Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá
Cálculo de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Alberto Lara - 153719

Solución al Taller: 2 - Octubre 19 de 2012

1. Sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes de

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \ (\bigstar)$$

Demuestre que $W[y_1, y_2]$ satisface la ecuación diferencial $a_2(x)W' + a_1(x)W = 0$. Halle W.

Demostración

La ecuación diferencial

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

es una Ecuación diferencial ordinaria homogenea de orden 2. Como $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente independientes entonces

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$$

Para algún $x \in I \subset \mathbb{R}$ y desde luego la solución general está dada por cualquier combinación lineal de $y_1(x)$ y $y_2(x)$

$$W' = \cancel{y_1' y_2'} + y_1 y_2'' - \cancel{y_2' y_1'} - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

Ahora, reemplazando W y W' Tenemos

$$a_2(x)W' + a_1(x)W = a_2(x)\left(y_1 y_2'' - y_2 y_1''\right) + a_1(x)\left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right)$$

$$a_2(x)W' + a_1(x)W = a_2(x)y_1 y_2'' - a_2(x)y_2 y_1'' + a_1(x)y_1 y_2' - a_1(x)y_2 y_1'$$

$$a_2(x)W' + a_1(x)W = y_1 \underbrace{\left[a_1(x)y_2'' + a_2(x)y_2'\right]} - y_2 \underbrace{\left[a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1'\right]} \blacklozenge$$

Por hipótesis sabemos que y_1 y y_2 son soluciones de ($\bigstar$) entonces tenemos lo siguiente:

$$a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0 \ (1)$$
$$a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = 0 \ (2)$$

De (1) y (2) tenemos que

$$a_(x)y_1'' = -a_1(x)y_1' - a_0(x)y_1$$

y

$$a_2(x)y_2'' = -a_1(x)y_2' - a_0(x)y_2$$

Reemplazamos $a_(x)y_1''$ y $a_2(x)y_2''$ en $\blacklozenge$ entonces

$$a_2(x)W' + a_1(x)W = y_1(\cancel{-a_1(x)y_2'} - a_0(x)y_2 + \cancel{a_1(x)y_2'}) - y_2(\cancel{-a_1(x)y_1'} - a_0(x)y_1 + \cancel{a_1(x)y_1'})$$

$$a_2(x)W' + a_1(x)W = \cancel{-a_0(x)y_2y_1} + \cancel{a_0(x)y_1y_2} = 0$$

Para hallar W entonces tomamos la ecuación diferencial $a_2(x)W' + a_1(x)W = 0$ la cual es homogenea de orden 1 y además es lineal, entonces tenemos

$$a_2(x)W' + a_1(x)W = W' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}W = 0$$

Esto siempre y cuando $a_2(x) \neq 0$

Podemos reescribirla de la siguiente manera

$$\frac{dW}{dx} + p(x)W = 0$$

con $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$

La anterior ecuación es una ecuación diferencial ordinarioa lineal de orden 1 homogenea y por lo tanto su solución es:

$$W = ce^{-\int p(x)\,dx} = ce^{-\displaystyle\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\,dx}$$

2. Halle la solución de la ecuación diferencial

$$(1 + 2x)y'' + 4xy' - 4y = (1 + 2x)^2 \ (*)$$

Si $y_1(x) = e^{-2x}$ es una solución de la ecuación diferencial homogenea asociada.

Solución

$(*)$ es una ecuación diferencial ordinaria, no homogenea lineal con coeficientes no constantes, entonces su solución esta dada por $y_g = y_h + y_p$, donde y_h es la solución homogenea asociada a $(*)$, entonces, si $y_1(x) = e^{-2x}$ es una solución de $(*)$ podemos construir una segunda solución a partir de ella. Debemos primero verificar que $y_1(x) = e^{-2x}$ satisface la igualdad $(1+2x)y'' + 4xy' - 4y = 0\,(**)$, así

$$y_1(x) = e^{-2x}$$

$$y_1'(x) = -2e^{-2x}$$

$$y_1''(x) = 4e^{-2x}$$

$$(1+2x)(4e^{-2x}) + (4x)(-2e^{-2x}) - 4(e^{-2x}) = \cancel{4e^{-2x}} + \cancel{8xe^{-2x}} - \cancel{8xe^{-2x}} - \cancel{4e^{-2x}} = 0$$

Luego $y_1(x) = e^{-2x}$ es una solución de $(**)$, construyamos una segunda solución y_2, la teoría afirma que si yo conozco una solución de $(**)$ entonces una segunda solución está dada por

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{(y_1)^2}\,dx = y_2 = e^{-2x} \int \frac{e^{-\int \frac{4x}{1+2x}\,dx}}{(e^{-2x})^2}\,dx$$

Lo anterior si $x \neq -\frac{1}{2}$

$$\int \frac{4x}{1+2x}\,dx = \int \left(2 - \frac{2}{2x+1}\right)\,dx = 2x - ln|2x+1|$$

$$e^{-\int \frac{4x}{1+2x}\,dx} = e^{-(2x - ln|2x+1|)} = (2x+1)e^{-2x}$$

luego

$$y_2 = e^{-2x} \int \frac{(2x+1)e^{-2x}}{e^{-4x}}\,dx = e^{-2x} \int (2x+1)e^{2x}\,dx$$

$$\int (2x+1)e^{2x}\,dx = \frac{(2x+1)e^{2x}}{2} - \int e^{2x}\,dx = \frac{(2x+1)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{2} = xe^{2x}$$

Finalmente

$$y_2 = xe^{-2x}e^{2x} = x$$

$S = \left\{e^{-2x}, x\right\}$ es linealmente independientes?

$W[e^{-2x}, x] = (2x+1)e^{-2x} \neq 0$, luego S es linealmente independientes y por lo tanto cualquier combinación lineal de $\left\{e^{-2x}, x\right\}$ es solución de $(**)$

Así

$$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 x$$

Hallemos la solución particular de $(*)$ para ellos, debemos buscar un 1 en y'', entonces tenemos

$$y'' + \frac{4x}{2x+1}y' - \frac{4}{2x+1}y = 1 + 2x$$

y_p la hallaremos por **variación de parametros**, tenemos $y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2 g(x)}{W[y_1, y_2]}\, dx\,,\ u_2(x) = \int \frac{y_1 g(x)}{W[y_1, y_2]}\, dx$$

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2 g(x)}{W[y_1, y_2]}\, dx = -\int \frac{x\cancel{(1+2x)}}{\cancel{(2x+1)}e^{-2x}}\, dx = -\int xe^{2x}\, dx$$

$$-\int xe^{2x}\, dx = -\left[\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx\right] = \frac{e^{2x} - 2xe^{2x}}{4} = e^{2x}\left(\frac{1-2x}{4}\right)$$

Finalmente

$$u_1(x) = e^{2x}\left(\frac{1-2x}{4}\right)$$

$$u_2(x) = \int \frac{y_1 g(x)}{W[y_1, y_2]}\, dx = \int \frac{e^{-2x}(1+2x)}{(2x+1)e^{-2x}}\, dx = \int dx = x$$

Finalmente

$$u_2(x) = x$$

Finalmente obtenemos la solución general es:

$$y_g = c_1 e^{-2x} + c_2 x + e^{2x}\left(\frac{1-2x}{4}\right)e^{-2x} + xx$$

$$y_g = c_1 e^{-2x} + c_2 x + \left(\frac{1-2x}{4}\right) + x^2$$

3. Investigue el método de los coeficientes indeterminados y resuelva

$$a.)\, y'' - 2y + y = x^2(1+e^x) \quad b.)\, y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x} + \cos(2x) + 1$$

Solución

El método de coeficientes indeterminados sirve para resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogeneas. Este método sólo se aplica a una clase restringinda de ecuaciones. No obstante, la ventaja consiste en que, cuando este método es el pertinente, por lo general es más fácil de aplicar que los otros métodos.

$$a_y^n + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)\,(1)$$

En primer lugar éste método se aplica a ecuaciones del tipo donde todas las a_i con $i = 0, \cdots n$ son constantes y $f(x)$ es una función que admite un anulador, es decir, que se puede anular mediante la aplicación de un operador con coeficientes constantes. Todo lo anterior para encontrar la solución de la ecuacion diferencial homogenea asociada a (1), es decir, la solución homogenea. Para hallar particular, asumimos que la solución particular tiene la misma forma de la función $f(x)$ excepto por algunos términos. Eso para cada $f(x)$ en especial. Ojo, recordando que $f(x)$ debe ser una función exponencial, seno, coseno, polinomios y cualquier combinación de las anteriores.

Para solucionar $y'' - 2y + y = x^2(1+e^x)$, es una ecuación diferencial ordinaria, lineal, no homogenea con coeficientes constantes, luego la solución está dada por $y_g = y_h + y_p$

Para y_h tenemos que resolver la ecuación diferencial homogenea asociada, la cual es

$$y'' - 2y' + y = 0$$

La ecuación caracteristica es:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 = (r-1)^2$$

Lo que implica que la raíz de la ecuación caracterista es $r = 1$ de multiplicidad 2. Luego, la solución homogenea estara dada por

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

Para y_p Solución por método de coeficientes indeterminados? Sí, pues la ecuación es una ecuación diferencial ordinaria de orden 2 con coeficientes constantes y $f(x) = x^2(1+e^x)$ la cual admite anulador.

Entonces, asumamos que

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + e^x(Dx^2 + Ex^3 + Fx^4)$$

$$y_p' = 2Ax + B + e^x(Dx^2 + Ex^3 + Fx^4) + e^x(2Dx + 3Ex^2 + 4Fx^3)$$

$$y_p'' = 2A + e^x(Dx^2 + Ex^3 + Fx^4) + e^x(2xD + 3Ex^2 + 4Fx^3) + e^x(2Dx + 3Ex^2 + 4Fx^3) + e^x(2D + 6Ex + 12Fx^2)$$

Al hacer $y_p'' - 2y_p' + y_p$ tenemos que

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = Ax^2 + (B-4A)x + (C+2A-2B) + e^x(2D + 6Ex + 12Fx^2)$$

$$x^2 + x^2e^x = Ax^2 + (B-4A)x + (C+2A-2B) + e^x(2D + 6Ex + 12Fx^2)$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B - 4A = 0 \longrightarrow B = 4 \\ C + 2A - 2B = 0 \longrightarrow C = -6 \\ 2D = 0 \longrightarrow D = 0 \\ 6E = 0 \longrightarrow E = 0 \\ 12F = 1 \longrightarrow F = \frac{1}{12} \end{cases}$$

Reemplazo los correspondientes valores hallados, en la solución particular y obtengo la solución particular

$$y_p = x^2 + 4x - 6 + \frac{1}{12}e^x x^4$$

Finalmente

$$y_g = c_1 e^x + c_2 x e^x + x^2 + 4x - 6 + \frac{1}{12}e^x x^4$$

Razonando de manera similar que el punto anterior, resolvemos

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x} + \cos(2x) + 1$$

es una ecuación diferencial ordinaria no homogenea con coeficientes constantes y además $e^{2x} + \cos(2x) + 1$ admite anulador, así la solución esta dada por $y_g = y_h + y_p$

Para y_h resolvemos la siguiente ecuación diferencial $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$ entonces la Ecuación Caracteristica es:

$$r^3 - 2r^2 + 4r - 8 = 0$$

Factorizamos, para ello hacemos uso de la división sintética

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 4 & -8 \\ 2 & & 2 & 0 & 8 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

Luego,

$$r^3 - 2r^2 + 4r - 8 = (r-2)(r^2+4) = 0$$

así $r_1 = 2$, $r_{2,3} = \pm 2i$. Luego la solución homogenea está dada por

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 \cos(2x) + c_3 \sin(2x)$$

Ahora para hallar la solución particular, nuevamente hacemos uso del método de coeficientes indeterminados, entonces, asumamos nuevamente que la solución particular tiene la misma forma de $f(x) = e^{2x} + \cos(2x) + 1$, entonces

$$y_p = Axe^{2x} + Bx\cos(2x) + Cx\sin(2x) + D$$

$$y_p' = (A + 2Ax)e^{2x} + (B + 2Cx)\cos(2x) + (C - 2Bx)\sin(2x)$$

$$y_p'' = (3A + 2Ax)e^{2x} + (4C - 4Bx)\cos(2x) + (2Cx - 4B)\sin(2x)$$

$$y_p''' = (5A + 2Ax)e^{2x} + (6C - 4Bx)\sin(2x) + (4Cx - 12B)\cos(2x)$$

Al hacer $y_p''' - 2y_p'' + 4y_p' - 8y_p$ tenemos que

$$y_p''' - 2y_p'' + 4y_p' - 8y_p = (2Ax - A)e^{2x} + (12Cx - 8B + 8Cx)\cos(2x) + (8C + 8B - 12Bx - 12Cx)\sin(2x) - 8D$$

$e^{2x}+\cos(2x)+1 = (2Ax-A)e^{2x}+(12Cx-8B+8Cx)\cos(2x)+(8C+8B-12Bx-12Cx)\sin(2x)-8D$

$\begin{cases} -A = 1 \longrightarrow A = -1 \\ -8B = 1 \longrightarrow B = -\frac{1}{8} \\ 12C = 0 \longrightarrow C = 0 \\ -8D = 1 \longrightarrow D = -\frac{1}{8} \end{cases}$

Reemplazo los valores obtenidos y obtengo la solución particular

$$y_p = -xe^{2x} - \frac{1}{8}x\cos(2x) - \frac{1}{8}$$

Finalmente

$$y_g = c_1e^{2x} + c_2\cos(2x) + c_3\sin(2x) - xe^{2x} - \frac{1}{8}x\cos(2x) - \frac{1}{8}$$

4. Investigar lo siguiente: cómo es la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de orden 1, homogeneo, coeficientes constatnes si la matriz de coeficientes tiene un valor caracteristico tal que $m_a = 3$, y $m_g = 2$. Haga un ejemplo.

   Solución

   Sea el sistema de ecuaciones diferenciales lineal homogeneio de coeficientes constantes

$$X' = AX$$

   Sea J la forma canónica de Jordan de A, y sea P una matriz de cambio de base de Jordan para A, es decir, $A = PJP^{-1}$ haciendo el cambio de variable $X = PZ$ tenemos $X' = PZ'$ pero $X' = AX$, luego $PZ' = APZ \Longrightarrow Z' = P^{-1}APZ$ luego

$$Z' = P^{-1}(PJP^{-1})PZ = (P^{-1}P)J(P^{-1}P)Z$$

$$Z' = JZ$$

   Así hemos demostrado que $X' = AX$, con el cambio $X = PZ$, puede escribirse como $Z' = JZ$

   Ejemplo

   Halle la solución del sistema representado por

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

   Es un sistema homogeneo, lineal, de coeficientes constantes y de orden 1, entonces calculemos los valores caracteristicos de la matriz que representa los coefcientes, entonces

$$|A - \lambda_3 I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^3 = 0$$

Así tenemos que $\lambda = 1$ tiene multiplicidad algebraica 3.

Hallemos el espacio propio asociado al valor propio, para $\lambda = 1$ entonces

$$E_{\lambda=1} = \left\{ V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \, (A_{3x3} - \lambda \mathbb{I}_3)V = \oslash \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera, $c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $a = 0$, así $V = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}$, por lo tanto existen dos vectores asociados a $\lambda = 1$ los cuales son $V_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $V_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esto quiere decir, que la multiplicidad geométrica asociado a $\lambda = 1$ es 2.

Luego, la forma canónica de jordan asociada a la matriz A está dada por

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para encontrar la matriz P cambio de base de jordan, entonces generamos otro vector a partir de alguno de los dos vectores asociados al valor caracteristico, entonces tenemos

$$(A - \lambda I)^3 v_3 = v_{\lambda=1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Así tenemos la matriz cambio de base

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallamos la matriz inversa $P^{-1} = \frac{1}{det(P)} adt(P)$

$det(P) = (1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$adt(P) = \begin{pmatrix} 0 & -0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Finalmente

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicamos la teoria hacemos el cambio $X = PZ$ el cual transforma el sistema $X' = AX$ en $Z' = JZ$ entonces tenemos

$$Z' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineal de orden 1 con coeficientes constantes, entonces

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (1-\lambda)^3$$

Luego, $\lambda = 1$ es un valor propio de multiplicida algebraica 3, hallemos el espacio propio del valor propio $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto es $a \in \mathbb{R}$, $b = 0$, $c = 0$. El vector propio es $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ La solución es

$$Z = c_1 e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, uso el cambio de variable usado, entonces

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} c_1 e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es

$$X = c_1 e \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Realice el retrato de fase para el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - xy \\ \\ \frac{dy}{dt} = y(1-y) + xy - yz \\ \\ \frac{dz}{dt} = z(1-z) + yz \end{cases}$$

Solución

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, homogeneo, de orden 1, no lineal y autónomo, hallemos los puntos de equilibrio

$$\begin{cases} x(1-x) - xy = 0 \longrightarrow x(1-x-y) = 0 \\ \\ y(1-y) + xy - yz = 0 \longrightarrow y(1-y-z+x) = 0 \\ \\ z(1-z) + yz = 0 \longrightarrow z(1-z+y) = 0 \end{cases}$$

De entrada, tenemos que el vector $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

De otra parte, analicemos lo siguiente, si $x = 0$, $y = 0$, entonces
$1 - y + x - z = 0 \longrightarrow z = 1$

De esta manera tenemos que el vector $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es otro punto de equilibrio.

Si $x = 0$, $z = 0$, entonces $1 - y + x - z = 0 \longrightarrow y = 1$, asi $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es otro punto de equilibrio

Si $y = 0$, $z = 0$, entonces $1 - x - y = 0 \longrightarrow x = 1$, luego $X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es otro punto de equilibrio.

Un útimo punto de equilibrio es cuando tenemos que $\begin{cases} (1 - x - y = 0 \longrightarrow y = 1 - x \\ \\ 1 - y + x - z = 0 \longrightarrow z = 2x \\ \\ 1 - z + y = 0 \longrightarrow x = \frac{2}{3} \end{cases}$

Así tenemos otro punto de equilibrio $X_5 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

Resumiento, tenemos los siguientes puntos de equilibrios

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_5 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Ahora, procedamos a encontrar la aproximación lineal para cada punto de equilibrio, para ahorrar hacer cuentas en cuanto a las derivadas parciales, entonces primero calculemos las derivadas parciales de manera generalizada, primero identifiquemos las funciones escalares a las cuales debemos encontrar la aproximación, entonces tenemos

$$\begin{cases} F(x,y,z) = x(1-x) - xy \\ \\ G(x,y,z) = y(1-y) + xy - yz \\ \\ H(x,y,z) = z(1-z) + yz \end{cases}$$

Analizaremos la aproximación lineal en una vecidad del punto de equilibrio
$X_i = (x_0, y_0, z_0)$ para $i = 1, \cdots, 5$

Entonces para $F(x,y,z)$, tenemos que:

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 1 - 2x - y \\ \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -x \\ \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

De esta manera

$$F(x,y,z) \approx \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$$

Analogamente para $G(x,y,z)$ tenemos

$$(2) \begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x} = y \\ \\ \frac{\partial G}{\partial y} = 1 - 2y + x - z \\ \\ \frac{\partial G}{\partial z} = -y \end{cases}$$

De esta manera

$$G(x,y,z) \approx \frac{\partial G}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial G}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$$

Por último para $H(x,y,z)$ tenemos

$$(3) \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \\ \frac{\partial H}{\partial y} = z \\ \\ \frac{\partial H}{\partial z} = 1 - 2z + y \end{cases}$$

De esta manera

$$H(x,y,z) \approx \frac{\partial H}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial H}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial H}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$$

Hallemos la aproximación local para cada punto de equilibrio, en $F(x,y,z)$, $G(x,y,z)$ y $H(x,y,z)$ para ellos nos apoyamos en (1), (2) y (3), entonces

Para $X_1 = (0,0,0)$ **tenemos**

$$F(x,y,z) \approx \frac{\partial F}{\partial x}|_{(0,0,0)}(x-0) + \frac{\partial F}{\partial y}|_{(0,0,0)}(y-0) + \frac{\partial F}{\partial z}|_{(0,0,0)}(z-0) = x$$

$$G(x,y,z) \approx \frac{\partial G}{\partial x}|_{(0,0,0)}(x-0) + \frac{\partial G}{\partial y}|_{(0,0,0)}(y-0) + \frac{\partial G}{\partial z}|_{(0,0,0)}(z-0) = y$$

$$H(x,y,z) \approx \frac{\partial H}{\partial x}|_{(0,0,0)}(x-0) + \frac{\partial H}{\partial y}|_{(0,0,0)}(y-0) + \frac{\partial H}{\partial z}|_{(0,0,0)}(z-0) = z$$

Así se le asocia la aproximación a $(0,0,0)$, la cual es (1^*) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = y \\ \frac{dz}{dt} = z \end{cases}$

Resolvemos el sistema (1^*), el cual es lineal, entonces tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Valores Caracteristicos $|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0$

Tenemos que $\lambda = 1 > 0$ (X_1 es una fuente) de multiplicidad algebraica 3. Hallemos el espacio propio asociado al valor propio, para $\lambda = 1$ entonces

$$E_{\lambda=1} = \left\{ V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\, (A_{3x3} - \lambda \mathbb{I}_3)V = \oslash \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ con a, b, $c \in \mathbb{R}$

$V = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$

Los tres vectores asociados a $\lambda = 1$, son $v_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

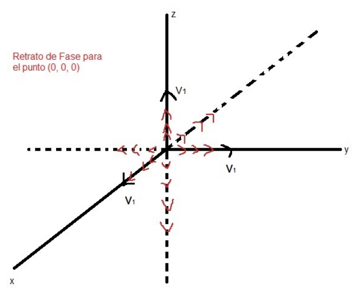

Figure 1: Retrato de Fase para (0, 0, 0)

Para $X_2 = (0,0,1)$ **tenemos**

$$F(x,y,z) \approx \frac{\partial F}{\partial x}|_{(0,0,1)}(x-0) + \frac{\partial F}{\partial y}|_{(0,0,1)}(y-0) + \frac{\partial F}{\partial z}|_{(0,0,1)}(z-1) = x$$
$$G(x,y,z) \approx \frac{\partial G}{\partial x}|_{(0,0,1)}(x-0) + \frac{\partial G}{\partial y}|_{(0,0,1)}(y-0) + \frac{\partial G}{\partial z}|_{(0,0,1)}(z-1) = 0$$

$$H(x,y,z) \approx \frac{\partial H}{\partial x}|_{(0,0,1)}(x-0) + \frac{\partial H}{\partial y}|_{(0,0,1)}(y-0) + \frac{\partial H}{\partial z}|_{(0,0,1)}(z-1) = y - z + 1$$

Así se le asocia la aproximación a $(0,0,1)$, la cual es (2^*) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = 0 \\ \frac{dz}{dt} = y - z + 1 \end{cases}$

Resolvemos el sistema (2^*) el cual es no homogeneo, con coeficientes constantes, hallamos la solución al sistema homogeneo asociado, entonces la matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Valores Caracteristicos $|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda) = 0$

Luego, los valores caracteristicos son $\lambda = 1 > 0$, $\lambda = 0$, y $\lambda = -1 < 0$, todos con multiplicidad algebraica 1. Así X_2 es un punto de silla.

Hallemos el espacio propio asociado al valor propio, para $\lambda = 1$ entonces

$$E_{\lambda=1} = \left\{ V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \, (A_{3x3} - \lambda \mathbb{I}_3)V = \oslash \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera, $b = 0$, $c = 0$ y $a \in \mathbb{R}$, así $V = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, por lo tanto un vector asociado a $\lambda = 1$ es $V_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Hallemos el espacio propio asociado al valor propio, para $\lambda = 0$ entonces

$$E_{\lambda=0} = \left\{ V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \, (A_{3x3} - \lambda \mathbb{I}_3)V = \oslash \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera, $b \in \mathbb{R}$, $b = c$ y $a = 0$, así $V = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \end{pmatrix}$, por lo tanto un vector asociado a $\lambda = 0$ es $V_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por último

Hallemos el espacio propio asociado al valor propio, para $\lambda = -1$ entonces

$$E_{\lambda=-1} = \left\{ V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \, (A_{3x3} - \lambda \mathbb{I}_3)V = \oslash \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera, $a = 0$, $b = 0$ y $c \in \mathbb{R}$, así $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$, por lo tanto un vector asociado a $\lambda = -1$ es $V_{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

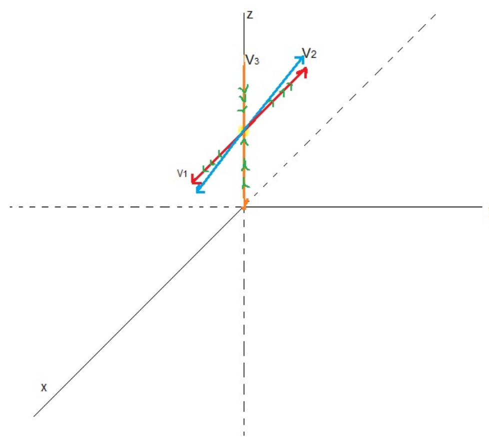

Figure 2: Retrato de Fase para (0, 0, 1)

Para $X_3 = (0, 1, 0)$ tenemos

$$F(x,y,z) \approx \frac{\partial F}{\partial x}|_{(0,1,0)}(x-0) + \frac{\partial F}{\partial y}|_{(0,1,0)}(y-1) + \frac{\partial F}{\partial z}|_{(0,1,0)}(z-0) = 0$$

$$G(x,y,z) \approx \frac{\partial G}{\partial x}|_{(0,1,0)}(x-0) + \frac{\partial G}{\partial y}|_{(0,1,0)}(y-1) + \frac{\partial G}{\partial z}|_{(0,1,0)}(z-0) = -y-2z$$

$$H(x,y,z) \approx \frac{\partial H}{\partial x}|_{(0,1,0)}(x-0) + \frac{\partial H}{\partial y}|_{(0,1,0)}(y-1) + \frac{\partial H}{\partial z}|_{(0,1,0)}(z-0) = z$$

Así se le asocia la aproximación a $(0, 1, 0)$, la cual es (3^*) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = -y-2z \\ \frac{dz}{dt} = z \end{cases}$

Resolvemos el sistema (3^*) el cual es no homogeneo, con coeficientes constantes, hallamos la solución al sistema homogeneo asociado, entonces la matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Valores Caracteristicos $|A-\lambda I_3| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda) = 0$

Luego, los valores caracteristicos son $\lambda = 1 > 0$, $\lambda = 0$, y $\lambda = -1 < 0$, todos con multiplicidad algebraica 1. Así X_3 es un punto de silla.

Hallemos el espacio propio asociado al valor propio, para $\lambda = 1$ entonces

$$E_{\lambda=1} = \left\{ V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \, (A_{3x3} - \lambda \mathbb{I}_3)V = \oslash \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera, $a = 0$, $b = -c$ y $c \in \mathbb{R}$, así $V = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ c \end{pmatrix}$, por lo tanto un vector asociado a $\lambda = 1$ es $V_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Hallemos el espacio propio asociado al valor propio, para $\lambda = 0$ entonces

$$E_{\lambda=0} = \left\{ V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \, (A_{3x3} - \lambda \mathbb{I}_3)V = \oslash \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera, $a \in \mathbb{R}$, $b = 0$ y $c = 0$, así $V = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, por lo tanto un vector asociado a $\lambda = 0$ es $V_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Por último

Hallemos el espacio propio asociado al valor propio, para $\lambda = -1$ entonces

$$E_{\lambda=-1} = \left\{ V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \, (A_{3x3} - \lambda \mathbb{I}_3)V = \oslash \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera, $a = 0$, $b = 0$ y $c \in \mathbb{R}$, así $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$, por lo tanto un vector asociado a $\lambda = -1$ es $V_{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

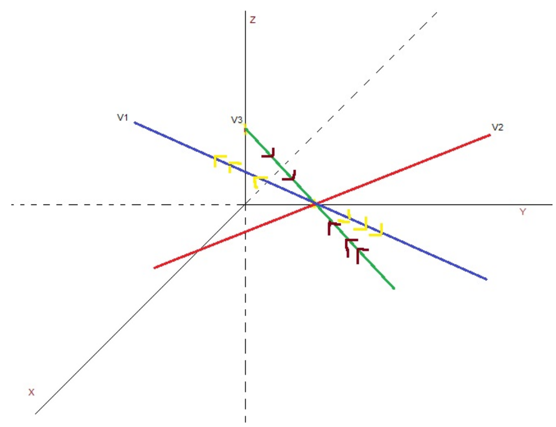

Figure 3: Retrato de Fase para (0, 1, 0)

Para $X_4 = (1, 0, 0)$ tenemos

$$F(x,y,z) \approx \frac{\partial F}{\partial x}|_{(1,0,0)}(x-1) + \frac{\partial F}{\partial y}|_{(1,0,0)}(y-0) + \frac{\partial F}{\partial z}|_{(1,0,0)}(z-0) = -x$$

$$G(x,y,z) \approx \frac{\partial G}{\partial x}|_{(0,1,0)}(x-1) + \frac{\partial G}{\partial y}|_{(1,0,0)}(y-1) + \frac{\partial G}{\partial z}|_{(1,0,0)}(z-0) = 2y$$

$$H(x,y,z) \approx \frac{\partial H}{\partial x}|_{(1,0,0)}(x-1) + \frac{\partial H}{\partial y}|_{(1,0,0)}(y-0) + \frac{\partial H}{\partial z}|_{(1,0,0)}(z-0) = 0$$

Así se le asocia la aproximación a $(0, 1, 0)$, la cual es (4^*) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = 2y \\ \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$

Resolvemos el sistema (4^*) el cual es homogeneo, con coeficientes constantes, hallamos la solución al sistema, entonces la matriz de coeficientes del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores Caracteristicos $|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda) = 0$

Luego, los valores caracteristicos son $\lambda = 2 > 0$, $\lambda = 0$, y $\lambda = -1 < 0$, todos con multiplicidad algebraica 1. Así X_3 es un punto de silla.

Hallemos el espacio propio asociado al valor propio, para $\lambda = 2$ entonces

$$E_{\lambda=2} = \left\{ V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \, (A_{3x3} - \lambda \mathbb{I}_3)V = \oslash \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera, $a = 0$, $c = 0$ y $b \in \mathbb{R}$, así $V = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, por lo tanto un vector asociado a $\lambda = 2$ es $V_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Hallemos el espacio propio asociado al valor propio, para $\lambda = 0$ entonces

$$E_{\lambda=0} = \left\{ V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \, (A_{3x3} - \lambda \mathbb{I}_3)V = \oslash \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera, $c \in \mathbb{R}$, $b = 0$ y $a = 0$, así $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$, por lo tanto un vector asociado a $\lambda = 0$ es $V_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por último

Hallemos el espacio propio asociado al valor propio, para $\lambda = -1$ entonces

$$E_{\lambda=-1} = \left\{ V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \, (A_{3x3} - \lambda \mathbb{I}_3)V = \oslash \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera, $c = 0$, $b = 0$ y $a \in \mathbb{R}$, así $V = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, por lo tanto un vector asociado a $\lambda = -1$ es $V_{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

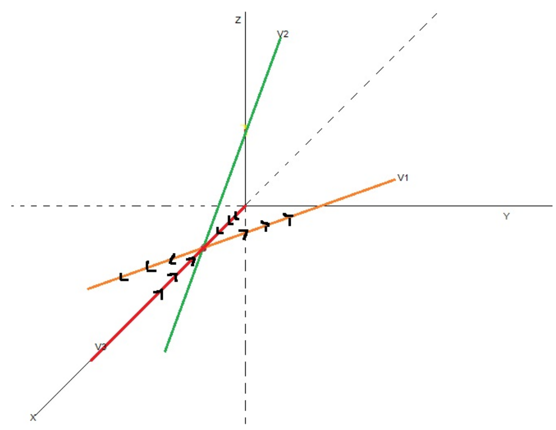

Figure 4: Retrato de Fase para (1, 0, 0)

Para $X_3 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ tenemos

$$F(x,y,z) \approx \frac{\partial F}{\partial x}|_{(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3})}(x-\frac{2}{3})+\frac{\partial F}{\partial y}|_{(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3})}(y-\frac{1}{3})+\frac{\partial F}{\partial z}|_{(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3})}(z-\frac{4}{3}) = -\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}$$

$$G(x,y,z) \approx \frac{\partial G}{\partial x}|_{(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3})}(x-\frac{2}{3})+\frac{\partial G}{\partial y}|_{(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3})}(y-\frac{1}{3})+\frac{\partial G}{\partial z}|_{(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3})}(z-\frac{4}{3}) = \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z+\frac{4}{9}$$

$$H(x,y,z) \approx \frac{\partial H}{\partial x}|_{(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3})}(x-\frac{2}{3})+\frac{\partial H}{\partial y}|_{(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3})}(y-\frac{1}{3})+\frac{\partial H}{\partial z}|_{(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3})}(z-\frac{4}{3}) = \frac{4}{3}y-\frac{1}{3}z$$

Así se le asocia la aproximación a $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3})$, la cual es (4*) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{5}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{4}{9} \\ \frac{dz}{dt} = \frac{4}{3}y - \frac{1}{3}z \end{cases}$

Resolvemos el sistema (4^*) el cual es no homogeneo, con coeficientes constantes, hallamos la solución al sistema homogeneo asociado, entonces la matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Valores Caracteristicos

$|A - \lambda I_3| = (\frac{1}{3})^3 \begin{vmatrix} -5-3\lambda & 2 & 0 \\ 1 & -1-3\lambda & -1 \\ 0 & 4 & -1-3\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(-5-3\lambda)((-1-3\lambda)^2+4) - 2(-1-3\lambda) = 0$$

$$(-1-3\lambda)(9\lambda^2+6\lambda+5) - 2(1+3\lambda) = 0$$

$$27\lambda^3 + 63\lambda^2 - 21\lambda - 23 = 0$$

No tiene raices racionales.

Hallemos los puntos críticos de la función, entonces

$$81\lambda^2 + 126\lambda - 21 = 0$$

entonces tenemos

$$\lambda_1 = \frac{-126+18\sqrt{70}}{162} \approx 0.15,\ \lambda_1 = \frac{-126-18\sqrt{70}}{162} \approx -1.7$$

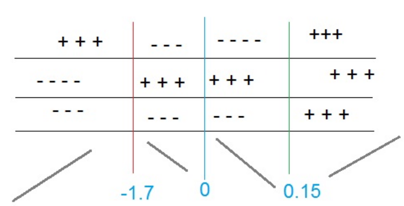

Figure 5: Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

La función crece en $(-\infty, -1.7) \cup (0.15, \infty)$ y decrece de $(-.17, 0.15)$

Clasifico los puntos críticos en la segunda derivada

$$(162\lambda + 126)|_{0.15} = 150.3 > 0$$

Y luego, 0.15 es un mínimo

$$(162\lambda + 126)|_{-1.7} = 149.4 < 0$$

Luego, -1.7 es un máximo

Analicemos los cambios de concavidad, luego,

$$162\lambda + 126 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{126}{162} = \frac{7}{9}$$

$\frac{7}{9}$ es un punto de inflexión

Veamos un bosquejo de la gráfica de la función.

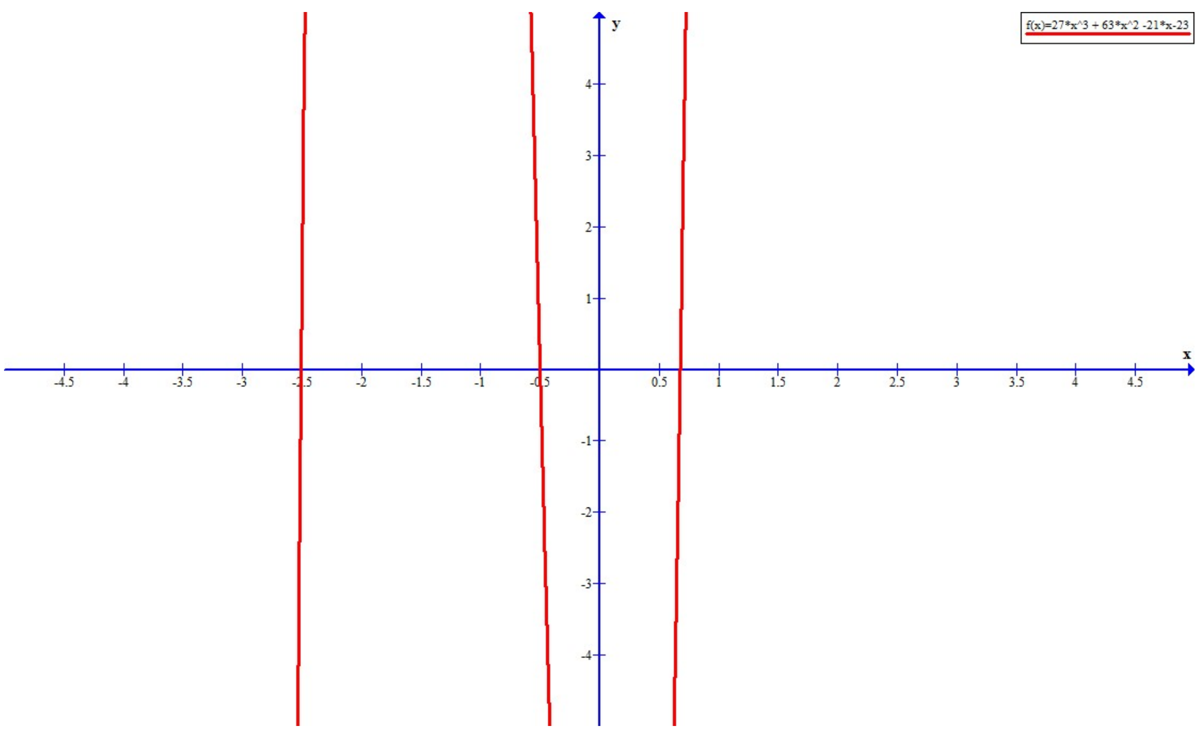

Figure 6: Gráfica que representa los valores propios

Calcular las raices que nos permitan encontrar los valores propios, resulto muy dispendioso, pero en la gráfica podemos observar que tenemos dos valores propios negativos y uno positivo, es decir, el punto de equilibrio X_5 se podría clafisicar como un punto de silla, tratemos de ver como podria ser un retrato de fase para el punto

$X_5 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3})$

En la siguiente figura podemos ver un bosquejo del retrato de fase para dicho punto

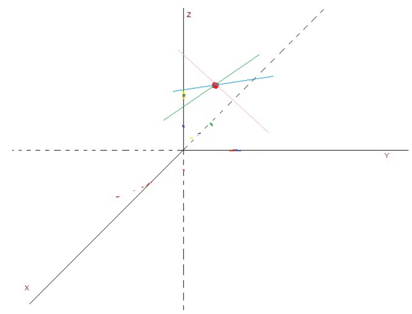

Figure 7: Retrato de Fase para $X_5 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3})$

Juntando todo el rompecabezas el retrato de fase para el sistema lo podemos observar en la siguiente figura

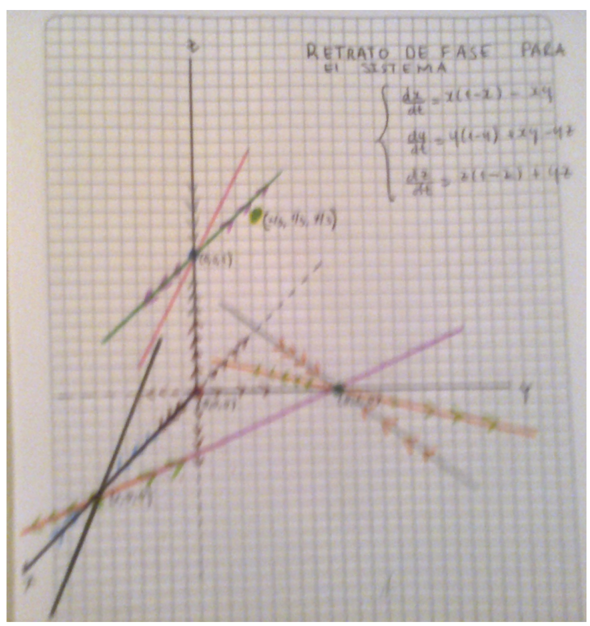

Figure 8: Retrato de Fase del Sistema

6. Use el método de Euler y el método de Runge-Kutta para hallar el valor aproximado de $y(1.6)$, donde y es la solución de

$$\begin{cases} x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = -1 \\ h = 0.1 \end{cases}$$

Compare las aproximaciones con el valor exacto.

Solución

Hallemos la solución exacta de la ecuación diferencial, la cual de orden 2, no lineal, homogenea de coeficientes no constantes, entonces su solución esta dada por

$$y_g = y_h$$

Para $x \neq 0$

y_h ?

$(*)$ $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ es una ecuación de Cauchy-Euler, consideremos el cambio $x = e^t$ el cual transforma a $(*)$ en

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

La cual es una ecuación diferencial ordinaria, con coeficientes constantes, entonces le asociamos la ecuación caracteristica

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$(r-2)(r-1) = 0$$

Así $r_1 = 2$ y $r_2 = 1$, por lo tanto la solución homogenea es

$$y = c_1x^2 + c_2x$$

Con condiciones iniciales

$$y(1) = c_1 + c_2 = 2$$

$$y'(1) = 2c_1 + c_2 = -1$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 2 \\ 2 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix}$$

$c_2 = 5$ y $c_1 = -3$, la solución particular es

$$y = -3x^2 + 5x$$

$$y(1.6) = -3(1.6)^2 + 5(1.6) = 0.32$$

7. Halle la solución del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z + t \\ \frac{dz}{dt} = x - y + z + 2e^t \\ X_0 = \begin{pmatrix} x(1) = 1 \\ y(1) = 0 \\ z(1) = -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución

El sistema anterior lo podemos expresar de forma matricial de la siguiente manera:

$$X = \begin{pmatrix} x(t) \\ \\ y(t) \\ \\ z(t) \end{pmatrix}, \; B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ t \\ \\ 2e^t \end{pmatrix}$$

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X + B(t)$$

Es un sistema de ecuaciones diferenciales de 3 ecuaciones, 3 incognitas, de orden 1 lineal y no homogeneo, luego la solución esta dada por

$$X_g = X_h + X_p$$

i) X_h ?

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X$$

Valores Caracteristicos

$$|A - \lambda \mathbb{I}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(1-\lambda)^2 - 1 + (1-\lambda) + 1 - (-1 - 1 - \lambda) = 0$$

$$(3-\lambda)(1-\lambda)^2 + (1-\lambda) + (2-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)[(3-\lambda)(1-\lambda) + 1] + (2-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)(3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 + 1) + (2-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 4) + (2-\lambda) = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)^2-(\lambda-2)=0$$
$$(\lambda-2)[(\lambda-1)(\lambda-2)-1]=0$$
$$(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda-\lambda+3-1)=0$$
$$(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda+2)=0$$
$$(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1)=0$$
$$(\lambda-2)^2(\lambda-1)=0$$

Así $\lambda=1$ tiene multiplicidad algebraica 1 y $\lambda=2$ tiene multiplicidad algebraica 2.

Hallemos el espacio propio asociado a cada valor propio, para $\lambda=2$ entonces

$$E_{\lambda=2}=\left\{V=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3|\,(A_{3x3}-\lambda\mathbb{I}_3)V=\oslash\right\}$$

$$E_{\lambda=2}=\left\{V=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3|\,\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Escalonando la matriz de los coeficientes

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1|0\\1&-1&-1|0\\1&-1&-1|0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1|0\\0&0&0|0\\0&0&0|0\end{pmatrix}$$

Así tenemos que $a-b-c=0$ luego $a=b+c$ con $b,c\in\mathbb{R}$

$$E_{\lambda=2}=\left\{V=\begin{pmatrix}b+c\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3|\,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

Dos vectores caractecteristicos asociados al valor caracteristico $\lambda=2$ son

$$V_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\,V_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Para $\lambda=1$

$$E_{\lambda=1}=\left\{V=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3|\,(A_{3x3}-\lambda\mathbb{I}_3)V=\oslash\right\}$$

$$E_{\lambda=1}=\left\{V=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3|\,\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Escalonando la matriz de los coeficientes

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1|0 \\ 1 & 0 & -1|0 \\ 1 & -1 & 0|0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1|0 \\ 2 & -1 & -1|0 \\ 1 & -1 & 0|0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1|0 \\ 0 & -1 & 1|0 \\ 0 & -1 & 1|0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1|0 \\ 0 & 1 & -1|0 \\ 0 & 0 & 0|0 \end{pmatrix}$$

Así tenemos, $b = c, a = c, b = c$ con $c \in \mathbb{R}$

$$E_{\lambda=1} = \left\{ V = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Un vector caracteristico asociado al valor caracteristico $\lambda = 1$ es

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tango la solución homogenea asociada al sistema esta dada por

$$X_h = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Escrita en forma matricial (en función de la matriz fundamental)

$$X_h = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

ii) X_p ? Para hallar X_p aplicamos la teoría $X_p = \psi(t) \displaystyle\int \psi^{-1}(t) B(t)\, dt$, primero hallemos la inversa de $\psi(t)$, para ello, calculemos su determinante

$$\det \psi(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & 0 & e^{2t} \end{vmatrix} = e^t(e^{4t}) - e^{2t}(e^{3t}) + e^{2t}(-e^{3t}) = -e^{5t}$$

Ahora, calculemos la inversa de la matriz $\psi(t)$, la cual es

$$\psi^{-1}(t) = \frac{1}{\det \psi(t)} adt(\psi(t))$$

Calculemos primero al adjunta de la matriz $\psi(t)$

$$adj(\psi(t)) = \begin{pmatrix} +e^{4t} & -e^{3t} & +(-e^{3t}) \\ -e^{4t} & +0 & -(-e^{3t} \\ +(-e^{4t}) & -(-e^{3t}) & +0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} e^{4t} & -e^{4t} & -e^{4t} \\ -e^{3t} & 0 & e^{3t} \\ -e^{3t} & e^{3t} & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$\psi^{-1}(t) = -e^{-5t} \begin{pmatrix} e^{4t} & -e^{4t} & -e^{4t} \\ -e^{3t} & 0 & e^{3t} \\ -e^{3t} & e^{3t} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{-t} & e^{-t} \\ e^{-2t} & 0 & -e^{-2t} \\ e^{-2t} & -e^{-2t} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi^{-1}(t)B(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{-t} & e^{-t} \\ e^{-2t} & 0 & -e^{-2t} \\ e^{-2t} & -e^{-2t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2e^t \end{pmatrix}$$

$$\psi^{-1}(t)B(t) = \begin{pmatrix} te^{-t} + 2 \\ -2e^{-t} \\ -te^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$X_p = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} te^{-t} + 2 \\ -2e^{-t} \\ -te^{-2t} \end{pmatrix} dt$$

$$X_p = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-t}(t+1) + 2t + c_4 \\ 2e^{-t} + c_5 \\ \frac{1}{4}e^{-2t}(2t+1) + c_6 \end{pmatrix}$$

$$X_p = \begin{pmatrix} -(t+1) + 2te^t + 2e^t + \frac{1}{4}(2t+1) + e^t(c_4 + c_5e^t + c_6e^t) \\ -(t+1) + 2te^t + 2e^t + e^t(c_4 + c_5e^t) \\ -(t+1) + 2te^t + \frac{1}{4}(2t+1) + e^t(c_4 + c_6e^t) \end{pmatrix}$$

Con condiciones iniciales

$$X_p \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tenemos

$$\begin{pmatrix} -2 + 4e + \frac{3}{4} + e(c_4 + c_5e + c_6e) \\ -2 + 4e + e(c_4 + c_5e) \\ -2 + 4e + \frac{3}{4} + e(c_4 + c_6e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esto nos conduce al siguiente sistema

$$\begin{cases} c_4e + (c_5 - c_6)e = \frac{9}{4} - 4e \\ c_4e + c_5e^2 = 2 - 4e \\ c_4e + c_6e^2 = \frac{1}{4} - 2e \end{cases}$$

Resolviendo, tenemos

$$c_4 = \frac{1}{4e} - 2 - c_6e$$

$$c_5 = \frac{2 - 4e - \frac{1}{4} + 2e + c_6 e^2}{e^2}$$

$$c_6 = \frac{4e^2+2}{e} - \frac{25}{4}$$

Así

$$c_4 = \frac{1+25e^2}{e} - 4 - 4e^2$$

$$c_5 = \frac{2 - 4e - \frac{1}{4} + 2e + \left(\frac{4e^2+2}{e} - \frac{25}{4}\right)e^2}{e^2}$$

Finalmente la solución esperada es

$$X_g = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(t+1) + 2te^t + 2e^t + \frac{1}{4}(2t+1) + e^t(c_4 + c_5 e^t + c_6 e^t) \\ -(t+1) + 2te^t + 2e^t + e^t(c_4 + c_5 e^t) \\ -(t+1) + 2te^t + \frac{1}{4}(2t+1) + e^t(c_4 + c_6 e^t) \end{pmatrix}$$

8. Plantee y resuelva un ejercicio de un sistema masa-resorte, que involucre fuerza de amortiguación y fuerza externa

   Solución

   Una masa de $\frac{1}{8}\,kg$ se une a un resorte se une a un resorte con rigidez $16\frac{N}{m}$. Se le aplica una fuerza externa de $f(t) = 2\cos 2t$, la constante de amortiguamiento para el sistema es de $2\frac{N-seg}{m}$. Si la masa se mueve $\frac{3}{4}m$ bajo del equilibrio y recibe una velocidad inicial de $2\frac{m}{s}$. Determine la ecuación de movimiento de la masa.

   Un bosquejo del sistema resorte-masa

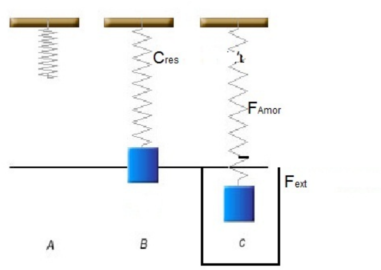

Figure 9: Sistema Resorte-Masa-Amortiguamiento

   Entonces, por el Sistema Resorte-Masa, se considera fuerza externa y fuerza de amortiguamiento, tenemos

$$\begin{cases} \frac{1}{8}x'' + 2x' + 16x = 2\cos 2t \\ x(0) = -\frac{3}{4} \\ x'(0) = -2 \end{cases}$$

Lo anterior, es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no homogenea con coeficientes constantes. Luego, la solución esta dada por $x_g = x_h + x_p$

x_h ?

Resolvemos la ecuación diferencial homogenea asociada

$$\frac{1}{8}x'' + 2x' + 16x = 0$$

Ecuación caracteristica

$$\frac{1}{8}r^2 + 2r + 16 = 0$$

$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{\frac{1}{4}} = -8 \pm 8i$

Así $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}$ luego

$$x_h = c_1 e^{-8t}\cos 8t + c_2 e^{-8t}\sin 8t$$

x_p ? Por el método de coeficientes indeterminados, supongamos que la solución particular tenga la misma forma de $f(t) = 2\cos 2t$, pero adicionando el término seno. Entonces

$$x_p = A\cos 2t + B\sin 2t$$

$$x_p' = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t$$

$$x_p'' = -4A\cos 2t - 4B\sin 2t$$

Luego,

$$\frac{1}{8}x_p'' + 2x_p' + 16x_p = -\frac{1}{2}A\cos 2t - \frac{1}{2}B\sin 2t - 4A\sin 2t + 4B\sin 2t + 16A\cos 2t + 16B\sin 2t$$

$$2\cos 2t = \left(\frac{31}{2}A + 4B\right)\cos 2t + \left(12A - \frac{1}{2}B\right)\sin 2t$$

Esto nos conduce a lo siguiente

$$\begin{cases} \frac{31}{2}A + 4B = 2 \\ 12A - \frac{1}{2}B = 0 \end{cases}$$

Hallamos los valores de A y B haciendo uso del método de $Gauss - Jordan$, entonces

$$\begin{pmatrix} 24 & -1|0 \\ 31 & 8|4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{24}|0 \\ 31 & 8|4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{24}|0 \\ 0 & \frac{223}{24}|4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{24}|0 \\ 0 & 1|\frac{96}{223} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0|\frac{4}{223} \\ 0 & 1|\frac{96}{223} \end{pmatrix}$$

$A = \frac{4}{223}$ y $B = \frac{96}{223}$, luego

$$x_p = \frac{4}{223}\cos 2t + \frac{96}{223}\sin 2t$$

Finalmente

$$x_g = c_1 e^{-8t}\cos 8t + c_2 e^{-8t}\sin 8t + \frac{4}{223}\cos 2t + \frac{96}{223}\sin 2t$$

Bajo las condiciones iniciales $x_g(0) = -\frac{3}{4}$

$$-\frac{3}{4} = c_1 + \frac{4}{223} \Longrightarrow c_1 = -\frac{685}{892}$$

$$x_g' = e^{-8t}([8c_2 - c_1]\cos 8t - ([8c_1 + c_2]\sin 2t) - \frac{8}{223}\sin 2t + \frac{192}{223}\cos 2t$$

$x_g'(0) = -2$

$$-2 = 8c_2 + \frac{685}{892} + \frac{192}{223}$$

$$8c_2 = -\frac{3237}{892} \Longrightarrow c_2 = -\frac{3237}{3176}$$

Finalmente, la ecuación de movimiento de la masa esta dada por

$$x_g = -\frac{685}{892}e^{-8t}\cos 8t - \frac{3237}{3176}e^{-8t}\sin 8t + \frac{4}{223}\cos 2t + \frac{96}{223}\sin 2t$$

Cuando $t \longrightarrow \infty$, x_g es muy grande, es decir, la masa nunca dejará de oscilar.