Baye's theorem

اگر A و B دو پیشامد مفروض باشند، می توان پیشامد A را به صورت زیر در نظر بگیریم:

زیرا نقطه ای که در A باشد باید یا در هر دوی A و B باشد و یا این که در A باشد و در B وجود نداشته باشد.از طرفی می دانیم AB و AB^c ناسازگار هستند، پس می توان نوشت:

این رابطه بیان می دارد که احتمال به وقوع پیوستن پیشامد A یک متوسط وزنی از احتمال شرطی $(A|B)$ و احتمال شرطی $(A|\mathrm{B}^c)$ می باشد. وزن داده شده به هر احتمال شرطی به اندازه ی احتمالی است که A نسبت به آن مشروط شده است. این فرمول از آن جهت مفید است که می توان از طریق آن احتمال یک پیشامد را با مشروط کردن نسبت به وقوع و یا عدم وقوع یک پیشامد دیگر محاسبه کرد. در بسیاری از حالت ها محاسبه ی احتمال یک پیشامد به صورت مستقیک کاری دشوار است حال آن که با استفاده از این فرمول و مشروط کردن پیشامد مورد نظر نسبت به پیشامد دیگر می توان احتمال مورد نظر را محاسبه کرد.رابطه بالا را می توان به صرورت زیر تعمیم داد. فرض کنید پیشامد های *B1*، *B2*، ... و Bn پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند.

از طرفی رابطه ی زیر نیز بین این پیشامدها برقرار است:

از این عبارت این گونه می توان استنباط کرد که حتماً یکی از پیشامدهای *B1*، *B2*، ... و Bn باید اتفاق بیافتد.

از طرفی می دانیم که پیشامدهای AB_iکه *(i=1,2,…,n)* دو به دو ناسازگار هستند و می نویسیم $A = \bigcup_{i=1}^{n} AB_i$ ، از این جا می توان نوشت:

این رابطه بیان می دارد که چگونه می توان *P(A)* را با مشروط کردن به یکی از پیشامدهای داده شده ی *B1*، *B2*، ... و Bn محاسبه نمود. به طور کلی این رابطه باین می دارد که *P(A)* برابر است با متوسط وزنی $P(A|B_c)$ به نحوی که هر وزن هر جمله برابر با احتمالی است که به آن مشروط گردیده است.

حال فرض کنید که پیشامد A اتفاق افتاده و می خواهیم احتمال این که یکی از پیشامدهای Bi اتفاق افتاده باشد را حساب کنیم:

$$P(B_j|A)=\frac{P(AB_j)}{P(A)}=\frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)}$$

این رابطه به خاطر بزرگداشت توماس بیز فیلسوف انگلیسی به نام فرمول بیز معروف است.

Independent event

در حالت کلی اگر $P(A|B)$ برابر با $P(A)$ باشد، A از B مستقل است. می توان گفت زمانی که دانستن این که B اتفاق افتاده یا نیفتاده تأثیری در احتمال وقوع پیشامد A نداشته باشد این دو پیشامد مستقل هستند.

چون $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$ ، پس A و B مستقلند اگر

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

نتیجه: دو پیشامد A و B مستقلند هرگاه رابطه ی بالا برقرار باشد.

دوپیشامد را که مستقل نباشند، وابسته می گویند.

از طرفی اگر A و B مستقل باشند، A و B^c نیز مستقل هستند.

proof:

از طرفی

و مطلب مورد نظر ثابت می شود.

بنابراین اگر A مستقل از B باشد احتمال وقوع A با داشتن اطلاع از عدم وقوع B هیچ تغییری نمی کند.

توجه: سه پیشامد A، B و C مستقلند اگر:

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

$$P(AC)=P(A)P(C)$$

$P(BC)=P(B)P(C)$

توجه: یک مجموعه نامتناهی از پیشامدها را مستقل گویند اگر هر زیرمجموعه متناهی از آن ها مستقل باشند.

گاهی اوقات برای محاسبه ی احتمال یک آزمایش، می توان آن آزمایش را متشکل از دنباله ای از آزمایش ها در نظر گرفت. به طور مثال آزمایش پرتاب متوالی یک سکه را می توان تکرار آزمایش پرتاب یک سکه در نظر گرفت و بدیهی است که نتیجه ی یک آزمایش در نتیجه ی آزمایش دیگر هیچ تأثیری ندارد. در این شرایط گفته می شود که این زیر آزمایش ها مستقل هستند.

تعریف: زیر آزمایش ها مستقلند اگر $E1$، $E2$، ...، En ... لزوماً دنباله ای از پیشامدهای مستقل باشند. Ei پیشامدی است که نتیجه آن در ارتباط با آزمایش iام حاصل شود.

Conditional probability

وقتی دو تاس را پرتاب می کنیم ۳٦ نتیجه ی حاصل از پرتاب آن ها دارای شانس برابر هستند، و احتمال وقوع برای هر یک برابر با $\frac{1}{36}$ است. حال فرض کنید یکی ار تاس ها را پرتاب کرده و نتیجه برابر ۳ شده است. حال می خواهیم احتمال این را محاسبه کنیم که مجموع دو تاس برابر با ۸ باشد! در این حالت اگر نتیجه تاس اول برابر با ۳ باشد، حداکثر ٦ نتیجه ممکن برای این آزمایش وجود دارد:

{(٦و۳) ، (٥و۳) ، (٤و۳) ، (۳و۳) ، (۲و۳) ، (۱و۳)}

از طرفی چون احتمال وقوع هر یک از پیشامدهای بالا یکسان است پس این نتایج هم شانس هستند و می توان گفت احتمال هر یک برابر است با $\frac{1}{6}$. از طرفی احتمال وقوع ۳۰ نتیجه ی دیگر فضای نمونه برابر با صفر می باشد.

حال همان گونه که می بینیم زمانی که تاس اول برابر با ۳ باشد احتمال این که مجموع برابر با ۸ باشد برابر است با $\frac{1}{6}$.

اگر A و B به ترتیب نشان دهنده ی مجموع دو تاس ۸ و نتیجه ی تاس اول برابر با ۳ باشند، آنگاه احتمال محاسبه شده عبارت است از احتمال وقوع A به شرط B و با نماد زیر نوشته می شود:

$$P(A|B)$$

یک رابطه ی دیگر هم برای محاسبه ی این احتمال شرطی می توان بدست آورد. می دانیم زمانی که B اتفاق بیافتد بدین معناست که فضای نمونه ی ما به مجموعه ی B کاهش یافته است. همچنین می دانیم برای این که A اتفاق بیافتد لازم استکه نتیجه ی واقعی نقطه ای از A و B باشد یعنی باید در AB باشد که می توان این توضیحات را به صورت زیر با نماد ریاضی مطرح نمود:

اگر $P(B)>0$ باشد آنگاه

Expected value:

امید ریاضی حاصل ضرب متغیرهای تصادفی مستقل برابر با حاصل ضرب امید ریاضی آن هاست

گزاره:

اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند، آن گاه برای همه توابع h و g داریم:

$E[g(X)h(Y)]=E[g(X)]E[h(Y)]$

proof:

$$E[g(X)h(Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(y)f(x,y)dxdy$$

Covariance

امید ریاضی و واریانس اطلاعاتی را در رابطه با متغیر تصادفی ارائه می کنند، کوواریانس اطلاعاتی را در مورد دو متغیر تصادفی ارائه می کند.

تعریف:

کوواریانس بین دو متغیر تصادفی X و Y با $Cov(X,Y)$ نمایش داده می شود و عبارت است از

با بسط دادن طرف اول رابطه ی زیر می توان به عبارت دیگری برای کوواریانس دست یافت:

$$Cov(X,Y)=E[XY-E[X]Y-XE[Y]+E[X]E[Y]$$

$$=E[XY]-E[X]E[Y]-E[X]E[Y]+E[X]E[Y]$$

$=E[XY]-E[X]E[Y]$

بنابراین اگر X و Y مستقل باشند آن گاه کوواریانس آن ها برابر با صفر است. البته باید توجه داشت که عکس این مطلب صحیح نیست. یعنی اگر کوواریانس دو متغیر تصادفی صفر باشد نمی توان نتیجه گرفت که آن دو متغیر تصادفی مستقل هستند.

بعضی از خواص کوواریانس:

$Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

$Cov(X,X)=Var(X)$

$Cov(aX,Y)=aCov(X,Y)$

Random variable simulation

یکی از زوش های عمومی برای شبیه سازی متغیر های تصادفی روش تبدیل معکوس می باشد.

گزاره:

فرض کنید U یک متغیر تصادفی یکنواخت روی فاصله (۱و۰) باشد. برای هر تابع توزیع تجمعی پیوسته F اگر متغیر تصادفی Y را به وسیله $Y=F^{-1}(U)$ تعریف کنیم، آنگاه متغیر تصادفی Y دارای تابع توزیع تجمعی F است. ($F^{-1}(x)$ برابر آن مقدار y که $F(y)=x$ است تعریف می شود.

proof:

حال چون $F(x)$ تابعی یکنواست، نتیجه می شود که $F^{-1}(U)\leq a$ اگر و فقط اگر $U\leq F(a)$. بدین ترتیب داریم:

$F(a)$

نتیجه می شود که می توان متغیر تصادفی X را دارای تابع توزیع تجمعی پیوسته F است به وسیله تولید یک عدد تصادفی U و اختیار $X=F^{-1}(U)$ شبیه سازی کرد.