

Apuntes: Diseño de máquinas en aeronáutica.

Apuntes: Diseño de máquinas en aeronáutica.

Alejandro Roger Ull

Ingeniería Aeronáutica

Segunda edición – Septiembre de 2010

Acerca de estos apuntes

Estos apuntes se han realizado para cubrir el temario de la asignatura “Diseño de máquinas en aeronáutica”, que se imparte en el tercer curso de Ingeniería Aeronáutica en la Escola Tècnica Superior d’Enginyeries Industrial i Aeronàutica de Terrassa, de la Universitat Politècnica de Catalunya (ETSEIAT – UPC).

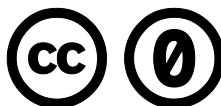
Licencia

Esta obra está bajo una Dedicación de Dominio Público 1.0 Universal (CC0 1.0) de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite:

<http://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/deed.es>

El autor ha dedicado la obra al dominio público, mediante la renuncia a todos sus derechos patrimoniales de autor sobre la obra en todo el mundo, incluyendo todos los derechos conexos y afines, en la medida permitida por la ley.

Puede copiar, modificar, distribuir la obra y hacer comunicación pública de ella, incluso para fines comerciales, sin pedir permiso.



0. Índice

0. Índice	5
1. Estado de esfuerzos	7
1.1. Tensiones.....	7
1.2. Círculos de Mohr	8
2. Fallas ocasionadas por cargas estáticas	11
2.1. Generalidades y consideraciones.....	11
2.2. Hipótesis de falla por carga estática	12
3. Fallas ocasionadas por fatiga	17
3.1. Generalidades y consideraciones.....	17
3.2. Factores modificadores del límite de resistencia a fatiga.....	18
3.3. Caso general de tensiones fluctuantes	20
4. Sujetadores roscados y tornillos de potencia	23
4.1. Características dimensionales.....	23
4.2. Aplicaciones.....	23
4.3. Elementos de sujeción	24
4.4. Área de esfuerzo a tracción.....	24
4.5. Análisis del perfil de rosca rectangular	24
4.6. Análisis del perfil de rosca triangular	25
5. Uniones Atornilladas	26
5.1. Rigidez del perno.....	26
5.2. Rigidez de la junta	26
5.3. Resistencia de tornillos o pernos	28
5.4. Uniones atornilladas	29
5.5. Estudio de la fatiga en la unión atornillada.....	31
5.6. Centroide de un grupo de pernos	32
5.7. Carga cortante debida a cargas excéntricas.....	33
6. Uniones forzadas.....	34
6.1. Apriete.....	34
7. Resortes Helicoidales	38
7.1 Generalidades	38
7.2 Equilibrio del resorte.....	38

7.3 Deformación de los resortes helicoidales	39
7.4 Aspectos geométricos	41
7.5 Resistencia a tracción de los aceros comunes para resortes	41
7.6 Resorte de tracción de tipo cerrado	42
7.7 Resortes torsionales	43
8. Engranajes exteriores.....	45
8.1 Definición de engranaje	45
8.2 Centro instantáneo de rotación (CIR)	46
8.3 Axoides.....	46
8.4 Perfiles conjugados	46
8.5 Perfil de evolvente de círculo.....	46
8.6 Engrane de los perfiles de evolvente de círculo	47
8.7 Propiedades del engrane de perfiles de evolvente de círculo	48
8.8 Geometría del diente de evolvente	49
8.9 Relación entre espesores del diente a distintas alturas del mismo.....	49
8.10 Paso	50
8.11 Cremallera de evolvente	50
8.12 Tallado por generación.....	50
8.13 Datos de generación	51
8.14 Radio del axoide de generación o cilindro primitivo.....	51
8.15 Tallado de ruedas dentadas con y sin deslizamiento.....	52
8.16 Espesor del diente en la circunferencia primitiva.....	52
8.17 Parámetros intrínsecos	54
8.18 Cuerda sobre k dientes	56
8.19 Parámetros de funcionamiento	56
8.20 Condición de engrane sin holgura.....	57
8.21 Corrección del radio de cabeza	58
8.22 Grado de recubrimiento o coeficiente de engrane.....	59
8.23 Dientes penetrados.....	59
8.24 Tallado con desplazamiento para evitar la obtención de dientes penetrados.....	60
8.25 Engrane a cero.....	61
8.26 Radio de apuntamiento.....	61

1. Estado de esfuerzos

1.1. Tensiones

Las diferentes tensiones que se pueden considerar en un elemento dV se representan en la figura 1.1

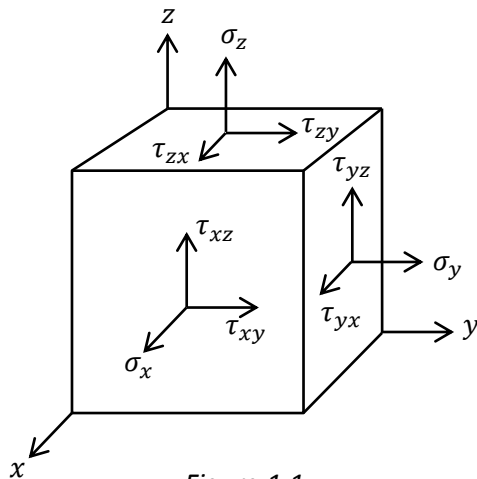


Figura 1.1

Existen 9 componentes que definen el estado tensional del dV : tres tensiones normales (σ_x , σ_y y σ_z) y seis tensiones tangenciales (τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} y τ_{zy}). Este estado tensional se representa mediante el tensor de tensiones

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Sin embargo aplicando la condición de equilibrio en el elemento dV se deduce que, en magnitud

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Por lo que en realidad hay 6 componentes independientes en el tensor de tensiones.

Idénticamente, en un caso bidimensional, las tensiones que se pueden considerar en un elemento dS se representan en la figura 1.2.

En este caso aparecen 4 componentes pero aplicando el equilibrio de nuevo, se reducen a 3, puesto que, en magnitud

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

El tensor de tensiones en este caso es de la forma

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix}$$

Se tomará como criterio de signos positivo el sentido de giro de las agujas del reloj. De este modo el tensor de tensiones se puede escribir también como

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & -\tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$$

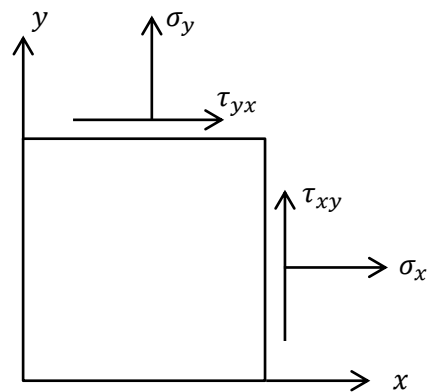


Figura 1.2

1.2. Círculos de Mohr

Suponiendo conocido el tensor de tensiones se realizará un corte en el elemento tal y como se muestra en la figura 1.3.

Aplicando la condición de equilibrio al elemento resultante se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = \sigma \cos \phi - \tau \sin \phi - \sigma_x - \tau_{xy} \\ 0 = \tau \cos \phi + \sigma \sin \phi - \sigma_y - \tau_{xy} \end{cases}$$

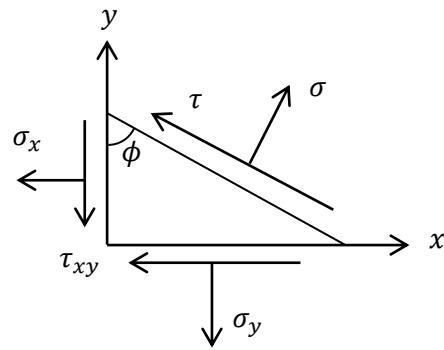


Figura 1.3

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\phi + \tau_{xy} \sin 2\phi \quad (1.1)$$

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\phi + \tau_{xy} \cos 2\phi \quad (1.2)$$

Llegado este punto, si se desea hallar la dirección ϕ que suponga σ máxima se puede derivar la ecuación (1.1):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \tan 2\phi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Existen dos soluciones para ϕ , y por lo tanto dos tensiones normales máximas σ_1 y σ_2 :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Además se puede comprobar que para estas direcciones $\tau = 0$.

Del mismo modo, si se desea hallar la dirección ϕ' que suponga τ máxima se puede derivar la ecuación (1.2):

$$\frac{\partial \tau}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \tan 2\phi' = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

Existen dos soluciones para ϕ' , y por lo tanto dos tensiones tangenciales máximas τ'_1 y τ'_2 :

$$\tau'_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Además se puede comprobar que para estas direcciones

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Y también que $2\phi \perp 2\phi'$, lo que quiere decir que ϕ y ϕ' están separadas 45° .

Volviendo a las ecuaciones (1.1) y (1.2), si se elevan al cuadrado se obtiene (reordenando):

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \cos^2 2\phi + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\phi + (\sigma_x - \sigma_y)\tau_{xy} \cos 2\phi \sin 2\phi$$

$$\tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \sin^2 2\phi + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\phi - (\sigma_x - \sigma_y)\tau_{xy} \cos 2\phi \sin 2\phi$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (1.3)$$

Recordando la ecuación de una circunferencia de radio r y con centro en el punto (a, b)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Puede deducirse que la ecuación (1.3) corresponde a un círculo como el de la figura 1.4, centrado en

$$(a, b) = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$$

Y de radio

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

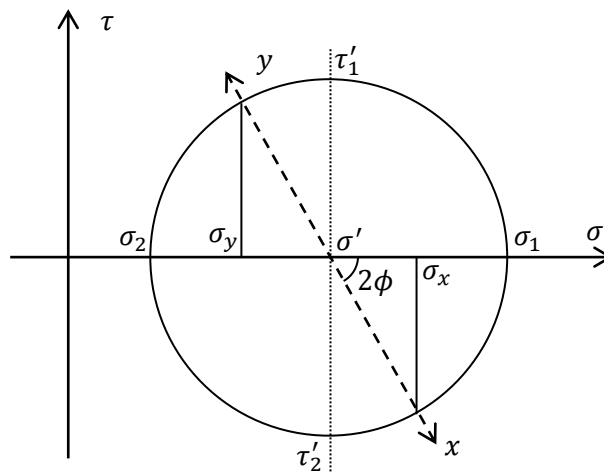


Figura 1.4

De este modo basta con conocer 2 de las 4 componentes originales, pues una quedará determinada por la condición de equilibrio, y otra por el círculo de Mohr.

Del mismo modo el caso tridimensional se reduce a 3 componentes.

Ejemplo 1.1

Se tienen los siguientes datos: $\sigma_x = 80 \text{ MPa}$ $\tau_{xy} = 50 \text{ MPa}$

Se pide calcular $\sigma_1, \sigma_2, \tau'_1, \tau'_2$ y sus direcciones.

Resolución

A menos que se indique lo contrario se toma $\sigma_y = 0 \text{ MPa}$. Se traza el círculo de Mohr correspondiente (figura 1.5, no a escala):

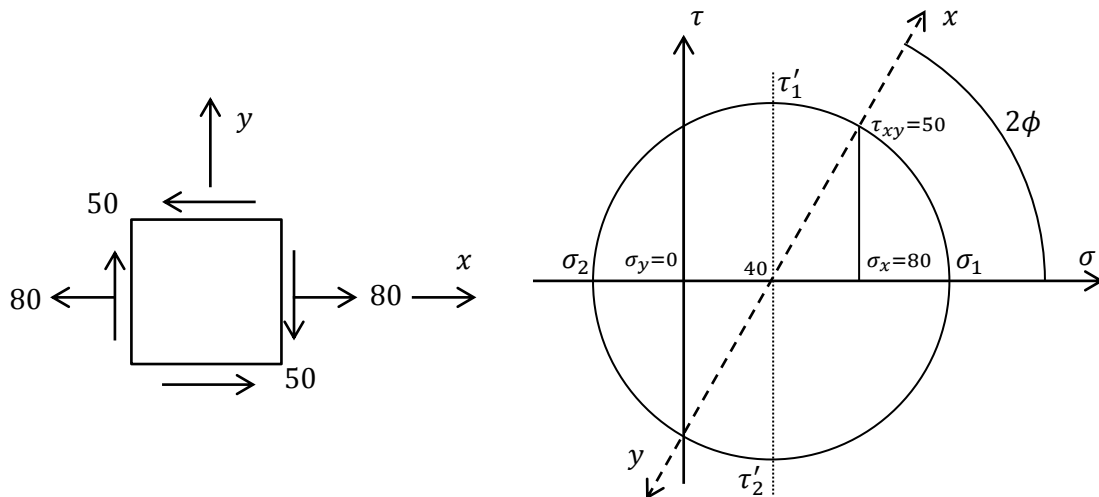


Figura 1.5.

Rápidamente puede deducirse que

$$r = \sqrt{40^2 + 50^2} = 64 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sigma_1 = 40 + 64 = 104 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 40 - 64 = -24 \text{ MPa} \\ \tau'_1 = 64 \text{ MPa} \\ \tau'_2 = -64 \text{ MPa} \end{array} \right\} \sigma' = 40 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\phi = \frac{50}{40} \Rightarrow 2\phi = 51,3^\circ \Rightarrow \phi = 25,65^\circ \sim \Rightarrow \phi' = 19,35^\circ \curvearrowright$$

Para ir desde el eje x al eje de σ_1 (ϕ) hay que girar en sentido horario en el círculo de Mohr, así que, dado el criterio de signos escogido, se gira en el mismo sentido. Lo mismo se aplica a ϕ' .

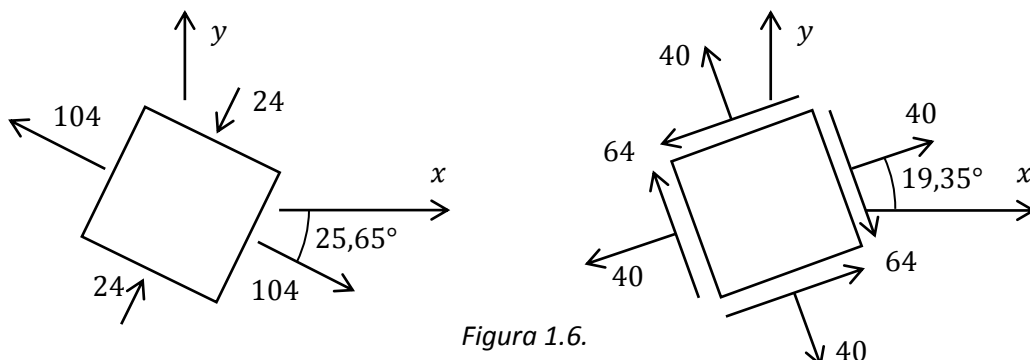


Figura 1.6.

2. Fallas ocasionadas por cargas estáticas

2.1. Generalidades y consideraciones

- Consideraciones sobre fallas
 - El elemento mecánico se fracciona en dos o más partes.
 - El elemento se deforma permanentemente (modificación geométrica).
 - Degradación de la fiabilidad (afecta a un conjunto de elementos mecánicos).

En definitiva el elemento pierde su funcionalidad original.

- Consideraciones sobre resistencia estática
 - Si la falla de un elemento supone un alto riesgo o la producción es elevada entonces queda justificado un programa de ensayos.
 - Si la producción es baja o tiempo disponible para el diseño es corto se utilizan criterios de cálculo.
 - Si el funcionamiento es insatisfactorio se recalcula la pieza.
- Concentración de tensión
 - Cualquier discontinuidad en el elemento altera la distribución de tensiones en sus inmediaciones (la discontinuidad es un concentrador de tensiones).
 - Factor de concentración de tensiones K_t y K_{ts}

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0} \qquad K_{ts} = \frac{\tau_{max}}{\tau_0}$$

Tensión normal Tensión tangencial

En un material dúctil $K_t = K_{ts} = 1$

En una fundición $K_t = K_{ts} = 1$ (excepción de los materiales frágiles)

2.2. Hipótesis de falla por carga estática

- **Tensión tangencial máxima**

Se produce fluencia cuando la tensión tangencial máxima supere la tensión tangencial de una probeta ensayada a tracción simple en el momento en que se produce la fluencia.

En un ensayo de tracción simple la tensión tangencial vale

$$\tau = \frac{\sigma}{2} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{S_y}{2}$$

Donde S_y es el límite a fluencia obtenido en el ensayo de tracción.

Las tensiones tangenciales máximas en la pieza serán

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

Comparando las tensiones tangenciales se deduce que para que se produzca fluencia se deberá cumplir que

$$\sigma_1 - \sigma_2 \geq S_y \quad \text{ó} \quad \sigma_1 - \sigma_3 \geq S_y \quad \text{ó} \quad \sigma_2 - \sigma_3 \geq S_y$$

Puesto que ninguna tensión tangencial deberá superar la tensión tangencial máxima.

Considerando el caso bidimensional, con $\sigma_3 = 0$, se obtiene la siguiente “zona de seguridad” de la pieza (figura 3.1).

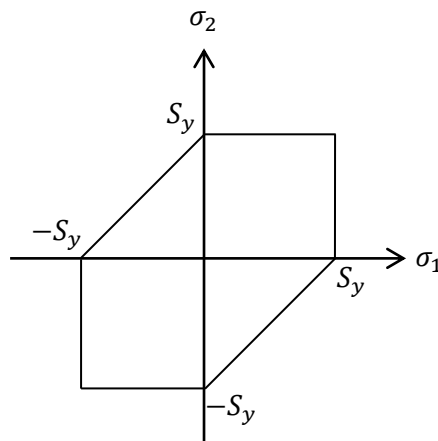


Figura 2.1

- **Teoría de la energía de distorsión de von Mises**

La fluencia se produce cuando la energía de deformación total en un volumen unitario supera la energía de deformación total del mismo volumen unitario en un ensayo de tracción simple al alcanzar la fluencia.

La energía de deformación total es

$$U = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$$

En un ensayo de tracción simple la energía de deformación es

$$U_t = \frac{\sigma^2}{2E}$$

Y teniendo en cuenta que S_y es el límite a fluencia del material, entonces en nuestro caso tendremos que la energía total es

$$U_t = \frac{S_y^2}{2E}$$

En una pieza real la energía de deformación total será, en función de las tensiones principales

$$U_r = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)$$

Considerando que por la ley de Hooke las deformaciones serán

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{\sigma_j \varepsilon_j}{E}$$

Entonces la energía de deformación quedará

$$U_r = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] \quad (2.1)$$

Estas tensiones principales pueden cambiarse por la superposición de una presión hidrostática σ_h que causa únicamente cambio de volumen, pero no fluencia, y unas tensiones de distorsión σ'_1 , σ'_2 y σ'_3 que causan el fenómeno de fluencia.

La presión hidrostática σ_h se define como la tensión media de las tensiones principales.

$$\sigma_h = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

De la ecuación (2.1) puede obtenerse la energía de cambio de volumen

$$U_{cv} = \frac{3\sigma_h^2}{2E} (1 - 2\nu) = \frac{1 - 2\nu}{6E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]$$

Dado que la energía de deformación total debe ser la misma entonces

$$U_r = U_{cv} + U_d$$

Donde U_d es la energía de distorsión, y por lo tanto $U_d = U_r - U_{cv}$ y vale

$$U_d = \frac{1 + \nu}{3E} \cdot \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}$$

También se puede calcular la energía de distorsión del ensayo de tracción en el límite a fluencia, de modo que sólo actúa $\sigma_1 = S_y$

$$U_{dt} = \frac{1 + \nu}{3E} \cdot S_y^2$$

Comparando U_d y U_{dt} se deduce que para que se produzca fluencia se deberá cumplir que

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2} = \sigma_{eq}^2 \geq S_y^2$$

Donde σ_{eq} es la tensión equivalente de von Mises.

Considerando el caso bidimensional, con $\sigma_3 = 0$, se obtiene

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 \geq S_y^2$$

Y representa la siguiente “zona de seguridad” de la pieza (figura 2.2), comparada con la zona de seguridad en el caso de tensión tangencial máxima de la figura 2.1.

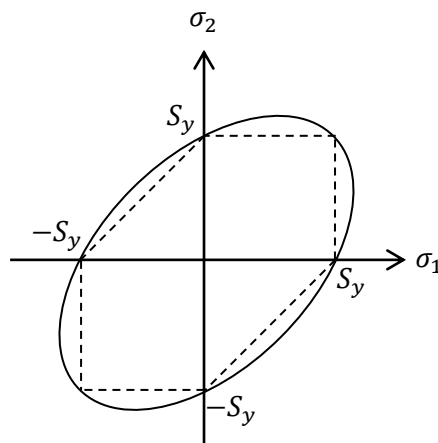


Figura 2.2.

Experimentalmente se comprueba que la teoría de la energía de distorsión de von Mises es más precisa que el criterio de tensión tangencial máxima.

Considerando las tensiones no principales σ_x , σ_y y τ_{xy} , para que se produzca fluencia:

$$\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + 3 \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \right] \geq S_y^2$$

- **Hipótesis del esfuerzo principal máximo**

La fluencia se produce cuando alguno de los esfuerzos principales alcanza o supera la resistencia última a tracción S_{ut} o a compresión S_{uc} .

Dado que se ha elegido $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ entonces

$$\sigma_1 \geq S_{ut} \quad \sigma_3 \leq -S_{uc}$$

Donde S_{ut} es la resistencia última a tracción y S_{uc} es la resistencia última a compresión.

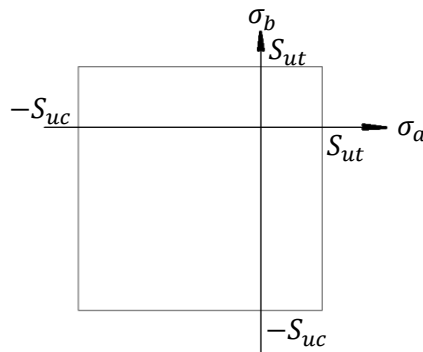


Figura 2.3.

- **Hipótesis de Mohr – Coulomb**

La rotura del material se produce en el plano de resbalamiento.

$$\tau = \tau_0 - f\sigma$$

Donde f es el factor de flotación, y τ_0 es la tensión tangencial en la dirección en que no hay tensión normal, como se muestra en la figura 2.4.

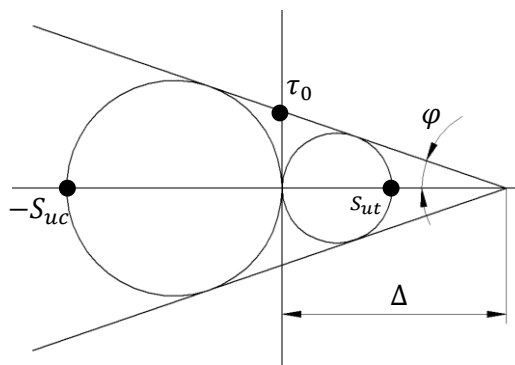


Figura 2.4.

De la figura 2.4 se deduce que

$$\sin \varphi = \frac{S_{ut}}{2\Delta - S_{ut}} = \frac{S_{uc}}{2\Delta + S_{uc}} \Rightarrow \Delta = \frac{S_{ut}S_{uc}}{S_{uc} - S_{ut}} \quad \sin \varphi = \frac{S_{uc} - S_{ut}}{S_{uc} + S_{ut}}$$

Y de la figura 2.5, en tensiones principales se encuentra que

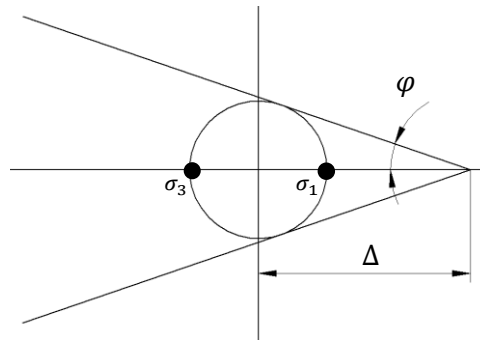


Figura 2.5.

$$\sin \varphi = \frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}{\Delta - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}$$

Con el valor de Δ que se había encontrado ya, e igualando ambos $\sin \varphi$:

$$\frac{S_{uc} - S_{ut}}{S_{uc} + S_{ut}} = \frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}{\frac{S_{ut} S_{uc}}{S_{uc} - S_{ut}} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}$$

Y desarrollando se obtiene

$$\frac{\sigma_1}{S_{ut}} - \frac{\sigma_3}{S_{uc}} = 1$$

Dado que $\tau = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ entonces

$$\tau = \frac{S_{uc} S_{ut}}{S_{uc} + S_{ut}}$$

El lugar geométrico obtenido y los resultados de los ensayos se muestran en la figura 2.6. Para que coincidan mejor existe una modificación (hipótesis de Mohr – Coulomb modificada, figura 2.6, línea discontinua) con:

$$\frac{S_{uc} - S_{ut}}{S_{uc} S_{ut}} \sigma_1 - \frac{\sigma_3}{S_{uc}} = 1$$

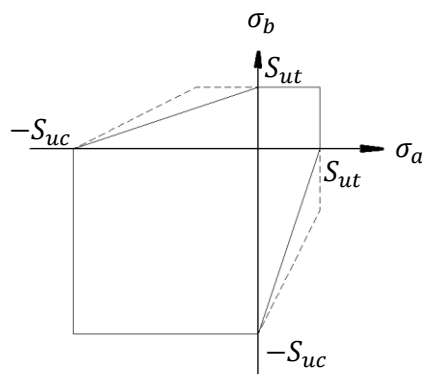


Figura 2.6. Hipótesis de Mohr – Coulomb (continua), y modificación (discontinua).

3. Fallas ocasionadas por fatiga

3.1. Generalidades y consideraciones

La fatiga es la falla del elemento debido a cargas repetitivas, cíclicas o alternantes, que pueden ser menores que la tensión última a tracción S_{ut} o el límite de tensión de fluencia S_y .

Se produce por la aparición y propagación de una grieta, normalmente originada en una discontinuidad, debido a la concentración de tensiones. La grieta se comporta como un concentrador de tensiones cada vez mayor a medida que crece. Al final se produce la rotura de forma repentina.

La duración del esfuerzo determinará la resistencia a fatiga. A medida que el número de ciclos sea mayor ésta se reducirá, y viceversa (figura 3.1). El ensayo más común para su determinación es el de la viga rotatoria (R. R. More).

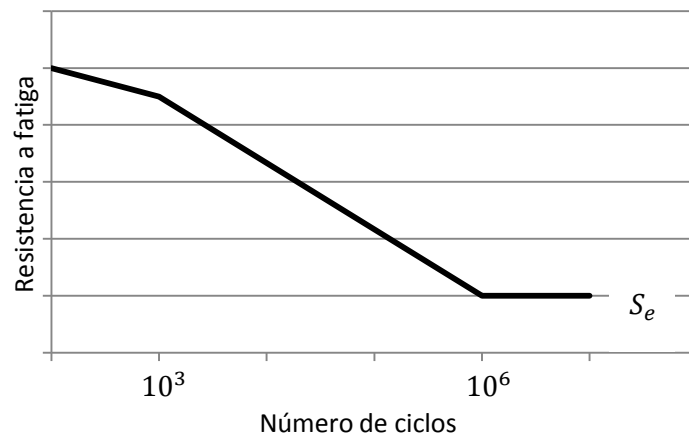


Figura 3.1.

Límites medios de fatiga \bar{S}'_e para hierros y aceros forjados

$$\bar{S}'_e = \begin{cases} 0,5 \cdot S_{ut} & \text{si } S_{ut} < 1400 \text{ MPa} \\ 700 \text{ MPa} & \text{si } S_{ut} > 1400 \text{ MPa} \end{cases}$$

Límites medios de fatiga \bar{S}'_e para hierros y aceros fundidos

$$\bar{S}'_e = \begin{cases} 0,45 \cdot S_{ut} & \text{si } S_{ut} < 600 \text{ MPa} \\ 275 \text{ MPa} & \text{si } S_{ut} > 600 \text{ MPa} \end{cases}$$

La tensión máxima que se podrá soportar en caso de que se trabaje a un número de ciclos $10^3 < N < 10^6$ se obtendrá mediante la expresión $S_f = 10^c \cdot N^b$, donde

$$c = \log \frac{(f \cdot S_u)^2}{S_e} \quad b = -\frac{1}{3} \log \frac{f \cdot S_u}{S_e}$$

Para aceros normalmente se toma $f \approx 0,81$.

Ejemplo 3.1

Se dispone de un material, la resistencia a fatiga (ya corregida) y resistencia última a tracción del cual son

$$S_e = 115 \text{ MPa} \quad S_{ut} = 900 \text{ MPa}$$

¿Cuánto vale la tensión máxima que podrá soportar si ha de trabajar $N = 600 \cdot 10^3$ ciclos?

$$c = \log \frac{(0,81 \cdot 900)^2}{115} = 3,665 \quad b = -\frac{1}{3} \log \frac{0,81 \cdot 900}{115} = -0,267$$

$$S_f = 10^{3,665} \cdot (600 \cdot 10^3)^{-0,267} = 132 \text{ MPa}$$

3.2. Factores modificadores del límite de resistencia a fatiga

Los límites medios de fatiga \bar{S}'_e obtenidos a partir de una probeta son corregidos a la hora de aplicarlos sobre una pieza (S_e) mediante la expresión

$$S_e = \bar{S}'_e \cdot k_a k_b k_c k_d k_e k_f$$

- **Factor de acabado superficial k_a**

$$k_a = a S_u^b$$

Algunos valores para los parámetros a y b son:

Tipo de acabado	SI (MPa)		Imperial (kpsi)	
	a	b	a	b
Esmerilado o rectificado	1,58	-0,085	1,34	-0,085
Maquinado o estirado en frío (CD)	4,51	-0,265	2,7	-0,265
Laminado en caliente (HR)	57,7	-0,718	14,4	-0,718
Forjado	272	-0,995	39,9	-0,995
Fundición	1	0	1	0

- **Factor de tamaño, forma y tipo de carga k_b**

La probeta utilizada en el ensayo de viga rotatoria es muy pequeña en comparación con una pieza final, que tiene más posibilidades de falla debido a su mayor tamaño. Esto es porque presentará un mayor número de discontinuidades (mayor volumen), y porque el mecanizado en general es más difícil y presentará más imperfecciones.

Para una pieza con sección circular de diámetro d (en mm) se tiene que

Sistema internacional	Imperial
$k_b = \begin{cases} 1,12 & d < 2,79 \text{ mm} \\ 1,243 \cdot d^{-0,107} & 2,79 < d < 51 \text{ mm} \\ 1,51 \cdot d^{-0,157} & 51 < d < 254 \text{ mm} \\ 0,6 & d > 254 \text{ mm} \end{cases}$	$k_b = \begin{cases} 1,12 & d < 0,11 \text{ in} \\ 0,879 \cdot d^{-0,107} & 0,11 < d < 2 \text{ in} \\ 0,91 \cdot d^{-0,157} & 2 < d < 10 \text{ in} \\ 0,6 & d > 10 \text{ in} \end{cases}$

En el caso que la carga sea axial, de torsión o cortante entonces $k_b = 1$, y se aplicará k_c .

Para piezas cuya sección no es circular, o que son cargadas de forma diferente a la viga rotatoria, se utiliza el criterio de Kuguel, que compara la sección de la pieza que soporta una tensión $\sigma > 0,95 \cdot \sigma_{\max}$, con la misma sección de una pieza de sección circular (figura 3.2), para obtener un diámetro equivalente d_e .

$$A_{\text{pieza}}^{\sigma > 0,95 \cdot \sigma_{\max}} = A_{\text{equivalente}}^{\sigma > 0,95 \cdot \sigma_{\max}}$$

En la pieza equivalente se obtiene

$$A = \frac{\pi}{4} (d_e^2 - (0,95 \cdot d_e)^2) = 0,0766 \cdot d_e^2$$

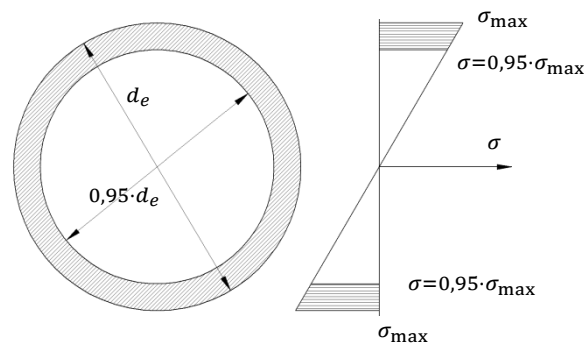


Figura 3.2. Área con carga superior al 95% de la carga máxima experimentada en la pieza equivalente (flexión rotatoria).

Para encontrar d_e debe igualarse el área sombreada de la pieza equivalente y de la pieza real.

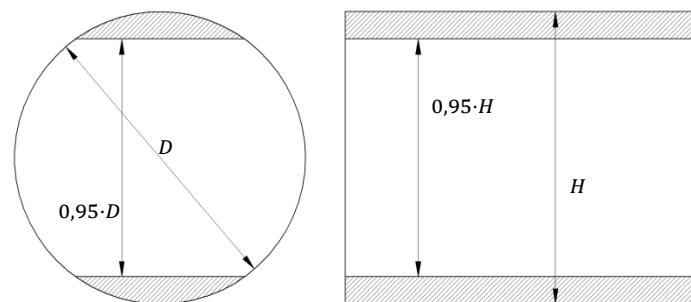


Figura 3.3. Áreas a comparar de diferentes secciones y tipos de carga.

Izquierda: Sección circular a flexión alterna. Derecha: sección rectangular a flexión alterna.

- **Factor de carga k_c**

$$k_c = \begin{cases} 1 & \text{flexión o von Mises} \\ 0,85 & \text{axial} \\ 0,577 & \text{torsión o cortante} \end{cases}$$

En el caso de carga a torsión o cortante, si se está trabajando de antemano con la tensión equivalente de von Mises σ_{eq} entonces deberá tomarse $k_c = 1$, puesto que con k_c ya se está considerando la teoría de la energía de deformación.

- **Factor de temperatura k_d**

Experimentalmente se ha comprobado que un aumento de la temperatura hasta 200 °C supone un incremento de S_{ut} y de S_e . Aumentar la temperatura más allá de los 200 °C vuelve a reducir ambos valores. Para determinar el parámetro k_d se comprueba en una tabla su valor.

- **Factor estadístico de fiabilidad k_e**

Se realiza un análisis estadístico con $S_e \sim N(m = \bar{S}'_e, \sigma^2)$. Para aleaciones metálicas, en general $\sigma = 0,08m$.

Haciendo el cambio $z = (x - m)/\sigma$ tal que $z \sim N(0,1)$, puede definirse una fiabilidad de la resistencia $R = 1 - P$, donde $P = P(z < -z_\alpha)$, es decir, P es la probabilidad de que la resistencia sea menor que un cierto valor. De modo que:

$$-z_\alpha = \frac{x_\alpha - m}{\sigma} = \frac{S_e - \bar{S}'_e}{0,08 \cdot \bar{S}'_e} \Rightarrow S_e = \underbrace{\bar{S}'_e (1 - 0,08 \cdot z_\alpha)}_{k_e}$$

En un caso práctico, dada una fiabilidad deseada, por ejemplo $R = 0,99$, es decir, una fiabilidad del 99%, se busca en una tabla el valor de z_α que cumpla que $P(z < -z_\alpha) = 1 - R = 0,01$. Finalmente se obtiene

$$z_\alpha = 2,32$$

$$k_e = 1 - 0,08 \cdot z_\alpha = 0,814$$

También puede encontrarse directamente en una tabla el valor de k_e para obtener la fiabilidad deseada.

- **Factor de reducción del límite de fatiga por concentración de tensiones k_f**

Se define primero un factor de concentración de tensiones en el caso de fatiga

$$K_f = \frac{1}{k_f} = \frac{S'_e \text{ (sin discontinuidad)}}{S_e \text{ (con discontinuidad)}}$$

Efectivamente $S_e = S'_e \cdot k_f$

Se define también la sensibilidad a la muesca

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1}$$

Donde K_t es el factor de concentración de tensiones.

3.3. Caso general de tensiones fluctuantes

Por lo general la fatiga no se produce únicamente cuando se alternan las tensiones (por ejemplo entre tracción y compresión), sino que también causa fatiga una tensión fluctuante, que mantiene siempre la misma dirección pero de valor diferente.

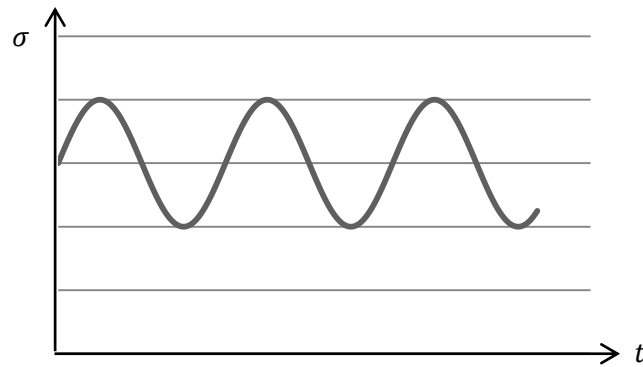


Figura 3.4. Tensión fluctuante, de signo constante.

En un caso de tensión fluctuante se puede definir

$$\sigma_{med} = \sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \quad \sigma_{amp} = \sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

En el diagrama de Goodman se representan los posibles estados de carga.

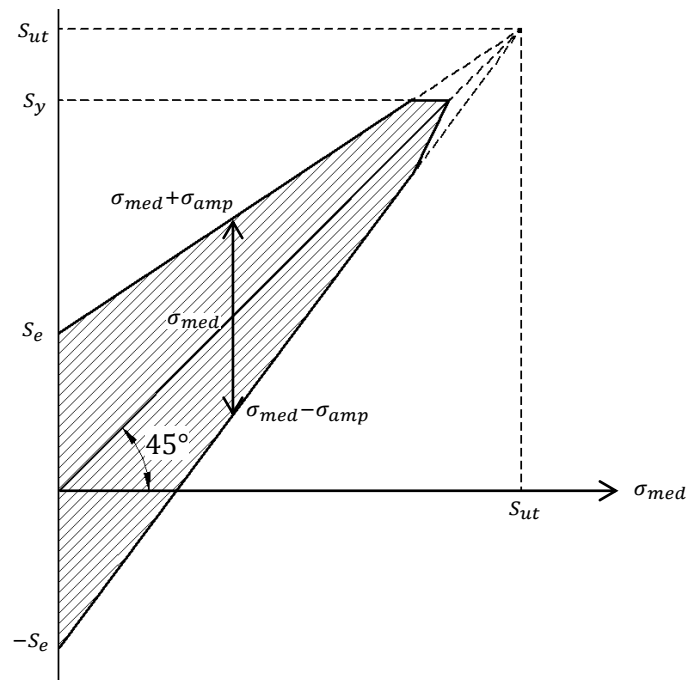


Figura 3.5. Diagrama de Goodman.

La zona sombreada en el diagrama de Goodman define para una tensión media la amplitud máxima de vibración, y está limitada por la resistencia última a tracción S_{ut} , la resistencia a fatiga S_e y el límite de fluencia S_y .

Del diagrama puede comprobarse que si $\sigma_m = 0$ entonces $\sigma_a = S_e$ (caso de tensión alterna). Del mismo modo, si se llegase a $\sigma_m = S_{ut}$ entonces $\sigma_a = 0$, pues si no se sobrepasaría S_{ut} (caso estático, líneas discontinuas). Sin embargo tampoco se debe sobrepasar S_y , de modo que se limita σ_a antes de que $\sigma_m = S_{ut}$. Entonces en $\sigma_m = S_y$ se fuerza que $\sigma_a = 0$.

En la práctica se utiliza el diagrama de la figura 3.6.

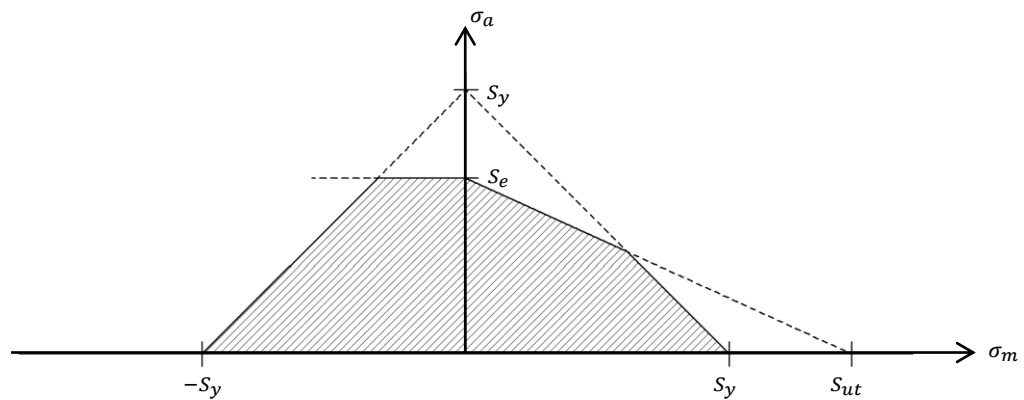


Figura 3.6.

La zona sombreada en el diagrama define para una tensión media la amplitud máxima de vibración. En la zona de compresión no se tiene en cuenta la resistencia última a compresión S_{uc} . De nuevo, si $\sigma_m = 0$ entonces $\sigma_a = S_e$ y si $\sigma_m = S_y$ se fuerza que $\sigma_a = 0$.

De forma más simplificada se utiliza también el diagrama de la figura 3.7.

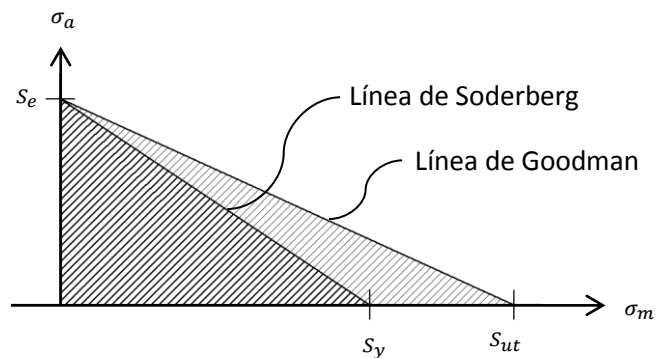


Figura 3.7.

Las ecuaciones de estas rectas son.

$$\text{Recta de Goodman: } \frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} = \frac{1}{n}$$

$$\text{Recta de Soderberg: } \frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_y} = \frac{1}{n}$$

Donde n es el factor de seguridad.

4. Sujetadores roscados y tornillos de potencia

4.1. Características dimensionales

Diámetro externo o nominal d : Diámetro medido por la parte más externa de la rosca.

Diámetro del núcleo o interno d_n : Diámetro medido por la parte más interna de la rosca.

Diámetro medio o de paso d_m : Media entre el diámetro exterior y el diámetro interior.

Paso p : Distancia medida axialmente entre los puntos homólogos de dos filetes consecutivos (figura 4.1 izquierda). En el sistema anglosajón se define como la inversa del número de hilos que caben en una pulgada.

Avance a : Distancia medida axialmente entre los puntos homólogos de un mismo filete (figura 4.1 derecha). Si el tornillo tiene n filetes entonces el avance será $n \cdot p$. Puede visualizarse como la distancia avanzada por una tuerca al girar una vuelta completa.

Sentido de la rosca: La rosca a derechas avanza según la regla de la mano derecha, y la rosca izquierda al revés.

En tornillería las distancias se expresan en mm.

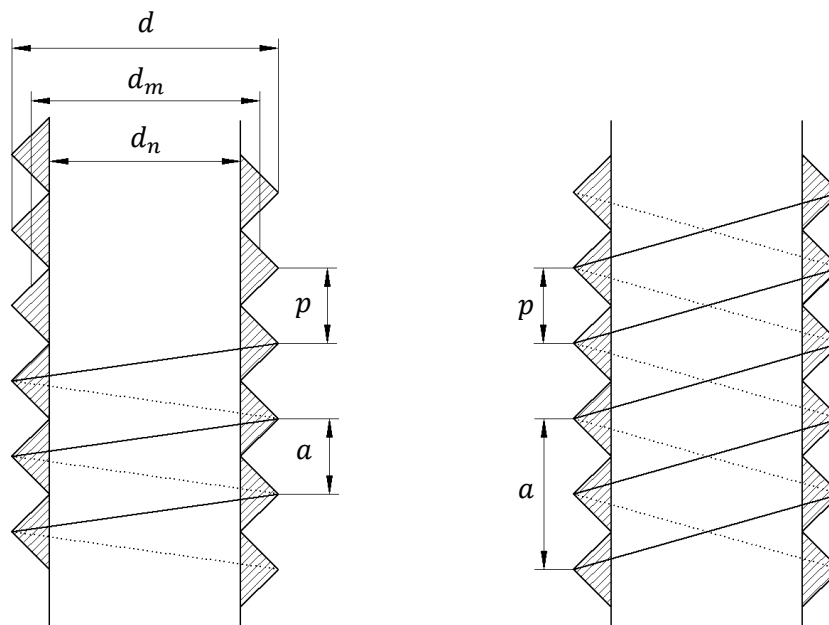


Figura 4.1. Características dimensionales de un tornillo de un filete (izquierda) y uno de dos filetes (derecha).

4.2. Aplicaciones

Elemento de unión o sujeción, para producir tensiones previas, tornillos de cierre o tapones, para instrumentación de precisión (medición de longitudes), transformación de fuerza (gato mecánico), mecanismos de transmisión de movimiento (movimiento de rotación a traslación).

4.3. Elementos de sujeción

Pernos: Disponen de una parte roscada (cuerda o porción roscada) y una sin roscar (espiga, de diámetro externo). Frecuente en elementos estructurales, la parte sin roscar se puede utilizar para añadir elementos de junta (anillas, etc.). La longitud de la rosca viene dada por

$$l_t = \begin{cases} 2d + 6 & L \leq 125 \\ 2d + 12 & 125 \leq L \leq 200 \\ 2d + 25 & L \geq 200 \end{cases}$$

Tornillo de máquina: Roscado hasta el final.

4.4. Área de esfuerzo a tracción

Se define como la sección circular de una varilla que rompe a tracción a la misma tensión que el tornillo en cuestión. De este modo se define el diámetro a tracción

$$d_t = \frac{d_m + d_n}{2}$$

Y el área de la sección de la varilla equivalente, o área de esfuerzo a tracción, es

$$A_t = \frac{\pi d_t^2}{4}$$

4.5. Análisis del perfil de rosca rectangular

Para una vuelta de un hilo se tiene el siguiente diagrama de fuerzas (figura 4.2), teniendo en cuenta que el movimiento es de subida.

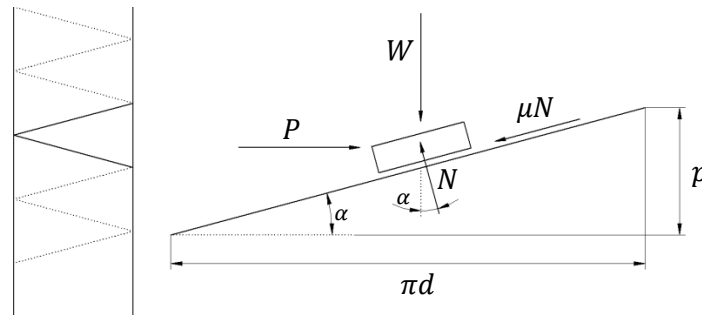


Figura 4.2. Desarrollo horizontal de un hilo.

$$\left. \begin{aligned} P - N \sin \alpha - \mu N \cos \alpha &= 0 \\ W - N \cos \alpha + \mu N \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \right\}$$

De ambas ecuaciones se puede obtener

$$N = \frac{P}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} = \frac{W}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \Rightarrow P = \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} W$$

Pero $\mu = \tan \varphi$, donde φ es el ángulo de rozamiento. Manipulando la expresión anterior

$$P = \tan(\alpha + \varphi) \cdot W \quad M = W \cdot R \cdot \tan(\alpha + \varphi)$$

Si el movimiento es de bajada

$$\left. \begin{aligned} -P - N \sin \alpha + \mu N \cos \alpha &= 0 \\ W - N \cos \alpha - \mu N \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \right\}$$

De ambas ecuaciones se puede obtener

$$N = \frac{-P}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha} = \frac{W}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \Rightarrow P = -\frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} W$$

Y con el cambio $\mu = \tan \varphi$ se obtiene

$$P = -\tan(\alpha - \varphi) \cdot W$$

De aquí se obtiene que si $\varphi > \alpha$ entonces se verifique la condición de autoretención, puesto que la fuerza P irá en sentido contrario al supuesto.

4.6. Análisis del perfil de rosca triangular

En el caso de una rosca de perfil triangular la fuerza normal N considerada en el apartado anterior ya no se encuentra en un plano vertical, sino que forma un ángulo β con este plano, y la componente vertical de esta fuerza normal será $N \cos \beta$.

Aplicando el mismo procedimiento que en el caso de perfil rectangular se tiene que

$$\left. \begin{aligned} P - N \cos \beta \sin \alpha - \mu N \cos \alpha &= 0 \\ W - N \cos \beta \cos \alpha + \mu N \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Y desarrollando el sistema se llega a la expresión

$$P = -\frac{\sin \alpha - \mu \cos \beta \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \cos \beta \sin \alpha} W$$

Considerando un coeficiente de rozamiento ficticio $\mu' = \mu \cos \beta$ entonces

$$P = -\frac{\sin \alpha - \mu' \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu' \sin \alpha} W$$

Y se llega también a las expresiones

$$P = \tan(\alpha + \varphi') \cdot W \quad M = W \cdot R \cdot \tan(\alpha + \varphi')$$

5. Uniones Atornilladas

5.1. Rigidez del perno

La rigidez elástica implica que aplicando una fuerza P sobre un material elástico, éste se deforma una cantidad proporcional a Δx . Esta constante de proporcionalidad se conoce como rigidez k , de modo que $P = k \cdot \Delta x$. En el caso de un perno, éste se divide en una parte sin roscar o espiga y una parte roscada o cuerda. El diámetro de la espiga es el diámetro exterior de la rosca d , y la cuerda se considera como una sección circular de sección equivalente al área de esfuerzo a tracción, con diámetro d_2 . Las longitudes de la espiga y de la cuerda son respectivamente l_1 y l_2 (figura 5.1).

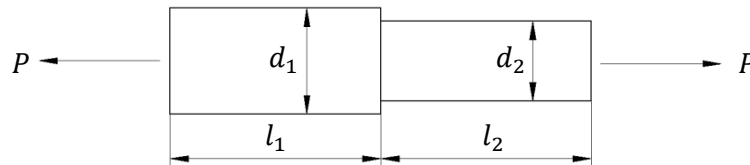


Figura 5.1.

Las áreas de ambas secciones serán A_1 y A_2 . Entonces para la tensión tendremos que

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \Delta l = \frac{\sigma E}{l}$$

Considerando una carga P a tracción sobre el perno entonces para cada zona se tiene que

$$\Delta l_1 = \frac{P \cdot l_1}{A_1 \cdot E} \quad \Delta l_2 = \frac{P \cdot l_2}{A_2 \cdot E}$$

Sumando ambas deformaciones

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = P \left(\frac{l_1}{A_1 \cdot E} + \frac{l_2}{A_2 \cdot E} \right) = P \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = \frac{P}{k_p}$$

Donde k_p es la rigidez global del perno y se calcula a partir de las rigideces de sus partes como

$$\frac{1}{k_p} = \sum \frac{1}{k_i} \quad k_i = \frac{A_i E}{l_i}$$

5.2. Rigidez de la junta

Mientras que el vástago (en este caso el perno) al apretarse está trabajando a tracción, la junta estará trabajando a compresión. Las diferentes partes de la junta están también en serie, del mismo modo que en el perno, así que se puede aplicar la misma forma de asociación de rigideces.

Considerando únicamente la primera zona, la más cercana al cabezal, la concentración de tensiones en la zona cercana al collarín, de diámetro D tiene una tensión mucho mayor que en una zona más alejada. Sucede lo mismo en el otro extremo de la junta. Se estipula que la zona afectada por la tensión es cónica, de ángulo α , y parte desde ambos extremos del perno, de modo que se produce una inversión en la sección central de la junta.

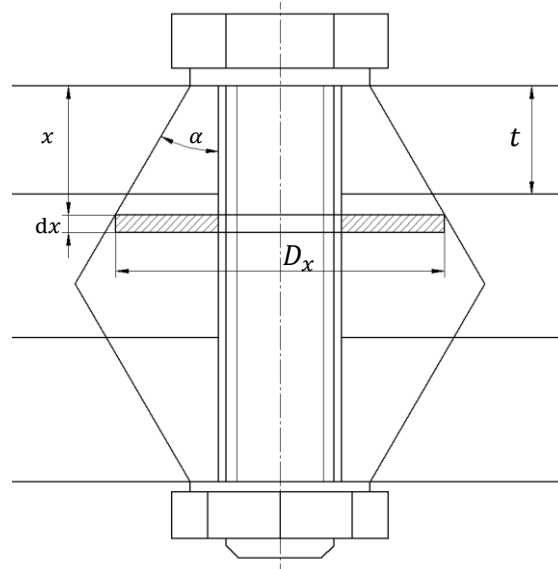


Figura 5.2. Elemento diferencial de la junta.

Considerando un elemento diferencial de la junta, a una distancia x del extremo del cabezal, de espesor dx y diámetro D_x entonces

$$D_x = D + 2x \cdot \tan \alpha \quad S_x = \frac{\pi}{4} \cdot (D_x^2 - d^2)$$

Donde d es el diámetro nominal del tornillo. Aplicando la misma ley que en el caso anterior:

$$\Delta dx = \frac{\sigma}{E} dx = \frac{P}{S_x E} dx = \frac{4P}{\pi E (D + 2x \tan \alpha)^2 - d^2} dx$$

La deformación total de la primera zona Δt_1 será

$$\Delta t_1 = \int_0^t \frac{4P}{\pi E (D + 2x \tan \alpha)^2 - d^2} dx$$

Puede resolverse la integral y se obtiene que

$$\Delta t_1 = \frac{P}{\pi E d \tan \alpha} \ln \left(\frac{D + 2t \tan \alpha - d}{D + 2t \tan \alpha + d} \cdot \frac{D + d}{D - d} \right)$$

Y la rigidez del primer tramo de la junta k_{j1} será

$$k_{j1} = \frac{\pi E d \tan \alpha}{\ln \left(\frac{D + 2t \tan \alpha - d}{D + 2t \tan \alpha + d} \cdot \frac{D + d}{D - d} \right)}$$

Normalmente para metales el ángulo de la zona cónica afectada por la tensión es de $\alpha \approx 30^\circ$ y por lo tanto

$$k_{j1} = \frac{0,57735 \cdot \pi E d}{\ln \left(\frac{1,1547t + D - d}{1,1547t + D + d} \cdot \frac{D + d}{D - d} \right)}$$

Para calcular cualquier otra zona habrá que utilizar $D = D'$ donde D' es el diámetro de la sección más pequeña del cono que delimita la zona, y la longitud t correspondiente. Donde se produce la inversión (punto medio) se separará la junta en dos zonas (figura 5.3).

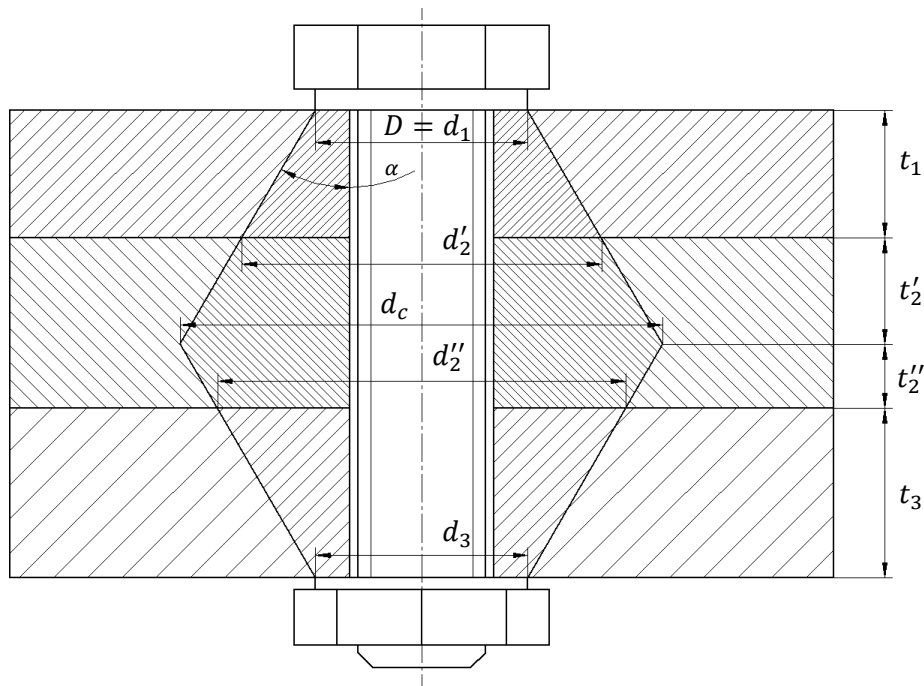


Figura 5.3.

5.3. Resistencia de tornillos o pernos

Carga límite F_p : Fuerza máxima que un perno puede resistir sin experimentar deformación permanente.

Resistencia límite $S_p = F_p / A_t$. En el caso de pernos y tornillos $S_p \approx 0,85 \cdot S_y$.

En el cabezal de un tornillo, según la normativa ISO, aparecen dos números enteros n_1 y n_2 correspondientes a

$$n_1 = \text{Int} (S_{ut} [\text{MPa}] \cdot 10^{-2}) \quad n_2 = \text{Int} \left(\frac{S_y}{S_{ut}} \cdot 10 \right)$$

Los fabricantes no dan los valores de resistencias medias, sino los valores de resistencia mínimos.

5.4. Uniones atornilladas

Desde el punto de vista del tornillo o perno, al aplicar la tuerca para realizar la unión éste se tensiona a tracción hasta una carga F_i llamada precarga, provocando una deformación Δl_1 . Simultáneamente la junta se comprime una cantidad Δl_2 , y soporta la misma precarga F_i .

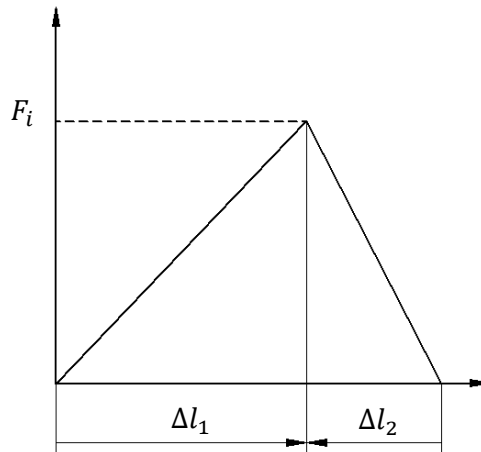


Figura 5.4.

Sometiendo la unión a una carga de tracción P , el tornillo sigue traccionando, pero la junta, al traccionar, se descomprime. La deformación de ambos elementos, ahora unidos, será Δl . Las cargas totales que soportan serán

$$P_t = k_t \Delta l$$

$$P_j = k_j \Delta l$$

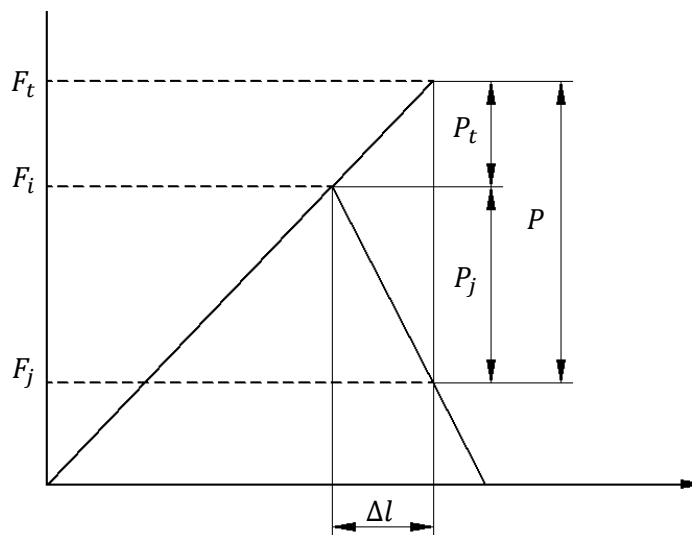


Figura 5.5.

De este modo se puede encontrar el total de carga que soporta el tornillo, puesto que $P = P_t + P_j$, entonces

$$P_t = \frac{k_t}{k_t + k_j} P = C \cdot P$$

Del mismo modo, la fracción soportada por la junta es

$$P_j = (1 - C)P$$

La carga total soportada por cada elemento será

$$F_t = F_i + P_t \quad F_j = F_i - P_j$$

Hay que recordar que la junta se descomprimía al cargarla, y por eso la carga total que soporta es menor que la precarga. La tensión en el tornillo será entonces

$$\sigma_t = \frac{F_t}{A_t} = \frac{F_i + P_t}{A_t} = \frac{F_i + C \cdot P}{A_t}$$

La resistencia límite, a partir de la cual se produciría deformación permanente es

$$S_p = \frac{F_i + C \cdot n \cdot P}{A_t}$$

Donde n se define como el factor de carga, que indica la cantidad de veces mayor que puede ser la carga aplicada.

$$n = \frac{S_p A_t - F_i}{C \cdot P}$$

Deberá comprobarse entonces que se cumpla la condición $n > 1$. Adicionalmente se considera el factor de carga a la estanqueidad o factor de carga contra la separación de la junta n_e (el nombre del factor de carga a la estanqueidad viene de la posibilidad de utilizar juntas para mantener compartimentos estancos). Si la carga P fuese suficientemente grande el diagrama de cargas quedaría como se muestra en la figura 5.6.

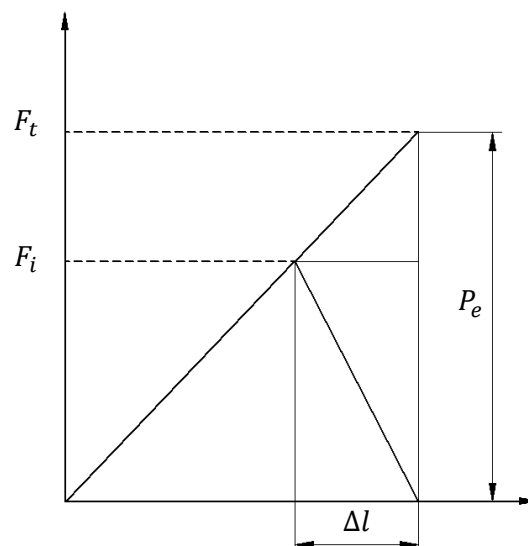


Figura 5.6.

En este caso se tendrá que $P_j = (1 - C)P_e = F_i$, siendo P_e la carga límite, y por lo tanto

$$P_e = \frac{F_i}{1 - C}$$

A partir de aquí se puede definir

$$n_e = \frac{P_e}{P} = \frac{F_i}{(1 - C)P}$$

En este punto la junta no tiene carga total alguna. Si se carga por encima de este valor entonces se producirá separación en la junta.

Se considera que los tornillos tienen poca plasticidad y por lo tanto, aunque se supere el valor límite S_p el tornillo seguirá trabajando en unas condiciones aproximadamente normales.

El valor de la precarga dependerá del tipo de unión que se quiera producir. En el caso de una unión desmontable la precarga tendrá un valor $F_i = 0,75F_p$ donde $F_p = S_p A_t$. Para una unión permanente se toma el valor $F_i = 0,9F_p$. Aunque son precargas elevadas, el tornillo habitualmente tiene mucha más flexibilidad que la junta, y por lo tanto la mayor parte de la carga exterior la soporta la junta.

5.5. Estudio de la fatiga en la unión atornillada

El elemento más castigado de forma estática, como ya se ha comprobado, es el tornillo o el perno, pues la junta se descarga al aplicar la carga externa. La fatiga repercutirá entonces en mayor medida sobre el tornillo. Dado el diagrama de tensiones (figura 5.7) entonces se tiene que

$$\sigma_m = \sigma_i + \sigma_a \quad \sigma_a = \frac{1}{2} \frac{P_t}{A_t}$$

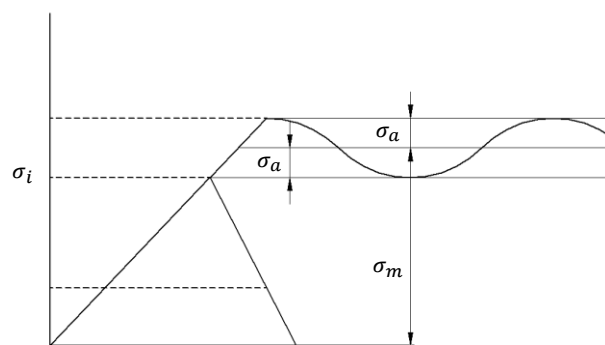


Figura 5.7.

El estudio de fatiga se puede realizar utilizando la recta de Goodman (figura 5.8). Esta recta viene dada por la ecuación

$$\frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_{ut}} = 1$$

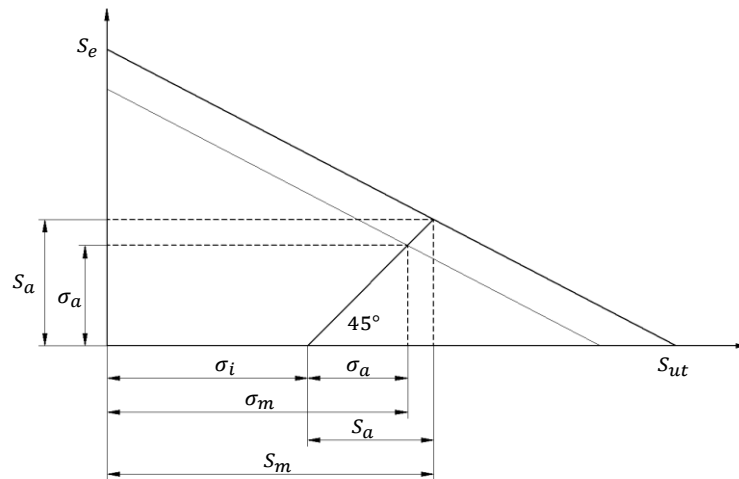


Figura 5.8.

Donde S_a y S_m son los límites de amplitud y tensión media a fatiga respectivamente. Aplicando el coeficiente de seguridad n (recta paralela) se tendrá una amplitud $\sigma_a = S_a/n$ y por lo tanto

$$\frac{n\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_i + n\sigma_a}{S_{ut}} = 1$$

Y desarrollando esta última expresión se obtiene

$$n = \frac{(S_{ut} - \sigma_m + \sigma_a)S_e}{(S_{ut} + S_e)\sigma_a}$$

5.6. Centroide de un grupo de pernos

La posición del centroide G de un grupo de pernos, cada uno de ellos de posición (x_i, y_i) y área A_i como el mostrado en la figura 5.9 se puede calcular como

$$x_G = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} \quad y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

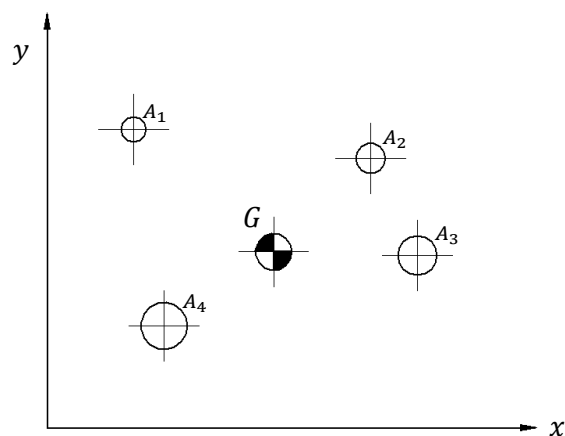


Figura 5.9.

5.7. Carga cortante debida a cargas excéntricas

Dado el sistema de la figura 5.10, la carga P puede reemplazarse por una carga de igual valor, dirección y sentido situada en el centroide G y un par de valor $M = mP$, siendo m la distancia que separa al centroide G de la línea de aplicación de la carga P .

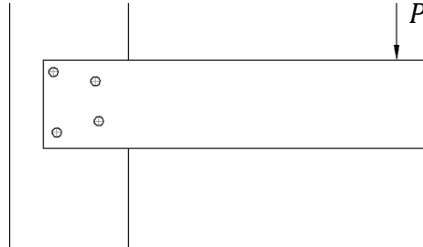


Figura 5.10.

Estos a su vez se pueden reemplazar por dos cargas en cada perno, uno de igual sentido y dirección que la carga P y otra perpendicular a la recta de unión entre el perno y el centroide, siguiendo el sentido del momento M , como se muestra en la figura 5.11.

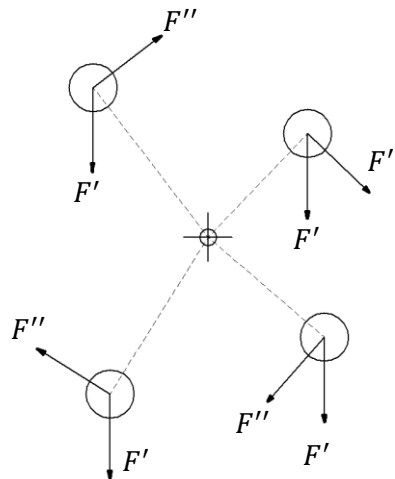


Figura 5.11.

Se define entonces la carga directa o cortante primaria $F'_i = P/n$ donde n es el número de pernos.

También se tendrá $M = mP = \sum F''_i r_i$ y para repartir el momento total M en partes iguales se deberá cumplir que $F''_i / r_i = \text{cte}$, donde F''_i son las cargas de momentos o cortantes secundarias. Considerando ambas cargas sobre los pernos se puede hallar cuál es el perno sometido a una mayor resultante. La tensión tangencial de ese elemento será $\tau = F/A$, donde F es la resultante sobre ese perno y A su sección.

6. Uniones forzadas

6.1. Apriete

Este tipo de unión se utiliza típicamente para piezas de sección circular. En la figura 6.1 se muestra a la izquierda una polea unida a un eje mediante este modo. La unión forzada consiste en aplicar un apriete entre las dos piezas que se quieren unir. Un caso típico se da en la llantas de las ruedas de ferrocarril, figura 6.1 a la derecha. Para realizar la unión se enfría o calienta una de las piezas, de forma que se produzca un juego entre ellas, y una vez en posición, al volver a temperatura ambiente, se produce el apriete deseado.

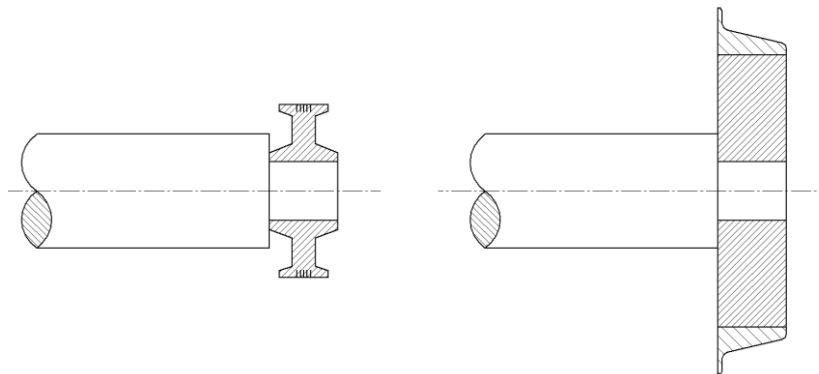


Figura 6.1. Polea y llanta de ferrocarril. Ambas piezas están unidas a sus respectivos ejes mediante unión forzada.

El estudio de este caso se realizará mediante el anillo de la figura 6.2, de radio interior R_i y radio exterior R_e . Considerando el elemento diferencial ampliado en la figura, a una distancia ρ del centro, de dimensiones $d\rho$, $d\theta$ y espesor unitario debidas a las presiones exteriores que actúan sobre el anillo, este elemento presentará unas tensiones radiales (intuitivamente a compresión) y unas tensiones tangenciales como indica la figura. Estas tensiones tangenciales pueden descomponerse en una componente radial y una tangencial. Las componentes normales de ambas caras se anularán entre ellas, y la componente radial de cada una de ellas será $\sigma_t \sin d\theta/2$.

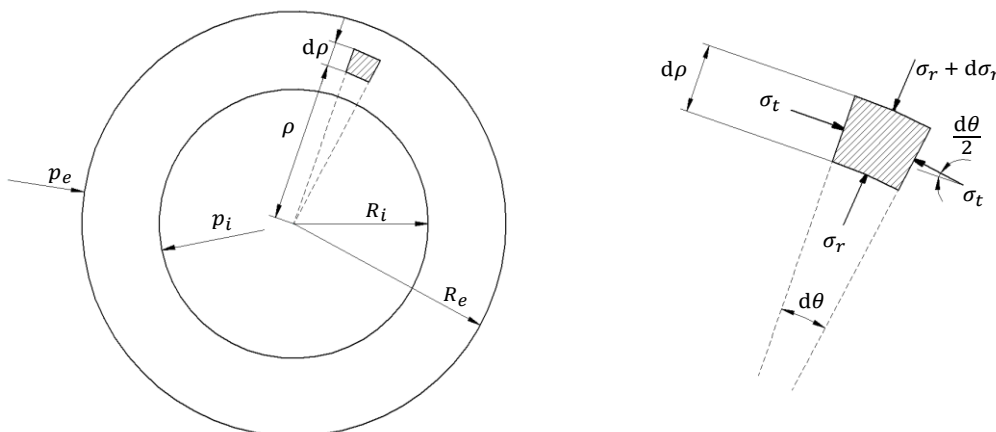


Figura 6.2. Elemento diferencial del anillo y condiciones de contorno.

Aplicando equilibrio al elemento diferencial considerado, se obtiene

$$(\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (\rho + d\rho) \cdot d\theta - \sigma_r \cdot \rho \cdot d\theta - 2\sigma_t \sin \frac{d\theta}{2} \cdot d\rho = 0$$

Considerando que $d\theta \ll 1$ y despreciando los diferenciales de segundo orden se obtiene

$$\sigma_r - \sigma_t = -\rho \cdot \frac{d\sigma_r}{d\rho} \quad (6.1)$$

Puesto que todas las sollicitaciones son radiales, el estado tensional de la pieza es de tensión plana, y por lo tanto la deformación radial ε_d es constante para todo ρ . Entonces se tiene que

$$\varepsilon_l = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_t) \Rightarrow \sigma_r + \sigma_t = -\frac{\varepsilon_l E}{\nu}$$

$$\sigma_r + \sigma_t = 2C_1 \quad (6.2)$$

Combinando las ecuaciones (6.1) y (6.2) se puede llegar a la expresión

$$2\rho\sigma_r + \rho^2 \cdot \frac{d\sigma_r}{d\rho} = 2C_1\rho$$

El primer miembro de la igualdad es $d(\sigma_r\rho^2)/d\rho$, entonces se puede integrar separando las variables

$$d(\sigma_r\rho^2) = 2C_1\rho \cdot d\rho \Rightarrow \sigma_r\rho^2 = C_1\rho^2 + C_2$$

$$\sigma_r = C_1 + \frac{C_2}{\rho^2} \quad (6.3)$$

Y también

$$\sigma_t = 2C_1 - \sigma_r \Rightarrow$$

$$\sigma_t = C_1 - \frac{C_2}{\rho^2} \quad (6.4)$$

Para encontrar ambas constantes, C_1 y C_2 , se aplicaran las condiciones de contorno siguientes (figura 6.2):

- Para $\rho = R_i$ entonces $\sigma_r = -p_i$
- Para $\rho = R_e$ entonces $\sigma_r = -p_e$

Aplicando estas condiciones a la ecuación (6.3) se obtiene

$$C_1 = \frac{R_i^2 p_i - R_e^2 p_e}{R_e^2 - R_i^2} \quad C_2 = \frac{R_e^2 R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} (p_e - p_i)$$

Sustituyendo estas constantes en las ecuaciones (6.3) y (6.4) quedan

$$\sigma_r = \frac{R_i^2 p_i - R_e^2 p_e}{R_e^2 - R_i^2} + \frac{R_e^2 R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \frac{p_e - p_i}{\rho^2} \quad (6.5)$$

$$\sigma_t = \frac{R_i^2 p_i - R_e^2 p_e}{R_e^2 - R_i^2} - \frac{R_e^2 R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \frac{p_e - p_i}{\rho^2} \quad (6.6)$$

Ejemplo 6.1

- a) ¿A qué diámetros interior y exterior debe ser mecanizado el tubo *B* de la figura 6.3 para que cuando circule por el mismo un fluido a la presión de 60 MPa dichos diámetros tomen, respectivamente, los valores de 40 mm y 80 mm? Considera $E = 215$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ y presión exterior $p_e = 0$ Pa.
- b) Si antes de circular fluido por el tubo *B* se le ajusta sin presión otro tubo exterior *C* del mismo material, de diámetro exterior 100 mm, ¿qué presión p_u aparecerá entre ambos tubos cuando circule por el interior un fluido a la presión de 60 MPa? ¿Cuánto valdrá el diámetro exterior del tubo *C* en esta situación de funcionamiento?

Resolución

Las deformaciones radiales δ provocarán deformaciones tangenciales ε_t en el contorno del tubo. En concreto, en la cara exterior la deformación será, considerando que $\delta_e \ll R_e$

$$\varepsilon_{te} = \frac{2\pi R_e - 2\pi(R_e - \delta_e)}{2\pi(R_e - \delta_e)} = \frac{\delta_e}{R_e}$$

Y también se tiene que

$$\varepsilon_{te} = \frac{1}{E}(\sigma_{te} - \nu\sigma_{re})$$

Por lo tanto

$$\delta_e = \frac{R_e}{E}(\sigma_{te} - \nu\sigma_{re})$$

Las tensiones exteriores σ_{te} y σ_{re} se pueden evaluar a partir de las expresiones (6.5) y (6.6), sustituyendo $\rho = R_e = 40$ mm, y se obtiene

$$\sigma_{te} = 40 \text{ MPa} \quad \sigma_{re} = 0 \text{ Pa}$$

Por lo tanto la deformación radial exterior será

$$\delta_e = 7,44186 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 7,44186 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Y el diámetro exterior de mecanizado es

$$D_e = 2 \cdot (40 - 7,44186 \cdot 10^{-3}) = 79,985 \text{ mm}$$

Del mismo modo se puede obtener el diámetro de mecanizado interior

$$\sigma_{ti} = 100 \text{ MPa} \quad \sigma_{ri} = -60 \text{ MPa} \quad \delta_i = 10,9767 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

$$D_i = 39,978 \text{ mm}$$

En el segundo apartado, considerando ambos tubos como uno solo, en $\rho = 40 \text{ mm}$, la tensión radial σ_r equivale a la presión de compresión entre ambos tubos.

$$-p_u = \sigma_r(\rho = 40 \text{ mm}) = \frac{20^2 \cdot 60}{50^2 - 20^2} + \frac{50^2 \cdot 20^2}{50^2 - 20^2} \cdot \frac{-60}{40^2} = -6,429 \text{ MPa}$$

$$p_u = 6,429 \text{ MPa}$$

En el exterior del tubo C la tensión radial y la tensión tangencial serán

$$\sigma_r(\rho = 50 \text{ mm}) = \frac{20^2 \cdot 60}{50^2 - 20^2} + \frac{50^2 \cdot 20^2}{50^2 - 20^2} \cdot \frac{-60}{50^2} = 0 \text{ Pa}$$

$$\sigma_t(\rho = 50 \text{ mm}) = \frac{20^2 \cdot 60}{50^2 - 20^2} - \frac{50^2 \cdot 20^2}{50^2 - 20^2} \cdot \frac{-60}{50^2} = 22,86 \text{ MPa}$$

Y la deformación radial exterior será

$$\delta_e = \frac{50}{210 \cdot 10^3} \cdot 22,86 = 5,443 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Por lo tanto el diámetro exterior del tubo C será

$$D_e = 100,011 \text{ mm}$$

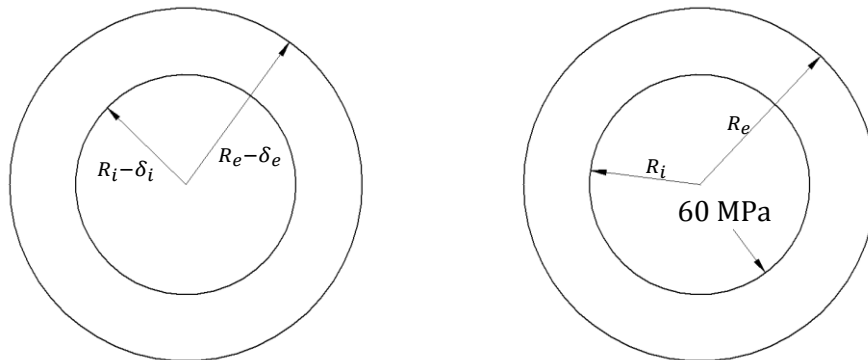


Figura 6.3. Esquema del problema.
Estado inicial (izquierda) y final (derecha).

7. Resortes Helicoidales

7.1 Generalidades

Las dimensiones de un resorte son el diámetro medio D , el diámetro del alambre d y el paso p .

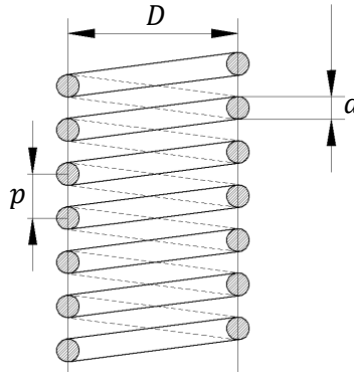


Figura 7.1. Dimensiones en un resorte.

7.2 Equilibrio del resorte

Considerando sólo un tramo del resorte, la carga P aplicada en su extremo se equilibra con una reacción P y un momento torsor $M_t = P \cdot D/2$ situados como se indica en la figura 7.2.

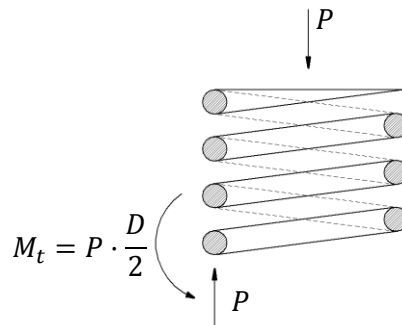


Figura 7.2. Esfuerzos en el alambre.

La mayor tensión se encuentra en el punto más interior del alambre, debido a la dirección de la torsión y de la reacción. La tensión de cortadura que se inducirá en el alambre debido al momento torsor y a la tensión cortante será

$$\tau = \tau_t + \tau_c = \frac{M_t}{W_0} + \frac{P}{S} = \frac{16 \cdot \frac{PD}{2}}{\pi d^3} + \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{0,5}{C}\right)$$

Donde $C = D/d$ es el índice de resorte, que en cierto modo indica el grado de curvatura del muelle $4 < C < 16$, y W_0 es el módulo resistente

$$W_0 = \frac{I_0}{y} = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16}$$

También se define el factor de esfuerzo cortante K_s

$$K_s = 1 + \frac{0,5}{C}$$

Hay que notar que aunque el muelle trabaja a compresión, el alambre trabaja a cortante. Debido a la curvatura, el alambre presenta una cierta concentración de tensiones adicional en el lado interior del muelle, que se modeliza mediante la aplicación de la constante de Wahl K_W , o el factor de Bergsträsser K_B , que valen

$$K_W = \frac{4C - 1}{4C - 4} + \frac{0,615}{C} \quad \text{ó} \quad K_W = \frac{4C^2 + C - 1}{4C(C - 1)} \quad K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3}$$

Para $4 \leq C \leq 16$ la diferencia entre ellas nunca supera el 1,4%, pudiéndose usar una u otra de forma indiferente.

Estos factores son similares al factor de concentración de tensiones K_t , y se aplicarán en lugar de K_s en el caso de que el resorte trabaje a fatiga.

El factor de concentración de tensiones del muelle podría considerarse como

$$K_{t \text{ (muelle)}} = K_0 = \frac{K_B}{K_s} \quad \text{ó} \quad \frac{K_W}{K_s}$$

7.3 Deformación de los resortes helicoidales

La ley de Hooke en torsión es $\tau = G\gamma$, donde γ es el deslizamiento transversal, que no corresponde al ángulo girado, sino al arco de desplazamiento para una longitud unitaria.

$$\gamma = \frac{\overline{BB'}}{L}$$

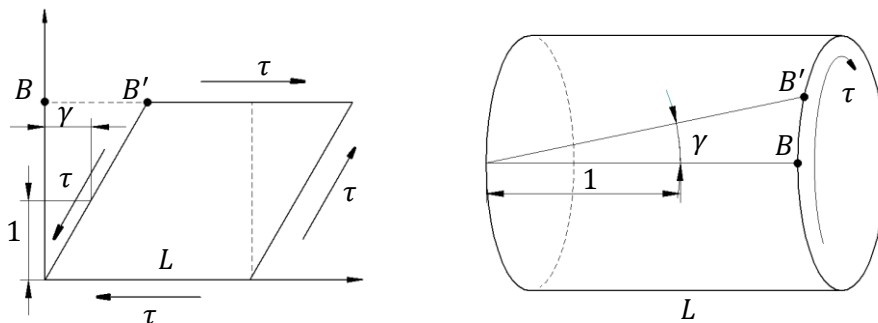


Figura 7.3. Deslizamiento transversal γ .

Si se desenrolla el alambre de un muelle se obtiene la figura 7.4. La longitud del alambre es $L = \pi DN_a$, donde D es el diámetro del muelle y N_a es el número de espiras activas (espiras que trabajan en el resorte). De la figura 7.4 puede deducirse que

$$\overline{BB'} = \gamma L = \varphi \frac{d}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\tau\pi DN_a}{Gd}$$

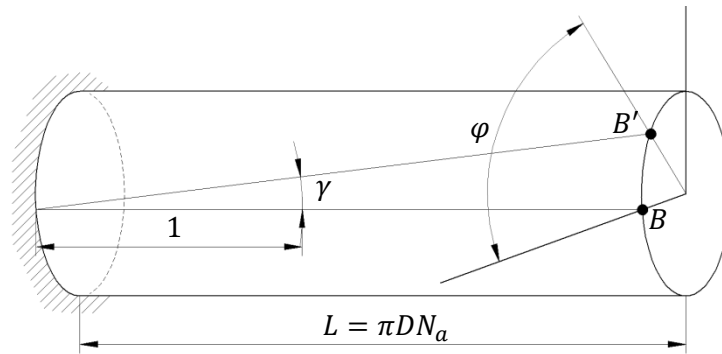


Figura 7.4. Desarrollo del alambre de un resorte.

Recordando el segundo teorema de Castigliano, que dice que la deformación en la dirección de una carga aplicada es la variación de la energía de deformación debida a esa carga

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}$$

Entonces aplicándolo al muelle, la energía de deformación de torsión es, recordando que $T = PD/2$ y $\tau = T/I_0$

$$U_t = \frac{1}{2} T \phi = \frac{1}{2} \frac{PD}{2} \frac{2\pi DN_a}{Gd} \frac{16PD}{2\pi d^3} = \frac{4P^2 D^3 N_a}{Gd^4}$$

La energía de deformación a cortante es, considerando que $\delta = \gamma L$

$$U_c = \frac{1}{2} P \delta = \frac{1}{2} P \frac{\tau}{2} L = \frac{PL}{2G} \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{2P^2 \pi DN_a}{G\pi d^2} = \frac{2P^2 DN_a}{Gd^2}$$

Y por lo tanto la energía de deformación total será la suma de ambas

$$U = \frac{4P^2 D^3 N_a}{Gd^4} + \frac{2P^2 DN_a}{Gd^2}$$

La deformación y en la dirección de la carga aplicada, por el teorema de Castigliano mencionado anteriormente, es

$$y = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{8PD^3 N_a}{Gd^4} + \frac{4PD N_a}{Gd^2} = \frac{8PD^3 N_a}{Gd^4} \left(1 + \frac{1}{2C^2}\right)$$

El índice del muelle $C = D/d$ oscila entre $4 \leq C \leq 16$, y por lo tanto, incluso en el caso de que $C = 4$ el término $1/(2C^2) \ll 1$, y se considera que

$$y = \frac{8PD^3 N_a}{Gd^4} \Rightarrow P = \frac{Gd^4}{8D^3 N_a} y$$

De modo que la rigidez del muelle es

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3 N_a}$$

7.4 Aspectos geométricos

Terminología	Simple o Plano	Simple Esmerilado (Amolado)
Espiras de extremo	0	1
Total de espiras	$N = N_a$	$N = N_a + 1$
Longitud libre	$L_0 = pN_a + d$	$L_0 = p(N_a + 1)$
Longitud cerrada	$L_c = d(N_a + 1)$	$L_c = d(N_a + 1)$

- **Espiras de extremo:** Posibilidad de que haya una espira cortada en el extremo del muelle, que permite un mayor contacto en las bases. No trabajan, pues siempre están en contacto con la base.
- **Espiras activas N_a :** Número de espiras que trabajan en el muelle.
- **Paso p :** Distancia en la dirección axial entre dos puntos homólogos.
- **Longitud libre L_0 :** Longitud del muelle sin carga.
- **Longitud cerrada L_c :** Longitud del muelle cuando todas las espigas están en contacto. En este caso el muelle se comporta como un sólido rígido.



Figura 7.5. Resorte plano (izquierda) y resorte esmerilado (derecha).

7.5 Resistencia a tracción de los aceros comunes para resortes

El límite último a tracción de un alambre se calcula como

$$S_{ut} = \frac{A}{d^m}$$

Algunos valores de A (intercepción) y m (exponente) se muestran en la tabla siguiente.

Material	ASTM	SI (MPa)		Imperial (kpsi)	
		A	m	A	m
Alambre para cuerda musical	A228	2060	0,163	186	0,163
Alambre revenido en aceite	A229	1610	0,193	146	0,193
Alambre estirado duro	A227	1510	0,201	137	0,201
Al Cromo – Vanadio	A232	1790	0,155	173	0,155
Al Cromo – Silicio	A401	1960	0,091	218	0,091

En el Sistema Internacional el diámetro del alambre d se introduce en milímetros, en el sistema Imperial se introduce en pulgadas.

El esfuerzo torsional máximo admisible para aplicaciones estáticas vendrá dado por

$$\tau_{adm} = \begin{cases} 0,45 \cdot S_{ut} & \text{aceros al carbono estirados en frío} \\ 0,50 \cdot S_{ut} & \left\{ \begin{array}{l} \text{aceros templados y revenidos} \\ \text{aceros de baja aleación} \end{array} \right. \\ 0,35 \cdot S_{ut} & \text{acero inox austenítico y aleaciones no férricas} \end{cases}$$

7.6 Resorte de tracción de tipo cerrado

La concentración de tensiones en el gancho de los extremos será

$$K = \frac{r_m}{r_i}$$

Donde r_i y r_m son los radios interior y medio de los ganchos respectivamente.

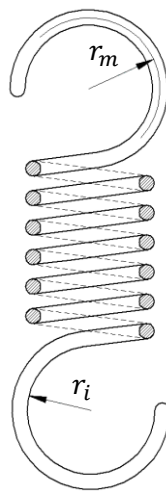


Figura 7.6. Resorte de tracción de tipo cerrado.

Este tipo de resortes tiene una precarga, debida a la torsión producida durante la fabricación para forzar a que sin carga se mantenga el muelle cerrado, que hace que la carga aplicada deba superar esta precarga para poder abrir el muelle. Al calcular esta precarga no debe aplicarse K_s puesto que, mientras no se abra, el resorte sólo trabaja a torsión.

Índice del resorte C	Intervalo de esfuerzos	
	MPa	kpsi
4	115 - 183	16,7 - 26,6
6	95 - 160	13,8 - 23,2
8	82 - 122	11,9 - 18,4
10	60 - 106	8,71 - 15,4
12	48 - 86	6,97 - 12,5
14	37 - 60	5,37 - 8,71
16	25 - 50	3,63 - 7,26

Por convenio, la longitud del cuerpo del resorte es $L_B = d(N_a + 1)$ y la longitud libre es $L_0 = L_B + 2D_i$.

7.7 Resortes torsionales

Así como el alambre de un resorte trabajando a tracción o compresión trabaja a torsión, el de un resorte torsional, como el de una pinza, trabaja a flexión.

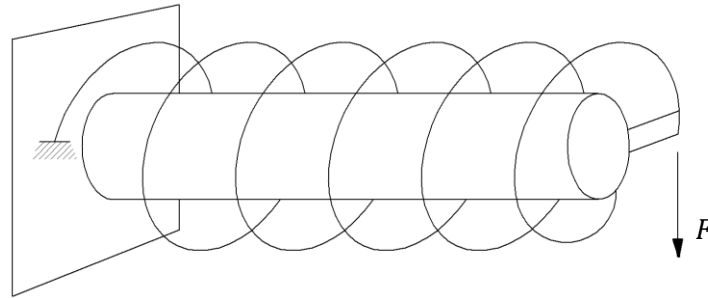


Figura 7.7. Resorte de torsión.

En la figura, la carga F generará un momento $M = F \cdot D/2$

En un muelle trabajando como se indica en la figura 7.7, el momento flector será constante a lo largo del muelle. La tensión normal máxima en el alambre es

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot \frac{d}{2} \quad \text{En fatiga: } \sigma_a = K_W \cdot \frac{M_a}{I} \cdot \frac{d}{2} \quad \text{ó} \quad \sigma_a = K_B \cdot \frac{M_a}{I} \cdot \frac{d}{2}$$

La constante de Wahl K_W , o el factor de Bergsträsser K_B , no se aplican a la tensión media σ_m en fatiga, aunque en la bibliografía (Shigley) sí que aparece así.

La tensión admisible del resorte será

$$\sigma_{adm} = \begin{cases} 0,78 \cdot S_{ut} & \text{aceros al carbono estirados en frío} \\ 0,87 \cdot S_{ut} & \text{aceros templados y revenidos} \\ 0,61 \cdot S_{ut} & \text{aceros de baja aleación} \\ & \text{acero inox austenítico y aleaciones no férricas} \end{cases}$$

Para obtener la rigidez del muelle torsional hay que considerar la figura 7.8.

$$d\varphi = \frac{1}{\rho} dx = \frac{M}{EI} dx = \frac{64M}{Ed^4\pi} dx \Rightarrow \int_0^\varphi d\varphi = \int_0^L \frac{64M}{Ed^4\pi} dx = \frac{64L}{Ed^4\pi} M \Rightarrow \varphi = \frac{64DN}{Ed^4} M$$

Puesto que $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$ $I = \frac{\pi d^4}{64}$ $L = \pi DN$

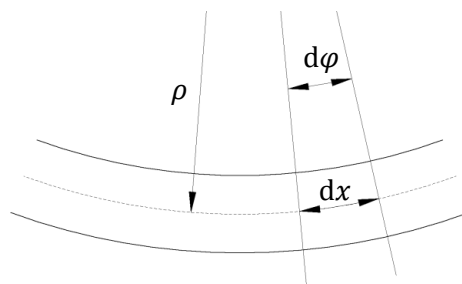


Figura 7.8. Deformación del alambre de un resorte torsional.

Entonces la rigidez del resorte torsional se define como

$$M = \frac{E d^4}{64DN} \varphi$$

El diámetro interior del muelle, una vez esté cargado, será

$$D'_i = \frac{N}{N'} D_i$$

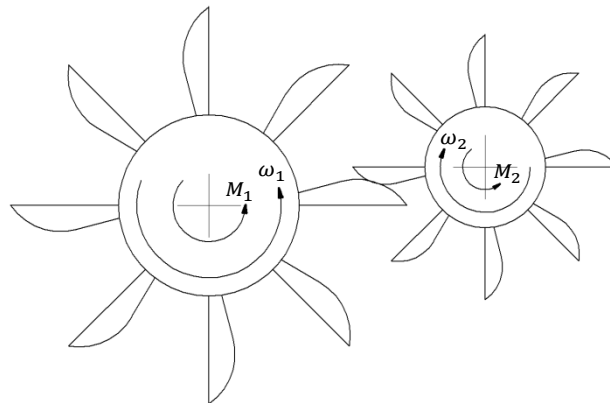
Donde N' es el número de espiras del resorte deformado (si ha girado dos vueltas tendrá dos espiras más). Para no entorpecer el recorrido del muelle, el diámetro de la espiga guía debería situarse aproximadamente entre

$$0,8D'_i \leq D_e \leq 0,9D'_i$$

8. Engranajes exteriores

8.1 Definición de engranaje

Un conjunto de palancas montadas sobre un eje entran sucesivamente en contacto con las montadas sobre otro eje, formando pares superiores que cumplen la condición de engrane, y de forma que cada pareja de palancas permanezca suficiente tiempo en contacto para que antes de que se suelten haya empezado el contacto entre las dos siguientes. Se llama engranaje al mecanismo formado por los dos conjuntos de palancas, y rueda dentada a la pieza formada por tan sólo uno de los dos conjuntos de palancas.



*Figura 8.1. Conjuntos de palancas formando un engranaje.
La rueda izquierda es la rueda motriz y la derecha la arrastrada.*

Un par cinemático superior es una fuerza de contacto que está aplicada de forma lineal o puntual, lo que resulta menos restrictivo que el par inferior, que es un par cinemático que está aplicado sobre una superficie.

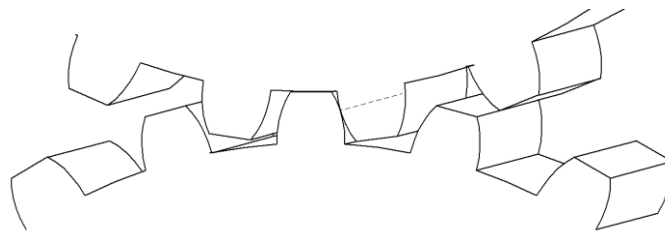


Figura 8.2. Contacto de par superior en la línea de contacto (línea discontinua).

La condición de engrane implica que la relación de transmisión sea constante. La relación de transmisión es la relación entre las velocidades angulares de salida y de entrada

$$\mu = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \text{cte}$$

Esta relación debe mantenerse constante, no sólo de forma global (debido al número de dientes), sino también durante todo el contacto entre dos palancas (debido a la forma de las palancas). Evidentemente, para que esto suceda, antes de que se separen las palas en contacto en un momento dado, debe producirse el contacto entre las dos palancas siguientes.

8.2 Centro instantáneo de rotación (CIR)

Estudiando el engranaje como un mecanismo 2D sin espesor, el CIR estará situado en la línea de centros de ambas ruedas dentadas, y también en la línea de presión (dirección de la fuerza) en el punto de contacto (figura 3).

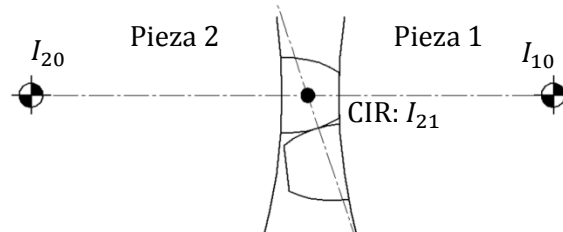


Figura 8.3. Posición del CIR, que varía con movimiento del engranaje.

Entonces se tiene que

$$\omega_1 \overline{I_{10}I_{21}} = \omega_2 \overline{I_{20}I_{21}} \Rightarrow \mu = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\overline{I_{10}I_{21}}}{\overline{I_{20}I_{21}}} = \text{cte}$$

8.3 Axoides

Situando un observador en la pieza 1, la pieza 2 avanzará a medida que gire sobre ésta. El lugar geométrico de centros instantáneos de rotación relativos referente a la pieza 1 es la trayectoria polar del CIR. Para que se cumpla la relación de transmisión durante todo el contacto la polar deberá ser una circunferencia.

En realidad, al tener las ruedas dentadas un grosor, habrá una línea de contacto en lugar de un punto de contacto, un eje instantáneo de rotación relativo, y la trayectoria polar se llama axoide, que será un cilindro. Los axoides de las dos ruedas dentadas de un engranaje ruedan entre ellos sin deslizar.

8.4 Perfiles conjugados

Los perfiles de los dientes que permiten cumplir la condición de relación de transmisión constante se les llama perfiles conjugados. Su fabricación se realiza mediante una herramienta cortante, con un perfil concreto, situada en un disco, que gira sin deslizar sobre el disco en el cual se quiere mecanizar el perfil, que será el conjugado del perfil de la herramienta cortante.

8.5 Perfil de evolvente de círculo

El perfil más utilizado es el de evolvente de círculo, que es su propio conjugado. Su fabricación es como la de todos los demás perfiles, pero en este caso el perfil de la herramienta es también el de evolvente de círculo. La forma de este perfil la da la trayectoria seguida por el extremo de un hilo enrollado sobre un cilindro base al desenrollarlo (figura 8.4).

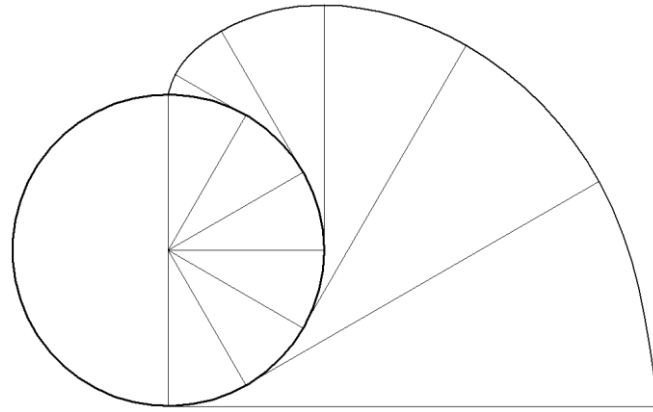


Figura 8.4. Generación de la curva evolvente de círculo.

8.6 Engrane de los perfiles de evolvente de círculo

Supóngase por un momento el engranaje teórico de la figura 8.5 formado por ruedas de un diente con perfil de evolvente de círculo.

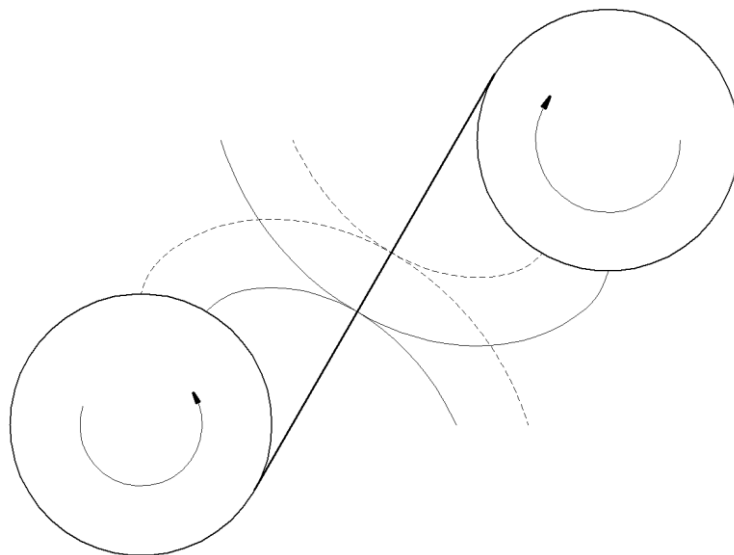


Figura 8.5.

En un instante de tiempo concreto (perfiles de línea continua) el contacto entre ambas ruedas se produce en un punto concreto. Un instante de tiempo posterior los perfiles se han desplazado (líneas discontinuas) y el contacto se produce en un punto diferente. Sin embargo, la línea de presión en ambos casos, y en todo momento, resulta ser la misma, y es el hilo generador de la evolvente de círculo (perpendicular a las curvas evolventes).

Esto implica que el CIR se encuentra también siempre en el mismo punto, y por lo tanto se cumple la condición

$$\mu = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\overline{I_{10}I_{21}}}{\overline{I_{20}I_{21}}} = \text{cte}$$

8.7 Propiedades del engrane de perfiles de evolvente de círculo

Se llama línea de engrane el lugar geométrico de puntos de contacto dibujados sobre la base. En general es una línea curva, y dada la condición de engrane, el punto I_{21} estará en el punto de corte con la línea de centros, y la línea de presión en cada punto de contacto (a lo largo del tiempo) deberá pasar por este punto para que se cumpla esta condición de engrane. El ángulo de presión α_v es el que forma la línea de presión en cada punto de contacto con la tangente a ambos axoides.

El perfil de evolvente de círculo otorga unas características al engrane que no posee ningún otro perfil.

- La línea de engrane es la recta tangente a los dos cilindros base.
- La línea de presión coincide con la línea de engrane.
- El ángulo de presión α_v es constante.
- El engrane se produce correctamente aunque varíe la distancia entre ejes.
- La relación de transmisión μ es constante e igual al cociente R_{1B}/R_{2B} (figura 8.6).

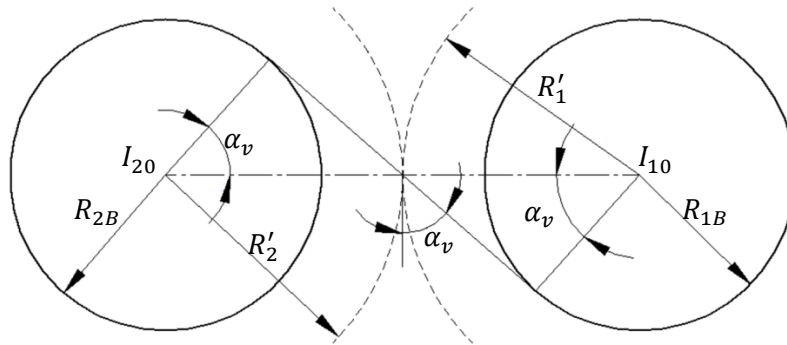


Figura 8.6.

Efectivamente, la relación de transmisión puede calcularse como

$$\mu = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{I_{10}I_{21}}{I_{20}I_{21}} = \frac{R'_1}{R'_2} = \frac{R_{1B} \cos \alpha_v}{R_{2B} \cos \alpha_v} = \frac{R_{1B}}{R_{2B}}$$

Puesto que, como ya se ha dicho, el ángulo de presión α es constante.

Que el ángulo de presión sea constante también implica que la componente radial de la fuerza de empuje en el contacto, que se contrarresta con reacciones en los ejes de las ruedas dentadas, también es constante, lo que elimina las vibraciones y los problemas de fatiga en los ejes. La componente tangencial de la fuerza de contacto será responsable del movimiento giratorio.

Aunque no es habitual variar la distancia entre ejes, la posibilidad de que varíe esta distancia permite un montaje más sencillo, pues otros perfiles necesitan mantener esta distancia con gran precisión.

8.8 Geometría del diente de evolvente

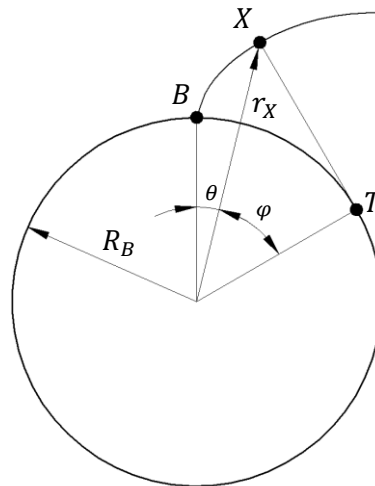


Figura 8.7.

$$\overline{XT} = R_B \tan \varphi \quad \overline{BT} = R_B(\varphi + \theta)$$

Pero el arco \overline{BT} es igual a la recta \overline{XT} (desarrollo del hilo) y por lo tanto se puede escribir $\theta = \tan \varphi - \varphi = \text{ev } \varphi$, donde $\text{ev } \varphi = \tan \varphi - \varphi$ es la función evolvente de φ .

8.9 Relación entre espesores del diente a distintas alturas del mismo

$$\left. \begin{aligned} \frac{e_x}{2} = R_x \beta_x \Rightarrow \beta_x = \frac{e_x}{2R_x} \\ \frac{e_y}{2} = R_y \beta_y \Rightarrow \beta_y = \frac{e_y}{2R_y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ev } \alpha_y - \text{ev } \alpha_x = \beta_x - \beta_y = \frac{e_x}{2R_x} - \frac{e_y}{2R_y} \Rightarrow$$

$$e_y = 2R_y \cdot \left(\frac{e_x}{2R_x} + \text{ev } \alpha_x - \text{ev } \alpha_y \right)$$

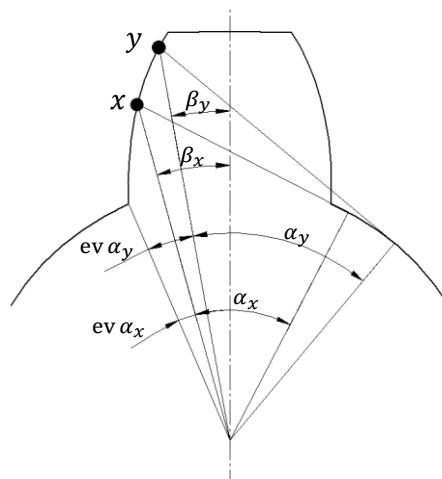


Figura 8.8. Cálculo del espesor del diente a una altura determinada.

Esta expresión permite evaluar el espesor del diente (que es un arco, no una línea recta) a cualquier altura, una vez se conozca el espesor a una altura conocida.

8.10 Paso

El paso se define como la distancia, medida como longitud de arco de circunferencia, entre dos puntos homólogos de la rueda dentada. Existen diferentes pasos en función de la altura (distancia al centro de la rueda), por ejemplo el paso base p_B medido sobre la circunferencia base, el paso medido en el axoide p' y el paso de cabeza p_C medido sobre la circunferencia de cabeza (figura 8.9).

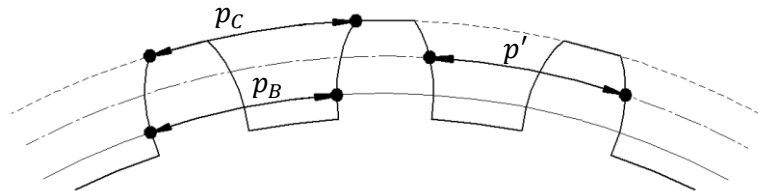


Figura 8.9. Diferentes pasos de una misma rueda dentada.

8.11 Cremallera de evolvente

La cremallera de evolvente puede definirse como una rueda dentada de paso p definido y de radio y número de dientes que tienden a infinito. La curvatura del diente pasa a ser nula y por lo tanto los dientes son rectilíneos (figura 8.10), hecho que permite definir un paso único para la cremallera.

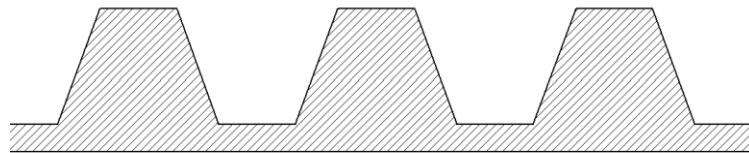


Figura 8.10. A diferencia de las ruedas dentadas, en la cremallera únicamente se puede definir un paso p

8.12 Tallado por generación

Consiste en utilizar una cremallera-herramienta que corte piezas circulares para generar sus dientes. También se utiliza un piñón-cortador, especialmente en el caso de coronas dentadas interiores, que no se pueden generar mediante una cremallera, o una fresa-cortadora. Las ventajas de la cremallera frente a otros sistemas son

- El paso p de la cremallera no depende de la altura (no depende de si se toma en la base, en el axoide o en la cabeza). Este paso está normalizado.
- El ángulo de presión α viene definido por la cremallera herramienta, pues los dientes de la cremallera son rectilíneos. Este ángulo de presión también es objeto de normalización.

8.13 Datos de generación

Los datos de generación son los que hay que proporcionar a un fabricante para que pueda realizar la rueda dentada deseada.

La línea media de una cremallera es la línea en la que el hueco entre dientes h mide lo mismo que el espesor del diente e , que es, evidentemente, la mitad del paso. En el Sistema Internacional en lugar del paso p se utiliza el módulo $m = p/\pi$.

A partir de la línea media está definida la altura de pie a_{p0} , donde termina el perfil de evolvente, y la altura de cabeza a_{c0} . Además, las herramientas tienen un suplemento de cabeza f que genera una profundidad mayor en la rueda dentada (juego de fondo j , que también lo tiene la herramienta) para que, una vez se produzca el engrane, las cabezas de los dientes nunca entren en contacto con el fondo. Por lo general en las figuras de este documento no aparece ni f (que sólo se usa en el caso de las herramientas) ni j (en las herramientas o las ruedas dentadas).

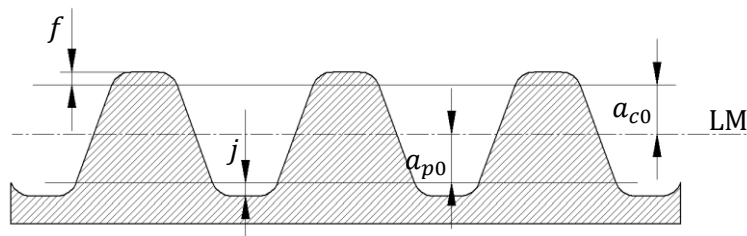


Figura 8.11. Línea media (LM) y dimensiones en la cremallera.

El ángulo de presión α en la cremallera es el ángulo formado por el diente con la vertical. Existen además dos tipos de dentadura, la normal y la rebajada.

	Dentadura normal	Dentadura rebajada
Ángulo de presión α	20°	20°
Paso p	$m\pi$	$m\pi$
Altura de cabeza a_{c0}	m	$0,75 \cdot m$
Altura de pie a_{p0}	m	$0,75 \cdot m$
Suplemento de cabeza f	$0,25 \cdot m$	$0,25 \cdot m$
Juego de fondo j	$0,25 \cdot m$	$0,25 \cdot m$

En un engranaje de dentadura rebajada el contacto entre dientes será más corto que en uno de dentadura normal, pero éstos son dientes más robustos.

8.14 Radio del axoide de generación o cilindro primitivo

Es el axoide de la rueda dentada durante la generación, es único y está determinado por el ángulo de presión de la rueda dentada (que si está normalizado será $\alpha = 20^\circ$). El axoide de generación, de radio R , es tangente al plano axoide de la cremallera-herramienta. Al haber rodadura pura entre los axoides, el paso de la rueda dentada que se está generando en el axoide de generación es el mismo que el paso de la cremallera p .

Si el número de dientes de la rueda es z entonces

$$pz = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{1}{2\pi} pz = \frac{1}{2} mz$$

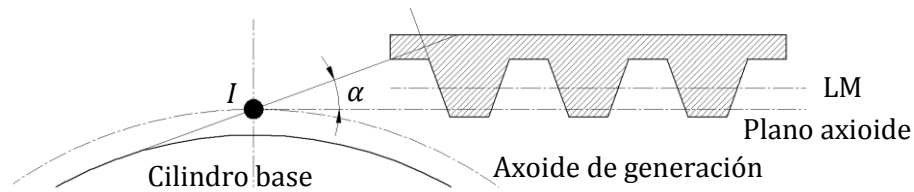


Figura 8.12. Axoide de generación, de radio R .

8.15 Tallado de ruedas dentadas con y sin deslizamiento

El desplazamiento v es la distancia que separa el axoide de la cremallera-herramienta de su línea media durante la generación. Es positivo cuando la línea media se aleja del cilindro primitivo. Por lo general se utiliza el coeficiente de desplazamiento $x = v/m$ que da una información adimensionalizada del desplazamiento.

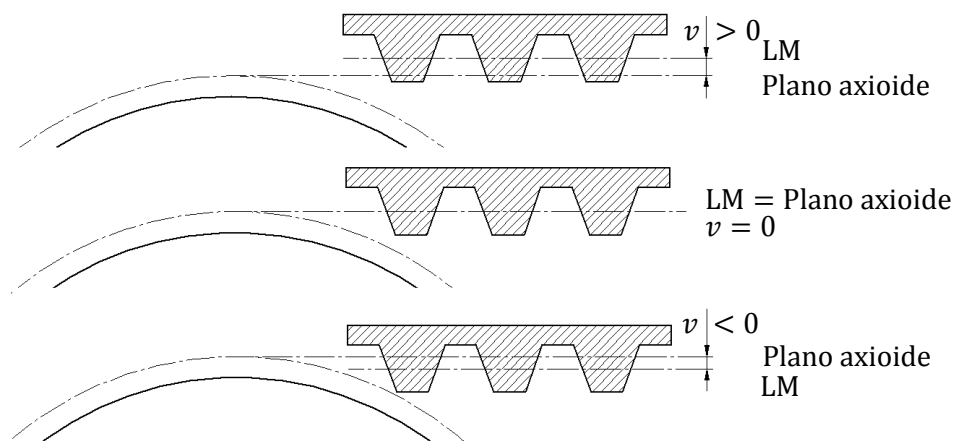


Figura 8.13. Desplazamientos de generación v .

8.16 Espesor del diente en la circunferencia primitiva

El punto Q_1 de la cremallera pasará en un instante posterior por el centro instantáneo de rotación I , y coincidirá con el punto Q_2 de la rueda dentada (figura 8.14). Por lo tanto el arco $\overline{IQ_1}$, que es el espesor e en el axoide de la rueda dentada, cumplirá que

$$e = \overline{IQ_1} = \overline{IQ_2} = \frac{p}{2} + 2v \tan \alpha$$

Utilizando los parámetros normalizados $p = m\pi$ y $v = xm$ la expresión anterior pasa a ser

$$e = m \left(\frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha \right)$$

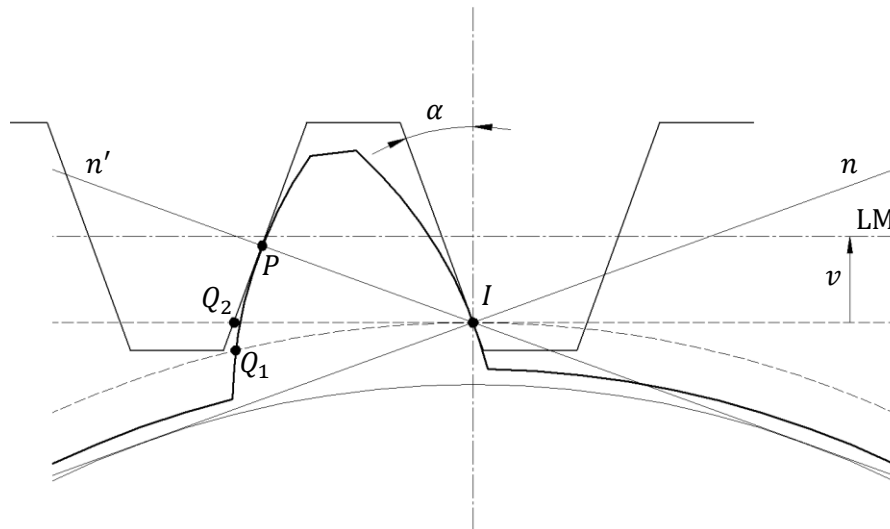


Figura 8.14. Espesor del diente en la circunferencia primitiva.

Suponiendo una rueda dentada con cabeza de punta, para la altura R_{ap} (radio de apuntamiento, figura 8.15) el espesor $e_a = 0$ de modo que la expresión de espesor vista en el apartado anterior pasa a ser

$$e_y = 2R_y \left(\frac{0}{2R_{ap}} + ev \alpha_L - ev \alpha_y \right) \Rightarrow e_r = 2r(ev \alpha_L - ev \alpha_r)$$

Donde α_L es el ángulo de apuntamiento. Utilizando estas dos ecuaciones particularizando para $r = R$ se puede hacer que

$$m \left(\frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha \right) = 2R(ev \alpha_L - ev \alpha)$$

Donde $R = mz/2$ es el radio del círculo primitivo y z es el número de dientes. Por lo tanto

$$ev \alpha_L = \frac{\pi}{2z} + \frac{2x}{z} \tan \alpha + ev \alpha$$

Finalmente se puede sustituir y se obtiene

$$e_r = 2r \left(\frac{\pi}{2z} + \frac{2x}{z} \tan \alpha + ev \alpha - ev \alpha_r \right)$$

Que nos da el espesor a cualquier radio en función de parámetros intrínsecos y de generación.

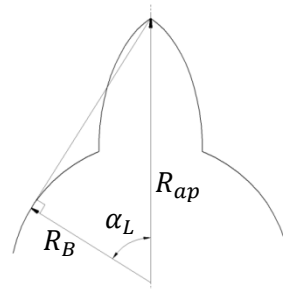


Figura 8.15. Diente con cabeza de punta.

8.17 Parámetros intrínsecos

Son parámetros propios de la rueda dentada que son invariables, es decir, una vez generada la rueda, independientemente de su posición, se mantienen constantes. Algunos de estos parámetros son el radio de cabeza R_c , el radio de fondo R_f , el radio del círculo base R_B , el paso en el círculo base p_B , el espesor del diente en el círculo base e_B y el radio límite de evolvente R_{ev} .

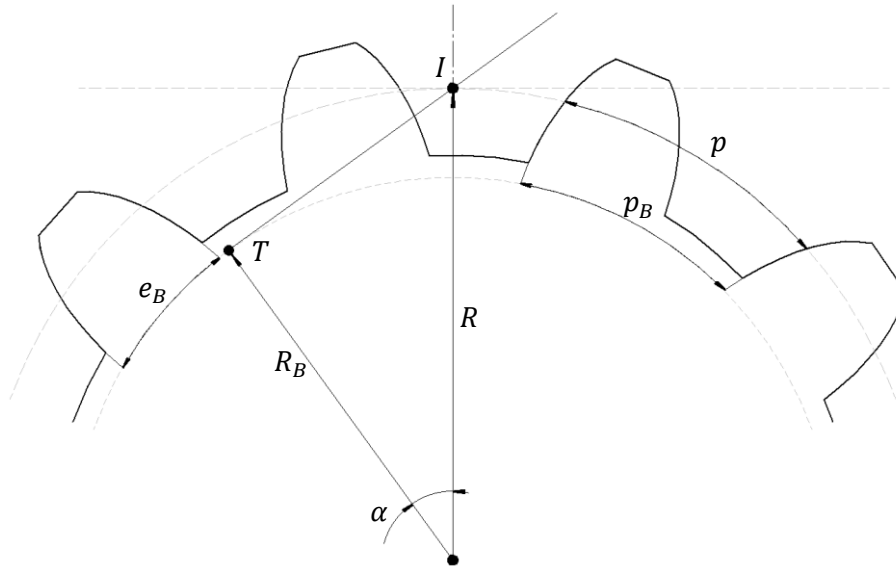


Figura 8.16. Algunos parámetros intrínsecos de una rueda dentada.

$$R_B = R \cos \alpha = \frac{mz}{2} \cos \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi R_B = p_B z \\ 2\pi R = p z \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{R_B}{R} = \cos \alpha = \frac{p_B}{p} \Rightarrow p_B = p \cos \alpha$$

$$e_B = 2R_B \left(\frac{e}{2R} + ev \alpha - ev \alpha_B \right) = 2R \cos \alpha \left(\frac{p}{2} + 2v \tan \alpha + ev \alpha \right)$$

$$e_B = \cos \alpha \left(\frac{p}{2} + 2v \tan \alpha + 2R ev \alpha \right)$$

Puesto que $ev \alpha_B = 0$ (figura 8.8). También se tiene que

$$e_B = 2R_B (ev \alpha_L - ev \alpha_B) = 2R_B ev \alpha_L = 2R_B \left(\frac{\pi}{2z} + \frac{2x}{z} \tan \alpha + ev \alpha \right)$$

Además los radios de fondo R_f y de cabeza R_c pueden definirse como

$$R_f = R + v - a_{c0} - f \quad R_c \leq a_{p0} + R + v$$

Más adelante se expondrá un pequeño ajuste para el radio de cabeza (ver el apartado 8.21 Corrección de radio de cabeza).

El límite de evolvente es el punto donde comienza el perfil de evolvente del diente. La circunferencia que pasa por los puntos límite tiene como radio el límite de evolvente R_{ev} .

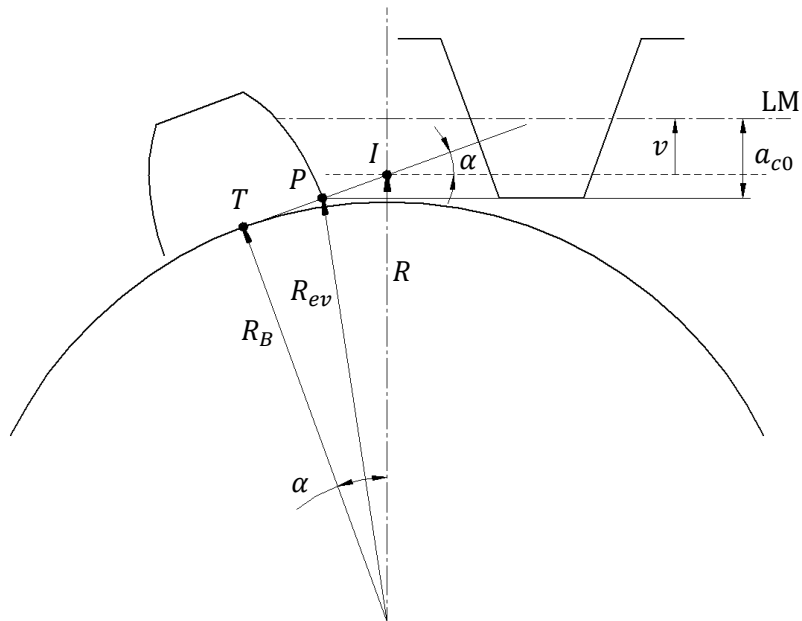


Figura 8.17. Cálculo del radio límite de evolvente R_{ev} .

De la figura 8.17 se deduce que

$$R_{ev} = \sqrt{R_B^2 + \overline{TP}^2}$$

Pero contando con que $R_B = R \cos \alpha$ y

$$\overline{TP} = \overline{TI} - \overline{PI} = R \sin \alpha - \frac{a_{c0} - v}{\sin \alpha}$$

Entonces

$$R_{ev} = \sqrt{R^2 \cos^2 \alpha + \left(R \sin \alpha - \frac{a_{c0} - v}{\sin \alpha} \right)^2}$$

Todos los parámetros intrínsecos dependen exclusivamente de parámetros de generación.

8.18 Cuerda sobre k dientes

La cuerda sobre k dientes se define como el arco entre un flanco de un primer diente y el flanco contrario del diente k -ésimo y se puede medir como indica la figura 8.18, recordando la definición de la curva evolvente.

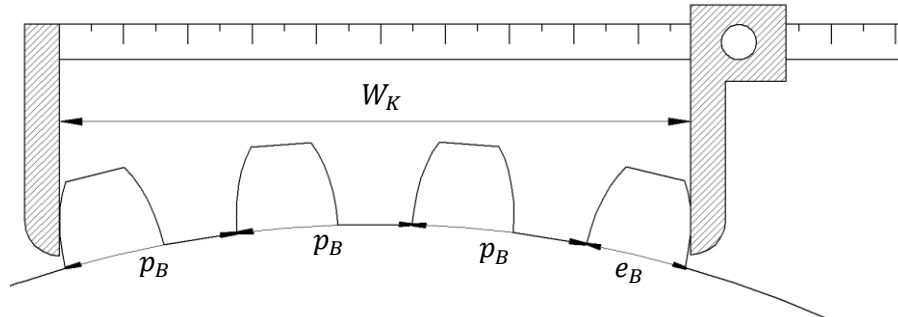


Figura 8.18. Medida de la cuerda sobre k dientes.

Puede deducirse de la figura que $W_k = (k - 1)p_B + e_B$. Escribiendo esta expresión en términos de parámetros de generación se tiene

$$W_k = m \cos \alpha \left(k\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha + z \operatorname{ev} \alpha \right)$$

Esta medida puede aplicarse en un proceso de control de calidad. También puede obtenerse p_B y e_B a partir de dos medidas entre k y entre $k - 1$ dientes.

$$p_B = W_k - W_{k-1}$$

$$e_B = W_k - (k - 1)p_B$$

$$e_B = 2R_B \left(\frac{\pi}{2z} + \frac{2x}{z} \tan \alpha + \operatorname{ev} \alpha \right) \Rightarrow x = \left(\frac{e_B}{2R_B} - \frac{\pi}{2z} - \operatorname{ev} \alpha \right) \frac{z}{2 \tan \alpha}$$

$$v = \left(\frac{e_B}{2 \cos \alpha} - \frac{p}{4} - R \operatorname{ev} \alpha \right) \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$2\pi R_B = p_B z \Rightarrow R_B = \frac{p_B z}{2\pi}$$

8.19 Parámetros de funcionamiento

Los parámetros de funcionamiento dependen del engrane entre dos ruedas dentadas. Algunos de ellos son la distancia entre ejes Δ_v , el radio del axoide R' , etc. Imponiendo una distancia Δ_v entre los ejes de dos ruedas dentadas quedará definida la línea de presión, y con ella los axoides y el ángulo de presión de funcionamiento α_v . De la figura 8.6 puede deducirse que

$$\Delta_v = R'_1 + R'_2 = \frac{R_{B1}}{\cos \alpha_v} + \frac{R_{B2}}{\cos \alpha_v} = \frac{R_{B1} + R_{B2}}{\cos \alpha_v}$$

Pero el radio base es un parámetro intrínseco que se puede expresar en función del ángulo de presión de generación α y el radio del cilindro primitivo $R = mz/2$ como $R_B = R \cos \alpha$, entonces

$$\Delta_v = \frac{(R_1 + R_2) \cos \alpha}{\cos \alpha_v}$$

Mediante esta expresión, conocida la distancia entre ejes se puede obtener el ángulo de presión de funcionamiento o al revés.

El radio del axoide y el paso en el axoide de funcionamiento se puede obtener como

$$R' = \frac{R_B}{\cos \alpha_v} = \frac{R \cos \alpha}{\cos \alpha_v} \quad p' = \frac{p_B}{\cos \alpha_v} = \frac{p \cos \alpha}{\cos \alpha_v}$$

Donde se ha tenido en cuenta que

$$p' = \frac{2\pi R'}{z} \quad p_B = \frac{2\pi R_B}{z}$$

El espesor del diente en el axoide de funcionamiento es

$$e' = 2R' \left(\frac{\pi}{2z} + \frac{2x}{z} \tan \alpha + ev \alpha - ev \alpha_v \right) = \frac{m \cos \alpha}{\cos \alpha_v} \left(\frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha + z \cdot ev \alpha - z \cdot ev \alpha_v \right)$$

Las alturas de cabeza a_c y de fondo a_f son

$$a_c = R_c - R' \quad a_f = R' - R_f$$

8.20 Condición de engrane sin holgura

Para evitar que se produzca un golpe al cambiar el sentido de giro se necesita que el engrane entre dos ruedas dentadas se produzca sin holgura entre las caras inversas de los dientes.

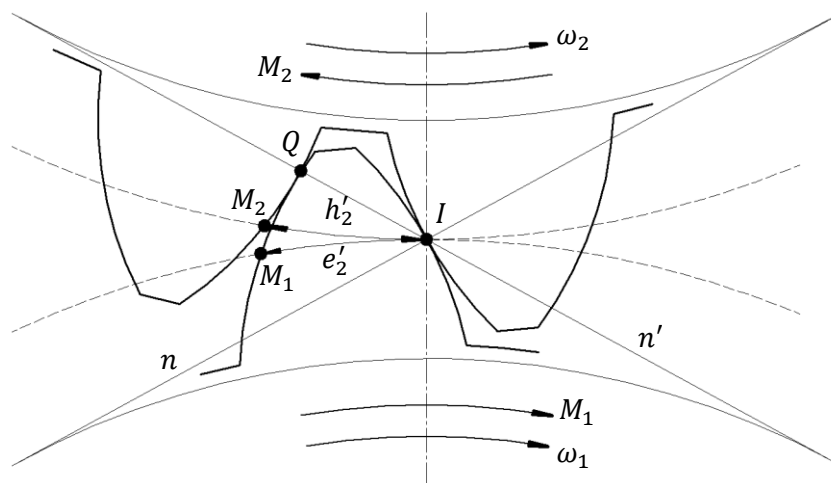


Figura 8.19. Engrane sin holgura.

Los perfiles directos irán contactando a lo largo de la línea de presión directa n , y los inversos lo harán a lo largo de la línea de presión inversa n' . Cuando el contacto inverso Q se produzca en el punto I los puntos que estarán en contacto serán M_1 y M_2 . Para que el engrane se produzca sin holgura estos puntos deberán coincidir con el punto I al mismo tiempo, y por lo tanto el arco a lo largo del axoide deberá ser también el mismo, es decir $I\bar{M}_1 = I\bar{M}_2$. Además se ha de cumplir la relación entre huecos h' , espesores e' y el paso p' en el axoide

$$h'_2 = e'_1 \quad p' = e'_1 + h'_1 = e'_2 + h'_2 = e'_2 + e'_1$$

Aplicando las relaciones encontradas anteriormente para el axoide de funcionamiento se tiene

$$p' = \frac{m\pi \cos \alpha}{\cos \alpha_v} = \frac{m \cos \alpha}{\cos \alpha_v} \left(\frac{\pi}{2} + 2x_1 \tan \alpha + z_1 \operatorname{ev} \alpha - z_1 \operatorname{ev} \alpha_v \right) + \frac{m \cos \alpha}{\cos \alpha_v} \left(\frac{\pi}{2} + 2x_2 \tan \alpha + z_2 \operatorname{ev} \alpha - z_2 \operatorname{ev} \alpha_v \right)$$

De donde finalmente se puede obtener la condición de engrane sin holgura

$$\operatorname{ev} \alpha_v = \operatorname{ev} \alpha + \frac{2(x_1 + x_2)}{z_1 + z_2} \tan \alpha$$

O equivalentemente, sabiendo que $x = v/m$ y $R = mz/2$

$$\operatorname{ev} \alpha_v = \operatorname{ev} \alpha + \frac{v_1 + v_2}{R_1 + R_2} \tan \alpha$$

Y como se ha señalado anteriormente, a partir de α_v puede obtenerse la distancia entre ejes Δ_v que se necesita para engranar sin holgura.

8.21 Corrección del radio de cabeza

Al tallar una rueda dentada con desplazamiento se prevé un juego de fondo normalizado entre la misma y la cremallera herramienta. Éste desaparece al hacer engranar esta rueda con otra de forma que no haya holgura, puesto que para ello es necesario acercar los ejes de ambas ruedas dentadas una distancia k_m , que es la cantidad de juego de fondo perdida.

Si inicialmente las ruedas trabajasen de forma que se mantuviese el juego de fondo previsto, la distancia entre ejes sería (todas las expresiones son igualmente válidas)

$$\Delta_c = R_1 + R_2 + v_1 + v_2 = (R_1 + R_2) \left(1 + 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \right) = (R_1 + R_2) \left(1 + \frac{2}{m} \cdot \frac{v_1 + v_2}{z_1 + z_2} \right)$$

Y si finalmente el engranaje trabaja a una distancia entre ejes Δ_v , entonces $k_m = \Delta_c - \Delta_v$

De este modo, el radio de cabeza corregido quedará

$$R_c \leq R + v + a_{p0} - k_m$$

Nótese que si se produce engrane a cero no hay que desplazar los ejes para obtener engrane sin holgura, y por lo tanto $k_m = 0$ (ver el apartado 8.25 Engrane a cero).

8.22 Grado de recubrimiento o coeficiente de engrane

Es un coeficiente según el cual se puede saber si una pareja de dientes se sueltan antes de que los siguientes entren en contacto. Se llama arco de conducción sobre el cilindro base a la distancia que recorre el punto base de la evolvente desde que se inicia el engrane (punto A_2) hasta que termina (punto A_1). En un engranaje has dos arcos de conducción (uno de cada rueda dentada, $\overline{B_1B'_1}$ y $\overline{B_2B'_2}$) y ambos son iguales al segmento $\overline{A_2A_1}$ (propiedad de la curva evolvente de círculo).

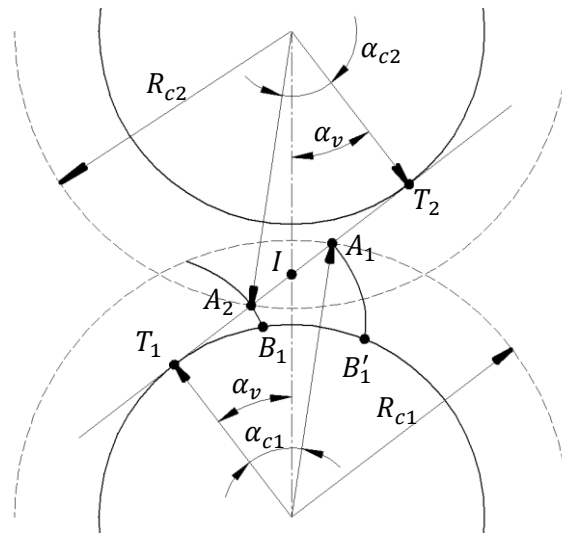


Figura 8.20. Puntos de inicio y fin de contacto.

Entonces

$$\overline{A_2A_1} = \overline{A_1I_{21}} + \overline{I_{21}A_2} = R_{B1}(\tan \alpha_{c1} - \tan \alpha_v) + R_{B2}(\tan \alpha_{c2} - \tan \alpha_v) = C_B$$

El coeficiente de engrane se define entonces como $\varepsilon = C_B/p_B$, o equivalentemente

$$\varepsilon = \frac{z_1(\tan \alpha_{c1} - \tan \alpha_v) + z_2(\tan \alpha_{c2} - \tan \alpha_v)}{2\pi}$$

Para que se produzca el contacto de la siguiente pareja antes de que se suelte la anterior, y por lo tanto para que se cumpla esta condición de engrane, el grado de recubrimiento deberá ser $\varepsilon > 1$. Por lo general se recomienda un valor $\varepsilon \approx 1,2$.

8.23 Dientes penetrados

Cuando en una rueda dentada interesa que haya pocos dientes (menos de 12), el paso deberá ser muy grande y la altura de diente será también muy elevada. Esta situación puede provocar que la base del diente se estropee, es decir, deja de ser una evolvente de círculo. Esto se produce cuando la cabeza de la cremallera-herramienta se sitúa por debajo del punto de tangencia de la línea de presión. Por este motivo, este problema puede evitarse tallando con un desplazamiento suficiente para que la cabeza quede por encima de este punto.

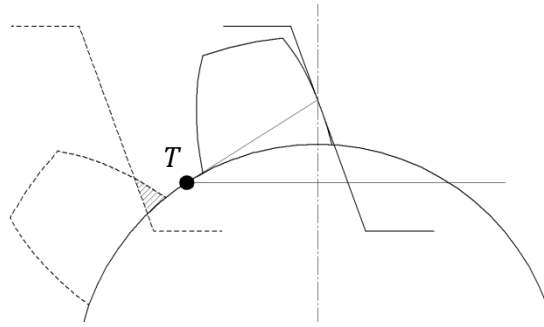


Figura 8.21. La línea discontinua ilustra el instante posterior en que la cremallera estropea el diente de evolvnte.

8.24 Tallado con desplazamiento para evitar la obtención de dientes penetrados

Este desplazamiento mínimo para evitar la penetración de dientes, como se puede comprobar en la figura 8.22, valdrá

$$v_{min} = R_B \cos \alpha + a_{c0} - R = a_{c0} - R \sin^2 \alpha = a_{c0} - \frac{1}{2} m z \sin^2 \alpha$$

En el caso particular de que $v_{min} = 0$ entonces el número límite de dientes z_l es

$$z_l = \frac{2a_{c0}}{m \sin^2 \alpha}$$

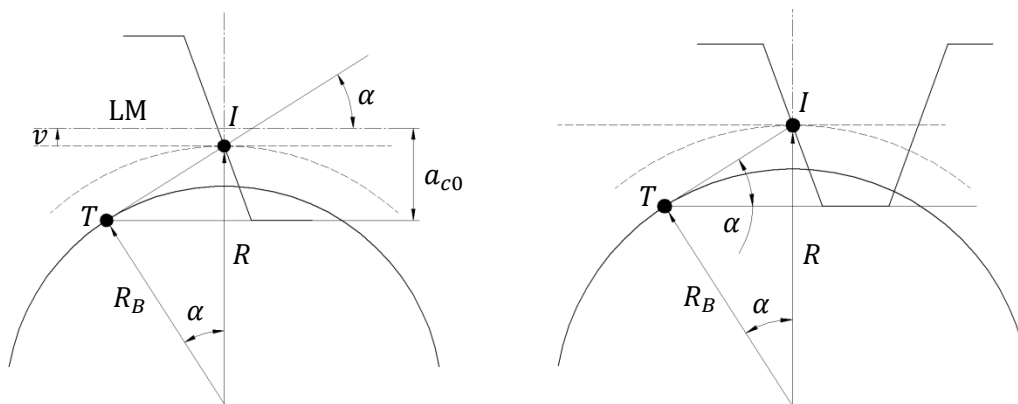


Figura 8.22. Desplazamiento necesario para evitar la penetración de dientes (izquierda). Caso particular en que este desplazamiento es $v = 0$ (derecha).

Considerando una rueda de dentadura normal ($a_{c0} = m$) con $\alpha = 20^\circ$ entonces $z_l = 17,098$ y por lo tanto el mínimo de dientes necesarios para que no se produzca penetración de dientes en una rueda de dentadura normal tallada sin desplazamiento es $z_l = 17$ (la pequeña penetración que se produce es despreciable). Si se trata de dentadura rebajada entonces $a_{c0} = 0,75m$ y $z_l = 12,8229$ y por lo tanto se considera $z_l = 13$.

Debe considerarse que para los cálculos de ruedas deben utilizarse los valores fraccionarios de z_l , y no los enteros.

También se admite, en algunos casos, utilizar un límite práctico $z_{lp} = z_l \cdot 5/6$, puesto que la pequeña parte en que se estropea el diente no trabajará durante el engrane, siempre que éste se produzca entre dos ruedas, y no entre rueda y cremallera.

Considerando el coeficiente de desplazamiento $x = v/m$ entonces la expresión para el desplazamiento mínimo se puede reescribir como

$$x_{min} = \frac{a_{c0}}{m} \left(1 - \frac{z}{z_l} \right)$$

8.25 Engrane a cero

Para que haya engrane a cero el ángulo de presión de funcionamiento α_v debe ser igual al ángulo de presión de generación α . Si esto se produce, recordando la condición de engrane sin holgura

$$ev \alpha_v = ev \alpha + \frac{2(x_1 + x_2)}{z_1 + z_2} \tan \alpha$$

Entonces se obtiene que $x_1 + x_2 = 0$, y por lo tanto el desplazamiento con el que se talla una rueda debe ser igual y de sentido contrario al de la otra rueda, es decir $x_2 = -x_1$.

La corrección de juego de cabeza $k_m = 0$ en el caso de engrane a cero.

8.26 Radio de apuntamiento

El radio de apuntamiento es (ver apartado 8.16 Espesor del diente en la circunferencia primitiva y la figura 8.15)

$$R_{ap} = \frac{R_B}{\cos \alpha_L}$$

Donde el ángulo límite de apuntamiento α_L se encontraba como

$$ev \alpha_L = \frac{\pi}{2z} + \frac{2x}{z} \tan \alpha + ev \alpha$$

El radio de cabeza es $R_c \leq R + v + a_{p0} - k_m$ donde la corrección del de juego de cabeza es $k_m = \Delta_c - \Delta_v$. Suponiendo que se utiliza $R_c = R + v + a_{p0} - k_m$, si el desplazamiento v es muy grande, este radio puede ser $R_c > R_{ap}$, y por lo tanto el diente puede ser menor de lo esperado inicialmente, pues se le forma la punta. Aunque tener un diente más pequeño no siempre supone un problema, hay que vigilar que el grado de recubrimiento ε siga siendo mayor que uno.