیاید) پس اگر بخواهیم ردیف سوم را بنویسیم ابتدا ۱ را می نویسیم عدد دوم در ردیف سوم به این شکل محاسبه می شود، دو عدد ردیف بالا تر را با هم جمع می کنیم یعنی ۱+۲برابر با ۳ می شود ،عدد سوم را با جمع کردن دو عدد بالاتر از آن یعنی دوباره ۱+۲ می شود و عدد ۳ به دست می آید و عدد چهارم که آخرین عدد است همیشه ۱ است. یعنی ردیف سوم به این ترتیب می شود.۱،۳،۳، ۱ . برای محاسبه ردیف چهارم ، ابتدا عدد ۱ را میگذاریم، سپس برای محاسبه عدد دوم در ردیف چهارم، کافی است دو عدد بالاتر را که این عدد قرار است در ردیف پایین و بین آن ها نوشته شود را با هم جمع کنیم. یعنی عدد ۱را با عدد ۳ جمع می کنیم که برابر است با ۴ . برای محاسبه عدد سوم از ردیف چهارم، کافیست دو عدد بالا تر از آن یعنی عدد ۳ و ۳ ار باهم جمع کنیم که برابر است با ۶. برای محاسبه عدد چهارم از ردیف چهارم کافی است دو عدد ردیف بالا تر را با هم جمع کنیم یعنی عدد ۳ و ۱ که برابر است با ۴ و عدد آخر هر ردیف که همیشه ۱ است را نیز می نویسیم. پس ردیف چهارم به این شکل میشود، ۱،۴،۶،۴،۱ . با اسن توصیفات ردیف پنجم این چنین است. ۱،۵،۱۰،۱۰،۵،۱ ردیف ششم برابر است با ، ۱،۶،۱۵،۲۰،۱۵،۶،۱ و الی آخر ...