

Apuntes: Aeroelasticidad y vibraciones.

Apuntes: Aeroelasticidad y vibraciones.

Alejandro Roger Ull

Ingeniería Aeronáutica

Primera edición – 01 de julio de 2012

Acerca de estos apuntes

Estos apuntes se han realizado para cubrir el temario de la asignatura “Aeroelasticidad y vibraciones”, que se imparte en el quinto curso de Ingeniería Aeronáutica, en intensificación en Aeronaves, en la Escola Tècnica Superior d’Enginyeries Industrial i Aeronàutica de Terrassa, de la Universitat Politècnica de Catalunya (ETSEIAT – UPC).

Licencia

Esta obra está bajo una licencia Attribution-ShareAlike 3.0 Unported (CC BY-SA 3.0) de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite:

http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.es_ES

En líneas generales:

Es libre de:

- Compartir – Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.
- Transformar la obra y crear obras derivadas.
- Hacer un uso comercial de esta obra.

Bajo las condiciones siguientes:

- **Reconocimiento** — Debe reconocer al autor de la obra original (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoya el uso que hace de su obra).
- **Compartir bajo la Misma Licencia** — Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.



Contenidos

Módulo 1. Introducción a la aeroelasticidad.

Tema 1. Fenómenos aeroelásticos. 6

Módulo 2. Aeroelasticidad del perfil.

Tema 2. Aeroelasticidad estática. Divergencia e inversión de mando. 7

Tema 3. Aeroelasticidad dinámica. Flameo. 10

Tema 4. Teoría del perfil oscilante y cálculo de fuerzas aerodinámicas en flujo incompresible. Función de Theodorsen. 18

Tema 5. Teoría del perfil oscilante y cálculo de fuerzas aerodinámicas en compresible. 28

Tema 6. Aeroelasticidad dinámica. Ráfagas y turbulencias. 40

Tema 7. Aeroelasticidad dinámica. Flameo en separación y bataneo. 53

Tema 8. Aeroelasticidad de turbomáquinas. 59

Módulo 3. Estructuras unidimensionales.

Tema 9. Introducción. 60

Tema 10. Aeroelasticidad estática en alas rectas. 60

Tema 11. Flameo en alas de gran alargamiento. 75

Tema 12. Flujo incompresible no estacionario en torno a alas deformables. 83

Módulo 1. Introducción a la aeroelasticidad.

Tema 1. Fenómenos aeroelásticos.

La aeroelasticidad estudia la interacción entre fuerzas aerodinámicas, fuerzas elásticas y fuerzas de inercia. Por ello se aplicarán muchos conceptos que se han ido adquiriendo en otras asignaturas a lo largo de la carrera. Se contemplarán los principales fenómenos aeroelásticos:

- Aeroelasticidad estática:
 - ♣ Divergencia (*Divergence*):
Modificación del ángulo de ataque que puede estabilizarse o explotar en función de la velocidad.
 - ♣ Inversión de mando (*Control reversal*):
Al deflectar el alerón aumenta la sustentación, pero se produce también un aumento del momento de picado. Esto disminuye el ángulo de ataque, lo que disminuye a su vez la sustentación. El mando pierde efectividad.
- Aeroelasticidad dinámica:
 - ♣ Flameo (*Flutter*):
Se produce cuando el perfil empieza a oscilar. Si las fuerzas aerodinámicas extraen energía del sistema, el sistema se amortigua. Si entregan energía al sistema entonces, si el sistema puede disiparla, se amortiguará, pero si no puede disiparla entonces explotará. Si durante la oscilación se alcanza la zona no lineal entonces durante parte de ciclo se entrará en pérdida.
 - ♣ Bataneo (*Buffeting*):
Se produce por una excitación exterior armónica, por ejemplo una estela del ala sobre el estabilizador horizontal.
 - ♣ Ráfagas (*Gusts*):
Las ráfagas se tratan como excitaciones conocidas, y la turbulencia se trata estadísticamente.

La Figura 1.1 muestra las relaciones entre las diferentes acciones y los fenómenos de estudio.

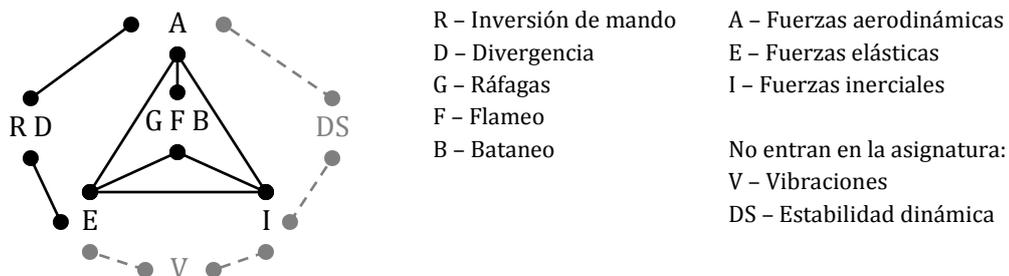


Figura 1.1: Triángulo de Collar de fuerzas aeroelásticas.

Módulo 2. Aeroelasticidad del perfil.

Tema 2. Aeroelasticidad estática. Divergencia e inversión de mando.

En aeroelasticidad estática el movimiento vertical no tiene ningún efecto, ya que no se tienen en cuenta las velocidades de desplazamiento, y sólo se considera la variación en ángulo de ataque debido al giro. Es decir, en la Figura 2.1 no es necesario considerar el efecto de la rigidez a flexión k_h para estudiar el fenómeno estático de divergencia.

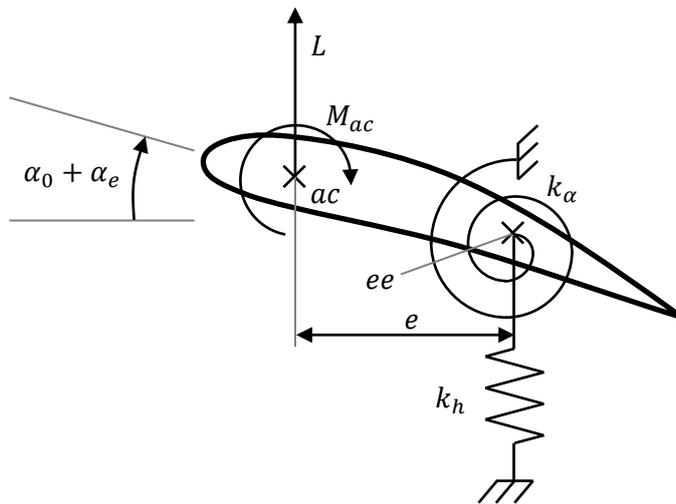


Figura 2.1: Modelización del perfil.

En la Figura 2.1 $\alpha_0 + \alpha_e$ representa el ángulo de ataque modificado por los elementos elásticos. La distancia e es la que hay entre el eje elástico ee y el centro aerodinámico ac . La ecuación de equilibrio será:

$$\begin{aligned} k_\alpha \alpha_e &= L \cdot e + M_{ac} \\ k_\alpha \alpha_e &= qS \cdot (e \cdot c_{l\alpha} (\alpha_0 + \alpha_e) + c \cdot c_{Mac}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Cuando se trabaja con perfiles, la superficie de referencia S representa la cuerda c , ya que la superficie por unidad de envergadura es $c \cdot 1$. Se elige esta nomenclatura para que tenga concordancia con los casos de ala larga.

Despejando el ángulo de ataque elástico α_e se obtiene:

$$\alpha_e = \frac{\frac{qS}{k_\alpha} (e \cdot c_{l\alpha} \cdot \alpha_0 + c \cdot c_{Mac})}{1 - \frac{qSe}{k_\alpha} c_{l\alpha}} \quad (2.2)$$

Para que se produzca la divergencia el denominador de la ecuación (2.2) se debe anular. Por lo tanto la presión dinámica de divergencia q_D y la velocidad de divergencia U_D son:

$$q_D = \frac{k_\alpha}{Sec_{l\alpha}} = \frac{1}{2} \rho_0 U_D^2 \Rightarrow U_D = \sqrt{\frac{2k_\alpha}{\rho Sec_{l\alpha}}} \quad (2.3)$$

Si el eje elástico x_{ee} está por delante del centro aerodinámico x_{ac} , es decir $e < 0$, entonces no existe la velocidad de divergencia.

En la Tabla 2.1 se recuerdan algunos valores habituales:

	Incompresible	Subsónico	Supersónico
Posición del centro aerodinámico x_{ac}	1/4	1/4	1/2
Coefficiente de sustentación c_l	$2\pi\alpha$	$2\pi\alpha/\beta$	$4\alpha/\beta$
Coefficiente β	1	$\sqrt{1 - M^2}$	$\sqrt{M^2 - 1}$

Tabla 2.1: Parámetros aerodinámicos habituales.

El planteamiento para el fenómeno de inversión de mando es el mismo, pero con un alerón. Se quiere ver qué incremento de sustentación produce este alerón. Lo primero que se debe suponer es que se está a una velocidad inferior a la de divergencia, y que por lo tanto se ha alcanzado un equilibrio en ángulo de ataque.

Ahora se toma este ángulo como referencia y se deflexa el alerón un ángulo β , Figura 2.2.

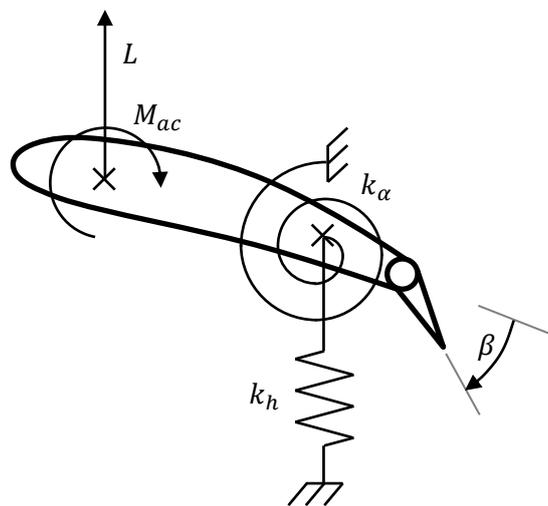


Figura 2.2: Modelización del perfil con alerón.

Esta deflexión modifica la distribución de la sustentación en el borde de salida del perfil, lo que origina un momento de cabeceo. El ángulo de ataque elástico debido únicamente a β será:

$$k_\alpha \cdot \alpha_e = L \cdot e + M_{ac} = qS \cdot \left(e \cdot (c_{l\alpha} \cdot \alpha_e + c_{l\beta} \cdot \beta) + c \cdot c_{Mac\beta} \cdot \beta \right) \quad (2.4)$$

Despejando se obtiene:

$$\frac{\alpha_e}{\beta} = \frac{c_{l\beta} + \frac{c}{e} \cdot c_{Mac\beta}}{\frac{k_\alpha}{qSe} - c_{l\alpha}} \quad (2.5)$$

Se pueden definir la variación de sustentación debida a la deflexión del alerón ΔL^R y la variación total ΔL^e , que incluye el efecto elástico, como:

$$\Delta L^R = q_\infty S c_{l\beta} \beta, \quad \Delta L^e = q_\infty S c_{l\beta} \beta + q_\infty S c_{l\alpha} \alpha_e \quad (2.6)$$

Entonces la efectividad del mando se define como:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta L^e}{\Delta L^R} &= 1 + \frac{c_{l\alpha}}{c_{l\beta}} \cdot \frac{\alpha_e}{\beta} = 1 + \frac{c_{l\alpha}}{c_{l\beta}} \cdot \frac{c_{l\beta} + \frac{c}{e} c_{Mac\beta}}{\frac{k_\alpha}{qSe} - c_{l\alpha}} = 1 + \frac{1 + \frac{c}{e} \cdot \frac{c_{Mac\beta}}{c_{l\beta}}}{\frac{k_\alpha}{qSec_{l\alpha}} - 1} \\ &= \frac{1 + \frac{qSc}{k_\alpha} \cdot \frac{c_{l\alpha} c_{Mac\beta}}{c_{l\beta}}}{1 - \frac{qSe}{K_\alpha} \cdot c_{l\alpha}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

La inversión de mando se produce cuando la efectividad se anula. La presión dinámica de inversión de mando q_R es entonces:

$$q_R = \frac{1}{2} \rho U_R^2 = -\frac{K_\alpha}{Sc} \cdot \frac{c_{l\beta}}{c_{Mac\beta} c_{l\alpha}} \quad (2.8)$$

La efectividad del mando también se puede escribir como L/L^R :

$$\frac{L}{L^R} = \frac{1 - \frac{q}{q_R}}{1 - \frac{q}{q_D}} \quad (2.9)$$

La Figura 2.3 representa la efectividad del mando en función de la presión dinámica.

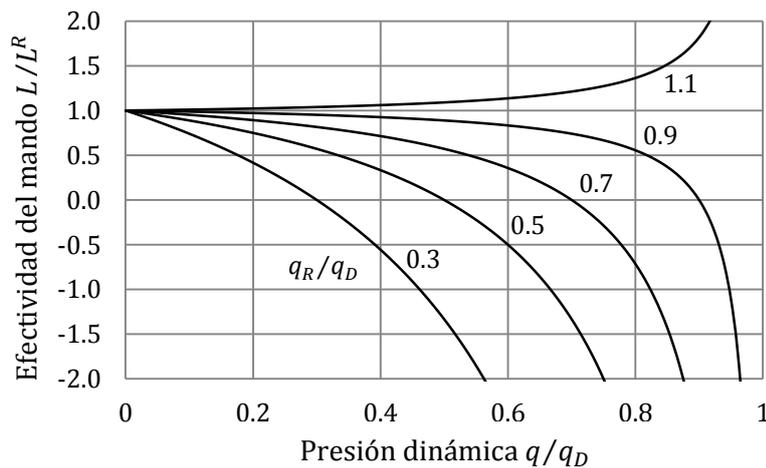


Figura 2.3: Efectividad del mando en función de la presión dinámica para diferentes presiones de inversión.

Tema 3. Aeroelasticidad dinámica. Flameo.

Se plantea la teoría del flameo con un ejemplo como el que se muestra en la Figura 2.4. Se supone que el sistema parte de un sistema estacionario equilibrado, por lo que sólo se consideran las variaciones temporales de las variables.

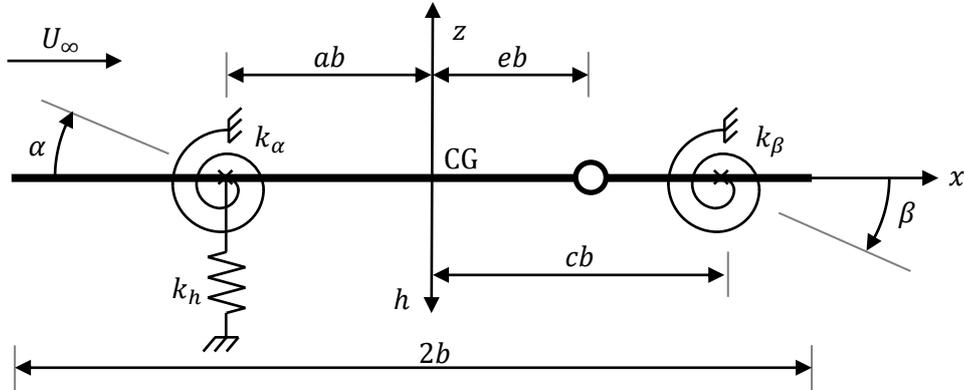


Figura 2.4: Modelo de perfil para el estudio del flameo.

El movimiento vertical h se define positivo hacia abajo. Las distancias horizontales a , c y e son definidas positivas hacia la derecha, por lo que a es negativa en la Figura 2.4.

Con el perfil sometido a una corriente U_∞ se trata de conocer el comportamiento temporal de $h(t)$, $\alpha(t)$ y $\beta(t)$. Se obtendrán la energía cinética y la energía potencial del sistema, y se plantearán las ecuaciones de Lagrange.

La posición de un punto del perfil en función del tiempo será:

$$z_p(x, t) = -h(t) + (ab - x) \cdot \alpha(t) + (cb - x) \cdot H(x - eb) \cdot \beta(t) \quad (2.10)$$

Donde $H(x)$ es la función escalón de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

La energía cinética T se calcula como:

$$\begin{aligned} dT &= \frac{1}{2} \cdot dm \cdot \dot{z}_p^2 \Rightarrow \\ T &= \frac{1}{2} \int_{-b}^b (-\dot{h} + (ab - x)\dot{\alpha} + (cb - x)H(x - eb)\dot{\beta})^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \int_{-b}^b (\dot{h}^2 + (ab - x)^2 \cdot \dot{\alpha}^2 + (cb - x)^2 \cdot H(x - eb) \cdot \dot{\beta}^2 - \\ &\quad - 2(cb - x) \cdot H(x - eb) \cdot \dot{h}\dot{\beta} - 2(ab - x) \cdot \dot{h}\dot{\alpha} + \\ &\quad + 2(ab - x)(cb - x) \cdot H(x - eb) \cdot \dot{\alpha}\dot{\beta}) dm \\ &= \frac{1}{2} M \dot{h}^2 + \frac{1}{2} I_\alpha \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} I_\beta \dot{\beta}^2 + S_\alpha \dot{h}\dot{\alpha} + S_\beta \dot{h}\dot{\beta} + (I_\beta + (c - a)bS_\beta) \dot{\alpha}\dot{\beta} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Donde S_α y S_β representan el momento estático, y I_α y I_β representan el momento de inercia, respecto a los ejes de α y β respectivamente.

La energía potencial U se obtiene de:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}k_h h^2 + \frac{1}{2}k_\alpha \alpha^2 + \frac{1}{2}k_\beta \beta^2 \\ &= \frac{1}{2}M\omega_h^2 h^2 + \frac{1}{2}I_\alpha \omega_\alpha^2 \alpha^2 + \frac{1}{2}I_\beta \omega_\beta^2 \beta^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Las frecuencias propias de la ecuación (2.13) no son las frecuencias acopladas del sistema, sino que son las frecuencias propias de los muelles, como si el resto de los grados de libertad estuvieran bloqueados.

$$\omega_h^2 = \frac{k_h}{M}, \quad \omega_\alpha^2 = \frac{k_\alpha}{I_\alpha}, \quad \omega_\beta^2 = \frac{k_\beta}{I_\beta}, \quad \omega_h, \omega_\alpha, \omega_\beta \neq \omega_1, \omega_2, \omega_3 \quad (2.14)$$

La disipación D es:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \frac{F_h}{\omega} \dot{h}^2 + \frac{1}{2} \frac{F_\alpha}{\omega} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \frac{F_\beta}{\omega} \dot{\beta}^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{Mg_h \omega_h^2}{\omega} \dot{h}^2 + \frac{1}{2} \frac{I_\alpha g_\alpha \omega_\alpha^2}{\omega} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \frac{I_\beta g_\beta \omega_\beta^2}{\omega} \dot{\beta}^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Se trata de una disipación histerética, que no depende de la frecuencia de oscilación. Se puede demostrar que, en flameo, la frecuencia ω es la misma para todos los grados de libertad. Se ha hecho también la suposición de que el acoplamiento modal en amortiguación es despreciable, por lo que no aparecen términos cruzados como en la energía cinética.

La ecuación de Lagrange para cada grado de libertad ξ queda:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right) + \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\xi}} = Q_\xi \quad (2.16)$$

Donde Q_ξ es la fuerza generalizada para el grado de libertad ξ . Desarrollando el sistema:

$$\begin{aligned} M\ddot{h} + S_\alpha \ddot{\alpha} + S_\beta \ddot{\beta} + \frac{M\omega_h^2 g_h}{\omega} \dot{h} + M\omega_h^2 h &= Q_h \\ S_\alpha \dot{h} + I_\alpha \ddot{\alpha} + (I_\beta + (c-a)bS_\beta) \ddot{\beta} + \frac{I_\alpha \omega_\alpha^2 g_\alpha}{\omega} \dot{\alpha} + I_\alpha \omega_\alpha^2 \alpha &= Q_\alpha \\ S_\beta \dot{h} + (I_\beta + (c-a)bS_\beta) \ddot{\alpha} + I_\beta \ddot{\beta} + \frac{I_\beta \omega_\beta^2 g_\beta}{\omega} \dot{\beta} + I_\beta \omega_\beta^2 \beta &= Q_\beta \end{aligned} \quad (2.17)$$

Las fuerzas generalizadas se pueden obtener aplicando el principio de los trabajos virtuales, mediante un desplazamiento virtual del perfil δz_p que origina un cambio virtual en los grados de libertad $\delta \xi$. Las fuerzas generalizadas serán:

$$Q_\xi = \frac{\partial W}{\partial \delta \xi}, \quad W = \int_{-b}^b q_\infty \cdot \Delta c_p \cdot \delta z_p \, dx \quad (2.18)$$

Dado que ni q_∞ ni Δc_{pT} dependerán del desplazamiento virtual del grado de libertad $\delta \xi$, basta con realizar la derivación únicamente en el término δz_p , utilizando la expresión (2.10).

Por lo que finalmente queda, recordando que el eje h apunta hacia abajo:

$$\begin{aligned} Q_h &= \int_{-b}^b q_\infty \Delta c_p (-1) dx = -L \quad [\text{N/m}], \text{ Fuerza 2D} \\ Q_\alpha &= \int_{-b}^b q_\infty \Delta c_p (ab - x) dx = M_\alpha \quad [(\text{N} \cdot \text{m})/\text{m}], \text{ Momento 2D} \\ Q_\beta &= \int_{eb}^b q_\infty \Delta c_p (cb - x) dx = M_\beta \quad [(\text{N} \cdot \text{m})/\text{m}], \text{ Momento 2D} \end{aligned} \quad (2.19)$$

En el Tema 4 se utilizará aerodinámica linealizada no estacionaria para obtener la variación de la distribución del coeficiente de presión Δc_p . Al considerar ángulos pequeños se desprecian los términos de segundo orden, por lo que será proporcional a los términos:

$$\Delta c_{pT} \propto \alpha, \beta, \dot{h}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \ddot{h}, \ddot{\alpha}, \ddot{\beta} \quad (2.20)$$

Por lo tanto las fuerzas dependerán de estos mismos términos, es decir, de la solución del movimiento, y se podrán añadir al lado derecho del sistema (2.17):

$$\begin{aligned} L(t) &= L(\alpha, \beta, \dot{h}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \ddot{h}, \ddot{\alpha}, \ddot{\beta}) \\ M_\alpha(t) &= M_\alpha(\alpha, \beta, \dot{h}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \ddot{h}, \ddot{\alpha}, \ddot{\beta}) \\ M_\beta(t) &= M_\beta(\alpha, \beta, \dot{h}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \ddot{h}, \ddot{\alpha}, \ddot{\beta}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Se definen los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} x_\alpha &= \frac{S_\alpha}{Mb} && \text{Distancia adimensional entre CG y } ee \\ x_\beta &= \frac{S_\beta}{Mb} && \text{Distancia adimensional entre CG}_{\text{alerón}} \text{ y } ee_{\text{alerón}} \\ r_\alpha^2 &= \frac{I_\alpha}{Mb^2} && \text{Radio de giro adimensional del perfil} \\ r_\beta^2 &= \frac{I_\beta}{Mb^2} && \text{Radio de giro adimensional del alerón} \end{aligned} \quad (2.22)$$

De forma que el sistema (2.17) se puede describir, dividiendo sus ecuaciones por $1/Mb$, $1/Mb^2$ y $1/Mb^2$ respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{h}}{b} + x_\alpha \ddot{\alpha} + x_\beta \ddot{\beta} + \frac{\omega_h^2 g_h}{\omega} \frac{\dot{h}}{b} + \omega_h^2 \frac{h}{b} &= -\frac{L}{Mb} \\ x_\alpha \frac{\ddot{h}}{b} + r_\alpha^2 \ddot{\alpha} + (r_\beta^2 + (c-a)x_\beta) \ddot{\beta} + \frac{r_\alpha^2 \omega_\alpha^2 g_\alpha}{\omega} \dot{\alpha} + r_\alpha^2 \omega_\alpha^2 \alpha &= \frac{M_\alpha}{Mb^2} \\ x_\beta \frac{\ddot{h}}{b} + (r_\beta^2 + (c-a)x_\beta) \ddot{\alpha} + r_\beta^2 \ddot{\beta} + \frac{r_\beta^2 \omega_\beta^2 g_\beta}{\omega} \dot{\beta} + r_\beta^2 \omega_\beta^2 \beta &= \frac{M_\beta}{Mb^2} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Considerando soluciones armónicas del tipo:

$$h(t) = h \cdot e^{i\omega t}, \quad \dot{h}(t) = i\omega h \cdot e^{i\omega t}, \quad \ddot{h}(t) = -\omega^2 h \cdot e^{i\omega t} \quad (2.24)$$

La variación de la distribución del coeficiente de presión Δc_{pT} se puede escribir como:

$$\Delta c_{pT} = (\Delta c_{p\alpha} + i\omega\Delta c_{p\dot{\alpha}} + (-\omega^2)\Delta c_{p\ddot{\alpha}})\alpha + (\dots)\beta + (\dots)h \quad (2.25)$$

Y el sistema se puede escribir matricialmente como:

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & x_\alpha & x_\beta \\ & r_\alpha^2 & r_\beta^2 + (c-a)x_\beta \\ \text{sym} & & r_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} + \\ & + i \begin{bmatrix} \omega_h^2 g_h & & \\ & r_\alpha^2 \omega_\alpha^2 g_\alpha & \\ & & r_\beta^2 \omega_\beta^2 g_\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \omega_h^2 & & \\ & r_\alpha^2 \omega_\alpha^2 & \\ & & r_\beta^2 \omega_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_h/Mb \\ Q_\alpha/Mb^2 \\ Q_\beta/Mb^2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Donde:

$$\begin{Bmatrix} Q_h/Mb \\ Q_\alpha/Mb^2 \\ Q_\beta/Mb^2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{M} \begin{bmatrix} -c_{lh} & -c_{l\alpha} & -c_{l\beta} \\ c_{M\alpha h} & c_{M\alpha\alpha} & c_{M\alpha\beta} \\ c_{M\beta h} & c_{M\beta\alpha} & c_{M\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Ahora se aplican al sistema (2.26) los siguientes pasos:

1. Dividir por ω^2 .
2. Sacar factor común ω_α^2 (frecuencia de referencia).
3. Se hace la hipótesis $g_\alpha \approx g_\beta \approx g_h$ (son difíciles de determinar con más precisión).

Se definen dos parámetros muy importantes que se emplearán a partir de ahora:

1. Frecuencia reducida k :

$$k = \frac{\omega b}{U_\infty} = \frac{b/U_\infty}{1/\omega} = \frac{\text{tiempo de residencia}}{\text{tiempo de oscilación}}, \quad \ll 1 \Rightarrow \text{casi-estacionario} \quad (2.28)$$

2. Coeficiente másico μ :

$$\mu = \frac{M}{\rho_\infty \pi b^2} = \frac{\text{masa del perfil}}{\text{masa del aire que lo rodea}} \approx \begin{cases} 40 - 80 & \text{avión transporte} \\ 10 & \text{planeador} \\ 2 - 5 & \text{barco, submarino} \end{cases} \quad (2.29)$$

Empleando estos dos parámetros y dividiendo por ω^2 se obtiene:

$$\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{M} = \frac{1}{2\mu\pi} \frac{U_\infty^2}{\omega^2 b^2} = \frac{1}{2\pi\mu k^2} \quad (2.30)$$

Y el sistema (2.26) queda:

$$\left(-\mathbf{M} + \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega}\right)^2 (1 + ig_\alpha) \bar{\mathbf{K}} - \frac{1}{2\pi\mu k^2} \mathbf{Q}\right) \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Donde las matrices de masa \mathbf{M} , de rigidez con disipación $\bar{\mathbf{K}}$ y de fuerzas \mathbf{Q} son:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & x_\alpha & x_\beta \\ & r_\alpha^2 & r_\beta^2 + (c - a)x_\beta \\ \text{sym} & & r_\beta^2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_\alpha^2} & & \\ & r_\alpha^2 & \\ & & r_\beta^2 \frac{\omega_\beta^2}{\omega_\alpha^2} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -c_{lh} & -c_{l\alpha} & -c_{l\beta} \\ c_{M\alpha h} & c_{M\alpha\alpha} & c_{M\alpha\beta} \\ c_{M\beta h} & c_{M\beta\alpha} & c_{M\beta\beta} \end{bmatrix}$$

La solución trivial sería que el vector de desplazamientos sea nulo. Descartando esta solución la otra posibilidad es:

$$\det\left(-\mathbf{M} + \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega}\right)^2 (1 + ig_\alpha) \bar{\mathbf{K}} - \frac{1}{2\pi\mu k^2} \mathbf{Q}\right) = 0 \quad (2.33)$$

Se puede reescribir como un problema de autovalores:

$$\det\left(\bar{\mathbf{K}}^{-1} \left(\mathbf{M} + \frac{1}{2\pi\mu k^2} \mathbf{Q}\right) - \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega}\right)^2 (1 + ig_\alpha) \mathbf{I}_3\right) = \det(\mathbf{A} - z \mathbf{I}_3) = 0 \quad (2.34)$$

Existen varios métodos para la resolución. Uno de ellos es el llamado VG:

1. Seleccionar un rango para la frecuencia reducida k entre 10^{-3} y 1, con:

$$k_1 > k_2 > k_3 > \dots > k_n \quad (2.35)$$

2. Entre dos valores de k se calculan p matrices \mathbf{Q} adicionales por interpolación:

$$\begin{matrix} k_1 & & & \dots & k_2 & & & \dots & k_n \\ \mathbf{Q}_{k1} & \mathbf{Q}_{k11} & \mathbf{Q}_{k12} & \dots & \mathbf{Q}_{k2} & \mathbf{Q}_{k21} & \mathbf{Q}_{k22} & \dots & \mathbf{Q}_n \end{matrix} \quad (2.36)$$

3. Partiendo de la frecuencia reducida k_i mayor se obtiene:

$$\mathbf{A}_i = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \left(\mathbf{M} + \frac{1}{2\pi\mu k_i^2} \mathbf{Q}_{kij} \right) \quad (2.37)$$

4. Se calculan los autovalores z_i de la matriz \mathbf{A} .

5. Para cada autovalor se comprueba:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re}(z_i) > 0 \quad ? \\ \frac{\operatorname{Im}(z_i)}{\operatorname{Re}(z_i)} \approx g_\alpha \quad ? \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{sí}} \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{Re}(z_i) = \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega_F}\right)^2 & \rightarrow \omega_F \\ k_F = \frac{\omega_F b}{U_F} & \rightarrow U_F \end{array} \right. \quad (2.38)$$

6. En caso negativo se vuelve al paso 3 y se pasa a la siguiente \mathbf{Q}_{kij} .

En el caso compresible la matriz \mathbf{Q} depende también del número de mach M_∞ , y además el parámetro másico μ depende de la densidad ρ_∞ , que a su vez depende de la altitud H , igual que la velocidad del sonido a_∞ . Para obtener la solución en régimen compresible hay que comprobar para varias altitudes si existe la velocidad de flameo.

1. Fijar un número de Mach M_∞ .
2. Aplicar los pasos 1 y 2 del método VG para incompresible, con $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(M_\infty, k_i)$.
3. Fijar una altitud H , con la que se obtiene μ y a_∞ .
4. Continuar el método VG para encontrar k_F, ω_F, U_F .
5. Comprobar si $U_F/a_\infty = M_\infty$.
 - Si: Se ha obtenido un punto (M_∞, H) para el que se produce el flameo. Para obtener el siguiente punto volver al paso 1.
 - No: No se produce flameo a esa altitud para el número de Mach fijado. Volver al paso 3.

El fenómeno de flameo puede interpretarse físicamente de dos formas. Desde un punto de vista aerodinámico hay que tener en cuenta que la circulación global debe ser nula, motivo por el que al aparecer una circulación en el perfil, aparece una de signo contrario en la posición inicial. Por esta misma razón, al modificarse la circulación por efecto de la oscilación en α , se desprenden pequeñas circulaciones adicionales continuamente, como muestra la Figura 2.5.

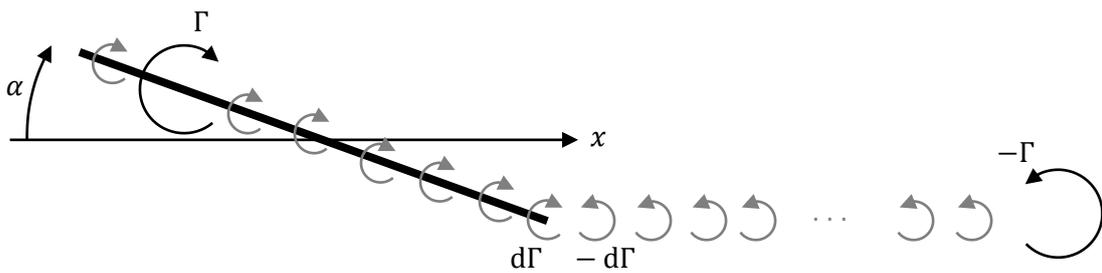


Figura 2.5: Conservación de la circulación a lo largo del tiempo.

Si la variación es lenta entonces se puede considerar que estas circulaciones son pequeñas y que el c_l está en fase con el grado de libertad α . Pero, si no son despreciables, hay que añadir otra contribución c_{ldf} , proporcional a $\dot{\alpha}$, y por lo tanto desfasada en $\pi/2$ rad.

$$c_{lf}(t) = 2\pi\alpha(t) \quad (\text{En fase}), \quad c_{ldf} \propto \dot{\alpha} \quad (\text{En desfase}) \quad (2.39)$$

Ahora interesa comprobar el trabajo que realiza cada una de estas contribuciones a lo largo de un periodo de oscilación completo de 2π rad, suponiendo la solución armónica:

$$\alpha(t) = \alpha(0) \cdot \cos \omega t, \quad \dot{\alpha}(t) = -\omega \cdot \alpha(0) \cdot \sin \omega t \quad (2.40)$$

El trabajo se puede calcular como:

$$W = \int F d\alpha = \int_0^{2\pi/\omega} F \dot{\alpha} dt, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}, \quad \tau = \omega t \quad (2.41)$$

Para la contribución en fase se tiene:

$$W_f \propto \int_0^{2\pi/\omega} \alpha \cdot \dot{\alpha} dt \propto \int_0^{2\pi} \cos \tau \sin \tau d\tau = 0 \quad (2.42)$$

Algo lógico, ya que durante la mitad del ciclo la fuerza acompaña al desplazamiento y durante la otra mitad se opone al mismo.

En el caso de la contribución desfasada:

$$W_{df} \propto \int_0^{2\pi/\omega} \dot{\alpha} \cdot \dot{\alpha} dt \propto \int_0^{2\pi} \sin \tau \sin \tau d\tau = \pi \neq 0 \quad (2.43)$$

Es decir, el valor del trabajo dependerá del término de proporcionalidad, porque el término armónico no se anulará, a diferencia del caso de la contribución en fase. Si $W_{df} < 0$ entonces el aire extrae energía del sistema y no se produce el flameo. En el caso contrario, si $W_{df} > 0$, el aire introduce energía en el sistema, y si la estructura no es capaz de disipar el trabajo, se producirá el flameo.

Desde un punto de vista estructural se puede considerar un sistema de 2 grados de libertad sin amortiguación. Planteando la ecuación del movimiento de la estructura:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\xi} + \mathbf{K} \cdot \xi = q_{\infty} b \cdot \mathbf{Q} \cdot \xi \quad (2.44)$$

Aunque habitualmente no se hace, porque es complicado transformar la matriz de fuerzas \mathbf{Q} , se puede aplicar la transformada de Laplace a la ecuación (2.44):

$$a_0 p^4 + a_2 p^2 + a_0 = 0 \Rightarrow p^2 = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_4}}{2a_0}, \quad p = e^{\sigma + i\omega t} \quad (2.45)$$

Si se dibujan las raíces en función de la velocidad, Figura 2.6, se comprueba que a partir de $U_{\infty} \geq U_F$ uno de los grados de libertad empieza a extraer energía del otro.

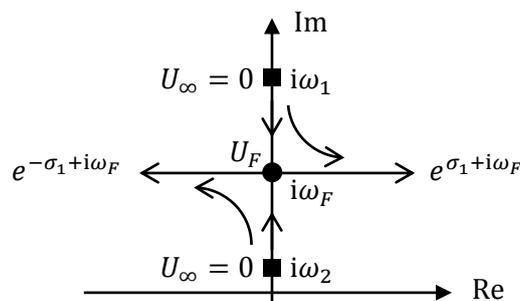


Figura 2.6: Evolución de las raíces del sistema estructural.

Por último, resulta conveniente estudiar la influencia de los diferentes parámetros en el flameo para un caso con 2 grados de libertad en α y h .

- La velocidad de flameo se hará mínima cuando las dos frecuencias propias desacopladas sean muy cercanas.
- También se hará mínima para valores del parámetro másico entre $\mu = 2$ y $\mu = 10$, lo que puede afectar a aviones pequeños.
- Del mismo modo también se hará mínima para x_α pequeña. Para aumentarla se aplica normalmente un equilibrio dinámico, añadiendo algo de masa al borde de ataque del ala o de los alerones y flaps.
- Por último, en el caso compresible, para aviones de transporte, el flameo no empieza hasta $M_\infty = 0.4$, y a partir de ahí la altitud H aumenta hasta alcanzar un pico en $M_\infty = 1$, para después disminuir un poco y estabilizarse.

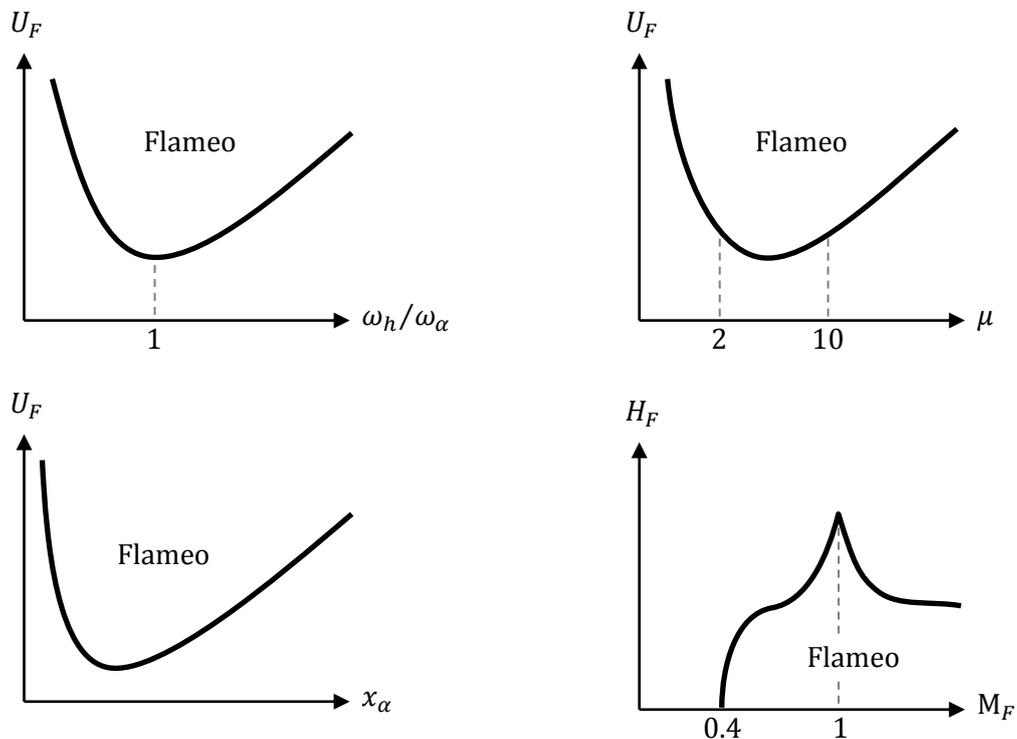


Figura 2.7: Evolución del flameo con diferentes parámetros.

Tema 4. Teoría del perfil oscilante y cálculo de fuerzas aerodinámicas en flujo incompresible. Función de Theodorsen.

En este tema se calcularán las fuerzas aerodinámicas no estacionarias que se producen cuando todos los grados de libertad oscilan con una misma frecuencia ω .

Se realizan las siguientes hipótesis:

1. Fluido ideal, es decir, incompresible, no viscoso y con conductividad térmica nula.
2. Campo irrotacional en $t = 0$, por lo tanto la vorticidad global se tendrá que conservar.
3. Teoría linealizada. Causa y efecto del mismo orden.

La ecuación fundamental es la de continuidad, de donde se deduce que el campo de velocidades \vec{V} se deriva de un potencial Φ :

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = \nabla \Phi \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \Phi(x, z, t) = 0 \quad (2.46)$$

Hay que recordar que el potencial Φ es una función armónica, que cumple la ecuación de Laplace. Las condiciones de contorno son:

- En el perfil, superficie fluida, con velocidad tangente al obstáculo.

$$F(x, z, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \nabla F = 0 \quad (2.47)$$

- En el campo lejano, la velocidad es uniforme.

$$x^2 + z^2 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \Phi = U_\infty x \quad (2.48)$$

- Se cumple la condición de Kutta en el borde de salida.

$$\Delta c_p \Big|_{x=b} = 0 \quad (2.49)$$

El perfil se descompone en efectos estacionarios y transitorios. Se supone que las magnitudes estacionarias están en equilibrio y se estudiarán las fuerzas transitorias. El espesor o la curvatura no tienen transitorio, el perfil no se infla ni se dobla a lo largo de la cuerda.

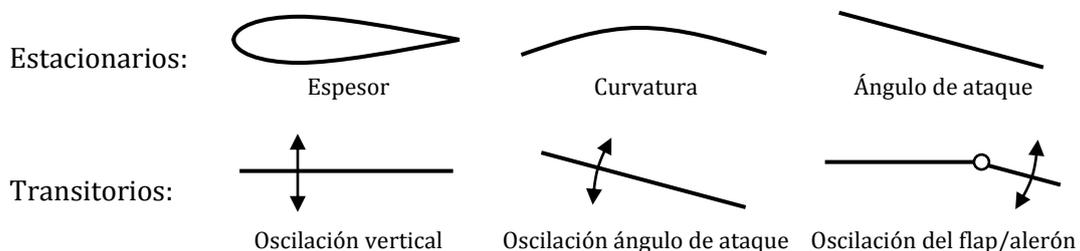


Figura 2.8: Descomposición del perfil.

Es conveniente definir la escala de estos parámetros para poder determinar la magnitud de sus efectos. En comparación con la cuerda, referencia de orden unidad, se considera que el espesor, la curvatura y el ángulo de ataque son de una magnitud $\tau \ll 1$. Del mismo modo se considera que las oscilaciones tendrán una magnitud $\delta \ll \tau$.

La geometría del perfil se puede definir a partir de la función:

$$F(x, z, t) = z - \tau \cdot z_0(x) - \delta \cdot z_1(x, t) = 0 \quad (2.50)$$

Donde z_0 contiene los parámetros geométricos estacionarios y z_1 contiene los transitorios. Nótese que la definición de τ y δ hace que z_0 y z_1 sean de orden unidad.

Aplicando la tercera hipótesis, se supone entonces que la solución para el potencial será el potencial correspondiente al flujo sin perturbar $U_\infty x$, de magnitud unidad, junto con el efecto de las perturbaciones estacionarias φ_0 , escaladas una magnitud τ , y el efecto de las perturbaciones transitorias φ_1 , escaladas una magnitud δ .

$$\Phi(x, z, t) = U_\infty x + \tau \cdot \varphi_0(x, z) + \delta \cdot \varphi_1(x, z, t) \quad (2.51)$$

Nótese que la definición de τ y δ hace que φ_0 y φ_1 también sean de orden unidad. Si se introduce esta solución en la ecuación de continuidad (2.46), al aplicar la laplaciana el término correspondiente al flujo sin perturbar $U_\infty x$ desaparece. Separando los términos según su magnitud, τ ó δ , se obtienen entonces dos ecuaciones:

$$\nabla^2 \varphi_0(x, z) = 0, \quad \nabla^2 \varphi_1(x, z, t) = 0 \quad (2.52)$$

La condición de contorno a aplicar en el campo lejano para estas ecuaciones es inmediata:

$$x^2 + z^2 \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi_0 = \varphi_1 = 0 \quad (2.53)$$

Para obtener la condición de contorno en el perfil hay que introducir la ecuación de su geometría (2.50) y la solución para el potencial (2.51) en la condición de contorno (2.47).

$$\frac{DF}{Dt} = 0 \Rightarrow -\delta \cdot \frac{\partial z_1}{\partial t} + \begin{Bmatrix} U_\infty + \tau \cdot \varphi_{0x} + \delta \cdot \varphi_{1x} \\ \tau \cdot \varphi_{0z} + \delta \cdot \varphi_{1z} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\tau \cdot z_{0x} - \delta \cdot z_{1x} \\ 1 \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.54)$$

Donde los subíndices x y z hacen referencia a las derivadas en esas coordenadas. Esta ecuación se puede separar según el orden de magnitud de sus términos:

$$\begin{aligned} o(\tau) \quad -U_\infty \cdot z_{0x} + \varphi_{0z} = 0 &\Rightarrow \varphi_{0z} = U_\infty \cdot z_{0x} \\ o(\delta) \quad -z_{1t} - U_\infty \cdot z_{1x} + \varphi_{1z} = 0 &\Rightarrow \varphi_{1z} = U_\infty \cdot z_{1x} + z_{1t} \end{aligned} \quad (2.55)$$

La derivada temporal z_{1t} es una novedad respecto al procedimiento que se seguía en la asignatura "Aerodinámica". Estas condiciones para las derivadas en z de φ_0 y φ_1 se imponen en el perfil, es decir, en $z = \tau z_0 + \delta z_1$. Pero linealizando esta ecuación para el perfil se puede considerar que es suficiente aplicarlas en $z = 0$.

$$\varphi_{0z}|_{z=0} = U_\infty \cdot z_{0x}, \quad \varphi_{1z}|_{z=0} = U_\infty \cdot z_{1x} + z_{1t} \quad (2.56)$$

Por último, para obtener la condición de Kutta, hay que aplicar la ecuación de Euler-Bernoulli, relacionando los valores locales con los del campo lejano.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{p}{\rho_\infty} = \frac{1}{2} U_\infty^2 + \frac{p_\infty}{\rho_\infty} = ct \quad (2.57)$$

La expresión para la presión p linealizada se puede obtener como en el caso del potencial o de la geometría del perfil, añadiendo las diferentes perturbaciones:

$$p = p_\infty + \tau \cdot p_0(x, z) + \delta \cdot p_1(x, z, t) \quad (2.58)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.57) y separando los términos según su orden de magnitud:

$$\begin{aligned} o(\tau) \quad U_\infty \cdot \varphi_{0x} + \frac{p_0}{\rho_\infty} = 0 &\Rightarrow \frac{p_0}{\rho_\infty} = -U_\infty \cdot \varphi_{0x} \\ o(\delta) \quad \varphi_{1t} + U_\infty \varphi_{1x} + \frac{p_1}{\rho_\infty} = 0 &\Rightarrow \frac{p_1}{\rho_\infty} = -(U_\infty \varphi_{1x} + \varphi_{1t}) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Escrito en términos del coeficiente de presión c_p :

$$\Delta c_{p0}(x, z) = -2 \frac{\varphi_{0x}}{U_\infty}, \quad \Delta c_{p1}(x, z, t) = -2 \left(\frac{\varphi_{1x}}{U_\infty} + \frac{\varphi_{1t}}{U_\infty^2} \right) \quad (2.60)$$

Y la condición de Kutta queda:

$$\Delta c_{p0}|_{x=b} = 0, \quad \Delta c_{p1}|_{x=b} = 0 \quad (2.61)$$

En la asignatura “Aerodinámica” se tenía una distribución de torbellinos estacionaria sobre el perfil. El salto de velocidades a través del perfil venía representado por la intensidad de la distribución de torbellinos γ_a (a de *airfoil*). Como ya se ha comentado, dado que la circulación global debe mantenerse nula, en régimen transitorio se desprende una distribución de torbellinos γ_w (w de *wake*) para compensar los cambios en la distribución del perfil γ_a .

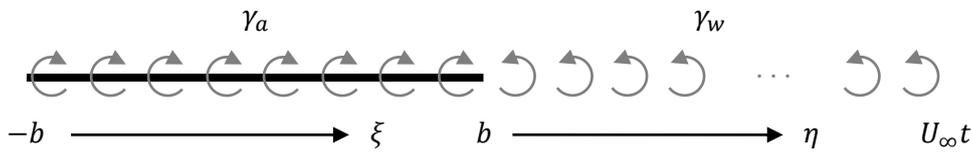


Figura 2.9: Desprendimiento de torbellinos de estela.

Se asumen las siguientes hipótesis para la distribución de torbellinos de estela γ_w :

1. Los torbellinos permanecen en $z = 0$.
2. Los torbellinos viajan aguas abajo a una velocidad U_∞ .
3. Los torbellinos no inducen velocidad sobre sí mismos.

En “Aerodinámica” se obtuvo, aplicando la integral de Cauchy a un problema anti-simétrico:

$$\varphi_{1z}(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\gamma_a(\xi, t)}{x - \xi} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_b^{U_\infty t} \frac{\gamma_w(\eta, t)}{x - \eta} d\eta \quad (2.62)$$

Se suponen soluciones armónicas, donde las variables con barra representan amplitudes:

$$\begin{aligned} z_1(x, t) = \bar{z}_1(x) \cdot e^{i\omega t}, \quad \varphi_1(x, z, t) = \bar{\varphi}_1(x, z) \cdot e^{i\omega t}, \\ p_1(x, z, t) = \bar{p}_1(x, z) \cdot e^{i\omega t}, \quad \gamma_a(\xi, t) = \bar{\gamma}_a(\xi) \cdot e^{i\omega t}, \quad \gamma_w(\eta, t) = \bar{\gamma}_w(\eta) \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.62), considerando que ya se ha alcanzado el régimen permanente, y que por lo tanto $U_\infty t \rightarrow \infty$, se obtiene:

$$\begin{aligned} |\bar{\varphi}_{1z}(x, z) \cdot e^{i\omega t}|_{z=0} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\bar{\gamma}_a(\xi) \cdot e^{i\omega t}}{x - \xi} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_b^\infty \frac{\bar{\gamma}_w(\eta) \cdot e^{i\omega t}}{x - \eta} d\eta \\ &= (i\omega \bar{z}_1 + U_\infty \bar{z}_{1x}) \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Aplicando la condición de Kutta (2.61) y la definición para el salto de presiones (intradós menos extradós) de la ecuación (2.60) se obtiene, para el borde de salida:

$$|\Delta\varphi_{1x}|_{x=b} = -\frac{1}{U_\infty} |\Delta\varphi_{1t}|_{x=b} \quad (2.65)$$

En "Aerodinámica" se vio que el salto de velocidad horizontal es:

$$|\Delta\varphi_{1x}|_{x=b} = -\gamma_w(b, t) \quad (2.66)$$

Y respecto al término $\Delta\varphi_{1t}$ se puede considerar que la variación a lo largo del tiempo se ha propagado longitudinalmente con de la estela. Dado que la circulación global se conserva:

$$|\Delta\varphi_{1t}|_{x=b} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^b \Delta\varphi_{1x} dx = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^b \gamma_a(x, t) dx = -\frac{d\Gamma}{dt} \quad (2.67)$$

Por lo que la condición de Kutta queda:

$$\gamma_w(b, t) = -\frac{1}{U_\infty} \frac{d\Gamma}{dt}, \quad \Gamma = \int_{-b}^b \gamma_a(x) dx \quad (2.68)$$

Este es el valor para γ_w en el instante de tiempo t en la posición b . Dado que los torbellinos se desplazan aguas abajo a una velocidad U_∞ , en cualquier otra posición η el valor será:

$$\gamma_w(\eta, t) = -\frac{1}{U_\infty} \left. \frac{d\Gamma}{dt} \right|_{t - \frac{\eta-b}{U_\infty}} \quad (2.69)$$

Aplicando el movimiento armónico:

$$\bar{\gamma}_w(\eta) \cdot e^{i\omega t} = -\frac{1}{U_\infty} (i\omega) \bar{\Gamma} \cdot e^{i\omega(t - \frac{\eta-b}{U_\infty})} \quad (2.70)$$

Los términos exponenciales se pueden cancelar:

$$\bar{\gamma}_w(\eta) = -\frac{1}{U_\infty} (i\omega) \bar{\Gamma} \cdot e^{-i\omega \frac{\eta-b}{U_\infty}} \quad (2.71)$$

Sustituyendo $\bar{\gamma}_w(\eta)$ en la ecuación (2.64) se obtiene:

$$\bar{\varphi}_{1z} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\bar{\gamma}_a(\xi)}{x - \xi} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_b^\infty -\frac{i\omega \bar{\Gamma}}{U_\infty} \cdot \frac{e^{-i\omega \frac{\eta-b}{U_\infty}}}{x - \eta} d\eta \quad (2.72)$$

Se procede a continuación a adimensionalizar las variables. Las variables sin barra que no dependan del tiempo son amplitudes adimensionalizadas:

$$x \rightarrow \frac{x}{b}, \quad \Gamma = \frac{\bar{\Gamma}}{bU_\infty}, \quad \varphi_{1z} = \frac{\bar{\varphi}_{1z}}{U_\infty}, \quad \gamma_a = \frac{\bar{\gamma}_a}{U_\infty} \quad (2.73)$$

Sustituyendo:

$$U_\infty \cdot \varphi_{1z}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{U_\infty \cdot \gamma_a(\xi)}{x - \xi} d\xi + \frac{i\omega U_\infty b \Gamma}{2\pi U_\infty} \int_1^\infty \frac{e^{i\frac{\omega b}{U_\infty}(1-\eta)}}{x - \eta} d\eta \quad (2.74)$$

Se puede cancelar el factor U_∞ y emplear la frecuencia reducida k :

$$\varphi_{1z}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_a(\xi)}{x - \xi} d\xi + \frac{ik\Gamma}{2\pi} \cdot e^{ik} \int_1^\infty \frac{e^{-ik\eta}}{x - \eta} d\eta, \quad k = \frac{\omega b}{U_\infty} \quad (2.75)$$

Llegado este punto se puede aplicar el método de Goldstein para obtener γ_a . Dadas una función conocida $f(x)$ y una función incógnita $g(x)$, la ecuación:

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(\xi)}{x - \xi} d\xi \quad (2.76)$$

Tiene como solución:

$$g(x) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi \quad (2.77)$$

Esto se puede aplicar a la ecuación (2.75) como:

$$\underbrace{\varphi_{1z} - \frac{ik\Gamma}{2\pi} \cdot e^{ik} \int_1^\infty \frac{e^{-ik\eta}}{x - \eta} d\eta}_{f(x)} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_a(\xi)}{x - \xi} d\xi \quad (2.78)$$

Resultando en:

$$\gamma_a(x) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{\xi - x} \left[\varphi_{1z} - \frac{ik\Gamma}{2\pi} \cdot e^{ik} \int_1^\infty \frac{e^{-ik\eta}}{\xi - \eta} d\eta \right] d\xi \quad (2.79)$$

El término que depende de φ_{1z} se tiene que integrar en ξ según cada problema. Para desarrollar el otro término es más cómodo invertir el orden de integración, es decir, integrar primero en ξ y después en η . La integral en ξ será:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \left(\frac{1}{\xi - x} \cdot \frac{1}{\xi - \eta} \right) d\xi \quad (2.80)$$

Dado que se realizarán muchas integrales similares, se presentan en la Tabla 2.2 los resultados de algunas integrales habituales.

1.	$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \cdot \frac{1}{x-\xi} d\xi = -\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \cdot \frac{1}{x-\xi} d\xi = -\pi$	
2.	$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \cdot \frac{\xi}{x-\xi} d\xi = -\pi(1+x)$	
3.	$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \cdot \frac{\xi}{x-\xi} d\xi = -\pi(1-x)$	Donde: $-1 \leq x \leq 1$
4.	$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \cdot \frac{\xi^2}{x-\xi} d\xi = -\pi\left(\frac{1}{2} + x + x^2\right)$	
5.	$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \cdot \frac{\xi^2}{x-\xi} d\xi = \pi\left(\frac{1}{2} - x + x^2\right)$	
6.	$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \cdot \xi^2 d\xi = \frac{\pi}{2}$	
7.	$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \cdot \frac{1}{\xi-\lambda} d\xi = \pi\left(1 - \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\right)$	Donde: $\lambda \geq 1$
8.	$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \cdot \frac{1}{\xi-\lambda} d\xi = \pi\left(1 - \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)$	

Tabla 2.2: Integrales habituales. Los parámetros x y λ se pueden ajustar según convenga.

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{\xi-x} \cdot \frac{1}{\xi-\eta} = \frac{1}{x-\eta} \left(\frac{1}{\xi-x} - \frac{1}{\xi-\eta} \right) \quad (2.81)$$

Entonces la integral (2.80) se puede resolver empleando las integrales 1 y 7 de la Tabla 2.2.

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \left(\frac{1}{\xi-x} \cdot \frac{1}{\xi-\eta} \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{x-\eta} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \left(\frac{1}{\xi-x} - \frac{1}{\xi-\eta} \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{x-\eta} \left(\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \cdot \frac{1}{\xi-x} d\xi - \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \cdot \frac{1}{\xi-\eta} d\xi \right) = \\ &= \frac{1}{x-\eta} \left(\pi - \pi \left(1 - \sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}} \right) \right) = \frac{1}{x-\eta} \cdot \pi \sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}} \end{aligned} \quad (2.82)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (2.79):

$$\gamma_a(x) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{\varphi_{1z}}{\xi-x} d\xi - \frac{ik\Gamma e^{ik}}{2\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-ik\eta}}{x-\eta} \pi \sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}} d\eta \right) \quad (2.83)$$

Integrando esta ecuación a lo largo del perfil se puede obtener una ecuación para Γ como se define en la ecuación (2.68):

$$\Gamma = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{\varphi_{1z}}{\xi-x} d\xi - \frac{ik\Gamma e^{ik}}{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{e^{-ik\eta}}{x-\eta} \pi \sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}} d\eta \right) dx \quad (2.84)$$

Después de invertir de nuevo el orden de integración, integrar en x , y aplicar las integrales 1 y 8 de la Tabla 2.2, queda finalmente:

$$\Gamma = -2 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \varphi_{1z} d\xi - ik\Gamma e^{ik} \int_1^{\infty} e^{-ik\eta} \left(\sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}} - 1 \right) d\eta \quad (2.85)$$

Se introducen entonces las funciones de Hankel segunda especie de orden 0 y 1, representadas por $H_0^{(2)}$ y $H_1^{(2)}$ y definidas como:

$$H_0^{(2)}(z) = \frac{2i}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{e^{-izt}}{\sqrt{t^2-1}} dt, \quad H_1^{(2)}(z) = -\frac{2i}{\pi z} \int_1^{\infty} \frac{e^{-izt}}{(t^2-1)^{3/2}} dt \quad (2.86)$$

A partir de estas funciones es posible escribir la integral en η como:

$$\int_1^{\infty} e^{-ik\eta} \left(\sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}} - 1 \right) d\eta = -\frac{\pi}{2} \left(H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k) \right) - \frac{e^{-ik}}{ik} \quad (2.87)$$

De forma que la solución para la circulación Γ queda:

$$\Gamma = \frac{4}{\pi e^{ik} ik \left(H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k) \right)} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \varphi_{1z}(\xi, k) d\xi \quad (2.88)$$

La solución armónica también se aplica a φ_{1z} antes de integrarla:

$$\varphi_{1z} = U_{\infty} z_{1x} + z_{1t} \Rightarrow \bar{\varphi}_{1z} \cdot e^{i\omega t} = U_{\infty} \bar{z}_{1x} \cdot e^{i\omega t} + i\omega \bar{z}_1 \cdot e^{i\omega t} \quad (2.89)$$

Eliminando las exponenciales y adimensionalizando queda:

$$\varphi_{1z} = z_{1x} + \frac{i\omega b}{U_{\infty}} z_1 \quad (2.90)$$

Ahora que ya se tiene la distribución de circulación $\gamma_a(x)$, y también la circulación Γ , interesa obtener el salto de presiones. Aplicando la solución armónica al coeficiente de presión:

$$c_{p1} = -\frac{2}{U_{\infty}} \left(\varphi_{1x} + \frac{1}{U_{\infty}} \varphi_{1t} \right) \Rightarrow c_{p1} = -\frac{2}{U_{\infty}} \left(\bar{\varphi}_{1x} + \frac{i\omega}{U_{\infty}} \bar{\varphi}_1 \right) \quad (2.91)$$

Y adimensionalizando queda:

$$c_{p1} = -2(\varphi_{1x} + ik \cdot \varphi_1) \quad (2.92)$$

El salto de presiones en el perfil es la diferencia de intradós c_{p1}^- menos extradós c_{p1}^+ :

$$\Delta c_{p1} = c_{p1}^- - c_{p1}^+ = -2|\Delta\varphi_{1x} + ik \Delta\varphi_1|_{z=0} \quad (2.93)$$

Teniendo en cuenta:

$$\Delta\varphi_{1x} = -\gamma_a(x), \quad \Delta\varphi_1 = \int_{-\infty}^x \Delta\varphi_{1x} dx = - \int_{-1}^x \gamma_a(x) dx \quad (2.94)$$

Entonces queda:

$$\Delta c_{p1} = 2 \left(\gamma_a(x) + ik \int_{-1}^x \gamma_a(x) dx \right) \quad (2.95)$$

Aplicando la Tabla 2.2 se llega a:

$$\Delta c_{p1} = 2 \left\{ \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{1z}(\xi, k) \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} - ik\Lambda_1(x, \xi) \right) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} (1 - C(k)) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \varphi_{1z}(\xi, k) d\xi \right\} \quad (2.96)$$

Donde $C(k)$ es la función de Theodorsen, que viene dada por:

$$C(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)} = F(k) + iG(k), \quad k \rightarrow 0 \Rightarrow C(k) \rightarrow 1 \quad (2.97)$$

Y $\Lambda_1(x, \xi)$ es:

$$\Lambda_1(x, \xi) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - x\xi + \sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - x^2}}{1 - x\xi - \sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - x^2}} \right) \quad (2.98)$$

Aunque es matemáticamente inconsistente, si se toma un valor para la frecuencia reducida k pequeño, $k \approx 10^{-2}$, se podrían despreciar todos los términos menos:

$$\Delta c_{p1} = \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{1z}(\xi, k) \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} \right) d\xi \quad (2.99)$$

Esto es matemáticamente inconsistente porque no se han despreciado las k que hay en φ_{1z} . Aun así es un procedimiento que resulta adecuado, porque ésta es la misma solución que se obtenía en "Aerodinámica", salvo porque la condición φ_{1z} es diferente.

El concepto es el de operador aerodinámico estacionario. Se trata de un operador representado por \mathcal{A} que es aplicado a la condición de contorno en el caso estacionario w_0 . Si este mismo operador estacionario se aplica a una condición no estacionaria, entonces se está aplicando aerodinámica casi-estacionaria:

$$\Delta c_{p0} = \mathcal{A}(w_0), \quad \Delta c_{p1} = \mathcal{A}(w_1) \quad (2.100)$$

Donde w es solamente otra forma de llamar a la condición φ_z , que representa la velocidad vertical en el perfil, de ahí la letra w .

$$\varphi_{z1} = w_1 = z_{1x} + ikz_1 \quad (2.101)$$

El operador \mathcal{A} puede ser la ecuación (2.99), como es el caso, o bien puede ser ejecutar un código de CFD, o cualquier cosa que vincule la condición estacionaria al salto de presiones. Interesa ahora obtener el valor de Δc_{p1} integrando la ecuación (2.99) para las diferentes z_1 , es decir, para los diferentes movimientos del perfil ilustrados en la Figura 2.8.

En el caso del movimiento vertical del perfil (flexión para un ala larga) se tiene la condición:

$$z_1 = -\frac{h}{b} \Rightarrow z_{1x} = 0 \Rightarrow w_1 = -ik\frac{h}{b} \quad (2.102)$$

Por lo que se puede integrar la ecuación (2.99) aplicando la Tabla 2.2, obteniendo:

$$\Delta c_{p1h} = 4 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot ik\frac{h}{b} \quad (2.103)$$

Para la oscilación en ángulo de ataque (torsión para un ala larga) se tiene:

$$z_1 = (a-x)\alpha \Rightarrow z_{1x} = -\alpha \Rightarrow w_1 = -\alpha + ik(a-\xi)\alpha \quad (2.104)$$

E integrando la ecuación (2.99) se obtiene:

$$\Delta c_{p1\alpha} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \alpha \cdot (4 + ik \cdot 4(1+x-a)) \quad (2.105)$$

Para el caso del alerón se hace la simplificación de que la posición de la charnela e es 0:

$$z_1 = (c-x)\beta H(x) \Rightarrow z_{1x} = -\beta H(x) \Rightarrow w_1 = (-\beta + ik(c-\xi)\beta)H(x) \quad (2.106)$$

La integración sólo hay que hacerla entre 0 y 1 por la función escalón de Heaviside $H(x)$. Hay que aplicar el cambio de variable $\xi = \tan \theta$ y tener en cuenta que:

$$\int \frac{A + B \cos \theta}{a + b \cos \theta} d\theta = \frac{B\theta}{b} + \frac{Ab - aB}{b\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 - a^2} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + a + b}{\sqrt{b^2 - a^2} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - a - b} \right| \quad (2.107)$$

Obteniendo entonces:

$$\begin{aligned} \Delta c_{p1\beta} = & \frac{4}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right| \right) \beta + \\ & + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} (1+x-c) + (x-c) \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right| + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) ik\beta \end{aligned} \quad (2.108)$$

La forma de la expresión para los dos primeros casos es la habitual para la distribución del coeficiente de presiones, como se muestra en la Figura 2.10. Finalmente:

$$\Delta c_{p1} = \Delta c_{p1h} + \Delta c_{p1\alpha} + \Delta c_{p1\beta} \quad (2.109)$$

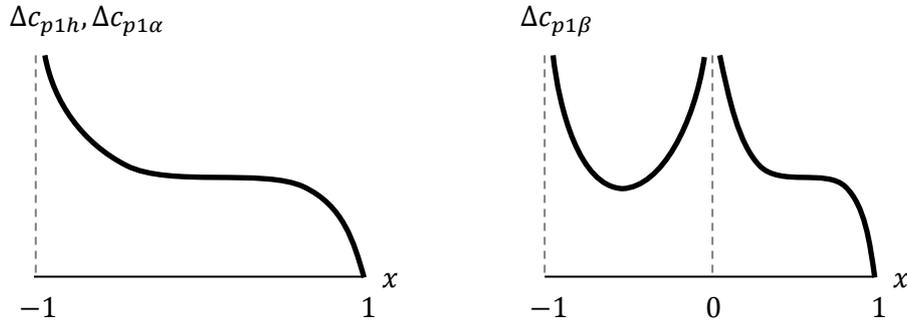


Figura 2.10: Distribución del coeficiente de presión.

Una vez se ha obtenido Δc_{p1T} , ya sea empleando la función de Theodorsen en la ecuación (2.96), o bien trabajando con aerodinámica casi-estacionaria, para obtener las fuerzas aerodinámicas generalizadas hay que volver a la ecuación (2.19). En forma dimensional, y considerando la solución armónica, estas fuerzas son:

$$\begin{aligned} Q_h &= \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 b \cdot \int_{-1}^1 \Delta c_{p1} \cdot (-1) dx = q_\infty b \cdot (-c_l) \\ Q_\alpha &= \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 b^2 \cdot \int_{-1}^1 \Delta c_{p1} \cdot (a - x) dx = q_\infty b^2 \cdot c_{M\alpha} \\ Q_\beta &= \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 b^2 \cdot \int_0^1 \Delta c_{p1} \cdot (c - x) dx = q_\infty b^2 \cdot c_{M\beta} \end{aligned} \quad (2.110)$$

Para calcular, por ejemplo, la fuerza vertical Q_h , la integral se puede descomponer en:

$$Q_h = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 b \int_{-1}^1 (\Delta c_{p1h} + \Delta c_{p1\alpha} + \Delta c_{p1\beta})(-1) dx \quad (2.111)$$

Y sustituyendo los valores de Δc_{p1h} , $\Delta c_{p1\alpha}$ y $\Delta c_{p1\beta}$ de las ecuaciones (2.103), (2.105) y (2.108), calculados con aerodinámica casi-estacionaria, utilizando las integrales 3 y 5 de la Tabla 2.2, con $x = 0$ en la tabla, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \Delta c_{p1h}(-1) dx &= -4\pi i k \frac{h}{b} = -c_{lh} \cdot \frac{h}{b} \\ \int_{-1}^1 \Delta c_{p1\alpha}(-1) dx &= -4 \left(\pi + ik\pi \left(\frac{1}{2} - a \right) \right) \cdot \alpha = -c_{l\alpha} \cdot \alpha \\ \int_{-1}^1 \Delta c_{p1\beta}(-1) dx &= \left(-(2\pi + 4) - 2ik(\pi(1 - c) + 1 - 2c) \right) \cdot \beta = -c_{l\beta} \cdot \beta \end{aligned} \quad (2.112)$$

Las demás fuerzas se obtienen mediante un procedimiento similar, hasta completar la matriz \mathbf{Q} del sistema (2.31). Hay que recordar que este procedimiento se ha aplicado a un caso de ejemplo, Figura 2.4, y que puede variar ligeramente en otros casos, pero por lo general los pasos a seguir serán los mismos que los que aquí se han desarrollado.

Tema 5. Teoría del perfil oscilante y cálculo de fuerzas aerodinámicas en compresible.

El problema del flujo compresible se plantea directamente en su formulación potencial, el procedimiento para llegar a este planteamiento se expuso en la asignatura “Aerodinámica”.

La ecuación de Euler-Bernoulli para un flujo compresible no estacionario relaciona la velocidad y la presión junto con la densidad, a través de la velocidad del sonido a .

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2}U_\infty^2 + \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} = \text{ct} \quad (2.113)$$

Como se ve en la asignatura “Aerodinámica”, aplicando a esta ecuación una derivada sustancial se llega a su formulación diferencial:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 \right) - a^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.114)$$

Puede comprobarse que en el caso incompresible, con $a \rightarrow \infty$, la derivada temporal desaparece frente al término de la laplaciana, obteniendo de nuevo $\nabla^2 \Phi = 0$. De nuevo se procede a linealizar el problema, del mismo modo que en el Tema 4, con:

$$\Phi(x, z, t) = U_\infty x + \tau \cdot \varphi_0(x, z) + \delta \cdot \varphi_1(x, z, t), \quad \delta \ll \tau \ll 1 \quad (2.115)$$

Introduciendo esta solución en la ecuación (2.114) se puede desarrollar término a término. La derivada temporal del potencial es solamente la de la perturbación no estacionaria:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \delta \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \quad (2.116)$$

El término del cuadrado de la velocidad, recordando que el gradiente del potencial es la velocidad, ecuación (2.46), se puede desarrollar como:

$$\begin{aligned} (\nabla \Phi)^2 &= (U_\infty + \tau \varphi_{0x} + \delta \varphi_{1x})^2 + (\tau \varphi_{0z} + \delta \varphi_{1z})^2 \\ &\approx U_\infty^2 + 2\tau U_\infty \varphi_{0x} + 2\delta U_\infty \varphi_{1x} \end{aligned} \quad (2.117)$$

La derivada sustancial se calcula entonces como:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(\dots) &= \frac{\partial}{\partial t}(\dots) + \vec{V} \cdot \nabla(\dots) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\dots) + \nabla \Phi \cdot \nabla(\dots) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\dots) + (U_\infty + \tau \varphi_{0x} + \delta \varphi_{1x}) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\dots) + (\tau \varphi_{0z} + \delta \varphi_{1z}) \cdot \frac{\partial}{\partial z}(\dots) \end{aligned} \quad (2.118)$$

Por lo que finalmente, indicando de dónde viene cada término, la ecuación (2.114) es:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + U_\infty \delta \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\dots) \\ &+ U_\infty \delta \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial t} + U_\infty^2 \tau \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + U_\infty^2 \delta \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \vec{V} \cdot \nabla(\dots) \\ &- a_\infty^2 (\tau \nabla^2 \varphi_0 + \delta \nabla^2 \varphi_1) \quad a^2 \nabla^2 \Phi \end{aligned} \quad (2.119)$$

Donde se ha hecho también la aproximación $a \approx a_\infty$, despreciando términos de orden superior. Esta aproximación no es válida en régimen transónico, pero en subsónico funciona bien. Ahora se separa según el orden de magnitud de los términos. Los de orden τ son:

$$U_\infty^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - a_\infty^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - a_\infty^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} = 0 \quad (2.120)$$

Dividiendo por a_∞^2 , escribiendo las derivadas en forma reducida, se llega a:

$$(1 - M_\infty^2) \varphi_{0xx} + \varphi_{0zz} = 0 \quad (2.121)$$

Por otro lado los términos de orden δ son:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + 2U_\infty \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial t} + U_\infty^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - a_\infty^2 \nabla^2 \varphi_1 = 0 \quad (2.122)$$

De nuevo dividiendo por a_∞^2 y en forma reducida:

$$(1 - M_\infty^2) \varphi_{1xx} + \varphi_{1zz} - 2 \frac{M_\infty}{a_\infty} \varphi_{1xt} - \frac{1}{a_\infty^2} \varphi_{1tt} = 0 \quad (2.123)$$

De nuevo las ecuaciones (2.121) y (2.123) son idénticas al caso incompresible, ecuación (2.52), si se toma $a_\infty \rightarrow \infty$, y por lo tanto $M_\infty = 0$.

Para encontrar el coeficiente de presión hay que volver a la ecuación (2.113) de Euler-Bernoulli teniendo en cuenta las relaciones isentrópicas:

$$a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}, \quad \frac{p}{\rho^\gamma} = ct \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} \cdot \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (2.124)$$

Entonces se puede escribir la ecuación (2.113) como:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{1}{2} U_\infty^2 + \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} \quad (2.125)$$

Despejando la presión:

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 + 1 - \frac{\gamma - 1}{a_\infty^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \right) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.126)$$

La presión se linealiza igual que en la ecuación (2.58) para el caso incompresible:

$$\begin{aligned} \frac{p}{p_\infty} &= 1 + \tau \frac{p_0}{p_\infty} + \delta \frac{p_1}{p_\infty} \\ &= \left(\frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 + 1 - \frac{\gamma - 1}{a_\infty^2} \left(\delta \varphi_{1t} + \frac{1}{2} U_\infty^2 + U_\infty \tau \varphi_{0x} + U_\infty \delta \varphi_{1x} + \dots \right) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ &= \left(1 - \frac{\gamma - 1}{a_\infty^2} (\delta \varphi_{1t} + U_\infty \tau \varphi_{0x} + U_\infty \delta \varphi_{1x} + \dots) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{aligned} \quad (2.127)$$

El término con M_∞^2 se ha cancelado con el que tiene U_∞^2 dentro del gradiente $(\nabla\Phi)^2$. Los términos del gradiente de orden menor que τ ó δ no se han escrito, se eliminarán ahora. Esta expresión es de la forma $(1 + \varepsilon)^x$, con $\varepsilon \ll 1$, todos los términos en ε tienen τ ó δ . Se puede aplicar el desarrollo en polinomio de Taylor de primer orden en torno a $x = 0$:

$$(1 + \varepsilon)^x \approx 1 + x \cdot \ln(1 + \varepsilon) \approx 1 + x \cdot \varepsilon \quad (2.128)$$

Donde se ha desarrollado también el logaritmo en torno a $\varepsilon = 0$. Como se hace el desarrollo de primer orden, no tiene sentido considerar los términos de orden inferior a τ ó δ , quedando:

$$\begin{aligned} \frac{p}{p_\infty} &\approx 1 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(-\frac{\gamma - 1}{a_\infty^2} \right) (\delta\varphi_{1t} + U_\infty\tau\varphi_{0x} + U_\infty\delta\varphi_{1x}) \\ &\approx 1 - \frac{\gamma}{a_\infty^2} \cdot (\delta\varphi_{1t} + U_\infty\tau\varphi_{0x} + U_\infty\delta\varphi_{1x}) \end{aligned} \quad (2.129)$$

Separando de nuevo los términos según su orden de magnitud:

$$\begin{aligned} o(\tau) \quad \frac{p_0}{p_\infty} &= -\frac{\gamma}{a_\infty^2} \cdot U_\infty\varphi_{0x} \Rightarrow c_{p0} = -2 \frac{\varphi_{0x}}{U_\infty} \\ o(\delta) \quad \frac{p_1}{p_\infty} &= -\frac{\gamma}{a_\infty^2} \cdot (\varphi_{1t} + U_\infty\varphi_{1x}) \Rightarrow c_{p1} = -2 \left(\frac{\varphi_{1x}}{U_\infty} + \frac{\varphi_{1t}}{U_\infty^2} \right) \end{aligned} \quad (2.130)$$

Donde se ha tenido en cuenta que:

$$c_p = \frac{p}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}, \quad \frac{\gamma}{a_\infty^2} = \frac{\rho_\infty}{p_\infty} \quad (2.131)$$

Este resultado para el coeficiente de presión es el mismo que el que se obtuvo en la ecuación (2.60) para el caso incompresible, aunque no tenía por qué haber sido así.

Esta formulación del coeficiente de presión funciona bien en régimen subsónico, y en régimen supersónico hasta $M_\infty \approx 2.5$. En régimen subsónico hay que forzar la condición de Kutta y que en el campo lejano no haya perturbación. Para régimen supersónico la perturbación debe ser nula fuera del cono de Mach. A partir de $M_\infty > 2.5$ es necesario emplear otra formulación.

El coeficiente de presión de van Dyke funciona bien hasta $M_\infty \approx 4$. Para obtenerlo se linealiza la ecuación de Euler-Bernoulli en δ pero no en τ . De este modo se gana mucha precisión, pero ya no es posible desacoplar el problema estacionario del transitorio. Volviendo a la ecuación:

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 + 1 - \frac{\gamma - 1}{a_\infty^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 \right) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (2.132)$$

Ahora se realiza el mismo desarrollo que antes para el término del gradiente $(\nabla\Phi)^2$ de la ecuación (2.117), pero conservando más términos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 &= \frac{1}{2} (U_\infty + \tau\varphi_{0x} + \delta\varphi_{1x})^2 + \frac{1}{2} (\tau\varphi_{0z} + \delta\varphi_{1z})^2 \\ &\approx \frac{1}{2} (U_\infty + \tau\varphi_{0x})^2 + (U_\infty + \tau\varphi_{0x})\delta\varphi_{1x} + \frac{1}{2} \tau^2 \varphi_{0z}^2 + \tau\delta\varphi_{0z}\varphi_{1z} \end{aligned} \quad (2.133)$$

Con lo que la ecuación de Euler-Bernoulli queda:

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{a_\infty^2} (G + \delta \cdot H) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.134)$$

Donde:

$$G = \frac{1}{2} (U_\infty + \tau \varphi_{0x})^2 + \frac{1}{2} \tau \varphi_{0z}^2 \quad (2.135)$$

$$H = (U_\infty + \tau \varphi_{0x}) \varphi_{1x} + \tau \varphi_{0z} \varphi_{1z} + \varphi_{1t}$$

El siguiente paso es realizar un desarrollo en serie de Taylor de primer orden en δH :

$$\begin{aligned} \frac{p}{p_\infty} &\approx \left. \frac{p}{p_\infty} \right|_{\delta H=0} + \delta H \cdot \left. \frac{\partial(p/p_\infty)}{\partial(\delta H)} \right|_{\delta H=0} \\ &\approx \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{a_\infty^2} G \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \\ &\quad + \delta H \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{a_\infty^2} G \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}-1} \cdot \left(-\frac{\gamma-1}{a_\infty^2} \right) \\ &\approx \frac{p_0}{p_\infty} + \delta \cdot \frac{p_1}{p_\infty} \Rightarrow c_{p1} = \frac{p_1}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} \end{aligned} \quad (2.136)$$

De este modo se gana precisión para obtener c_{p1} , pero ahora el término no estacionario p_1/p_∞ depende de G y H , que dependen a su vez de la solución estacionaria φ_0 .

Ya se tienen dos expresiones para el coeficiente de presión, la linealizada y la de van Dyke. A continuación se busca una solución para el potencial de perturbación φ_1 para el caso supersónico. Se considera que esta solución estará formada por una superposición de soluciones elementales. Para este caso se utiliza una distribución de dobletes no estacionarios.

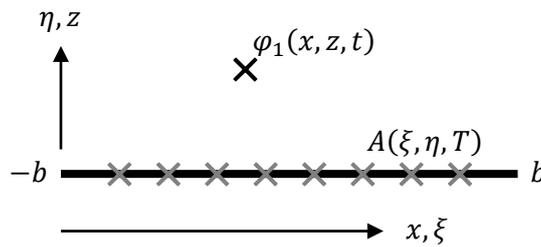


Figura 2.11: Distribución de dobletes no estacionarios.

La perturbación φ_1 que hay en un punto x, z en el instante t , debida a un solo doblete centrado en ξ, η de intensidad A producida en el instante T , es:

$$\varphi_1(x, z, t, \xi, \eta, T) = \frac{A(\xi, \eta, T)}{\sqrt{a_\infty^2 (t-T)^2 - ((x-\xi) - U_\infty(t-T))^2 - (z-\eta)^2}} \quad (2.137)$$

No se demuestra aquí, pero esta solución cumple la ecuación (2.123). La expresión es como para el doblete estacionario, intensidad entre distancia, pero corregida con el tiempo. La perturbación momentánea, producida en el instante T , se expande a la velocidad del sonido a_∞ y viaja aguas abajo a la velocidad U_∞ como muestra la Figura 2.12.

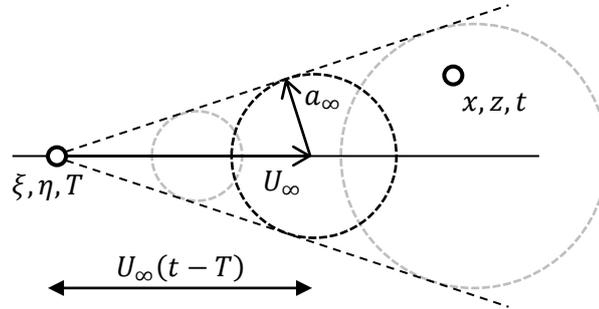


Figura 2.12: Propagación de una perturbación.

Considerando $\tau = t - T$, existen unos valores límite de τ que hacen que el radicando se anule, y que a partir de estos valores sea negativo.

$$\begin{aligned}
 0 &= a_\infty^2 \tau^2 - ((x - \xi) - U_\infty \tau)^2 - (z - \eta)^2 \\
 &= (a_\infty^2 - U_\infty^2) \tau^2 + 2U_\infty(x - \xi)\tau - (x - \xi)^2 - (z - \eta)^2 \Rightarrow \\
 \tau_{1,2} &= \frac{U_\infty(x - \xi) \pm \sqrt{a_\infty^2(x - \xi)^2 + (a_\infty^2 - U_\infty^2)(z - \eta)^2}}{U_\infty^2 - a_\infty^2}, \quad \tau_1 < \tau_2 \quad (2.138)
 \end{aligned}$$

Estos valores τ_1 y τ_2 representan los momentos en que el punto x, z entra y sale del círculo de propagación de la perturbación respectivamente, como se puede intuir de la Figura 2.12.

$$\varphi_1 \begin{cases} \neq 0 & \tau_1 < \tau < \tau_2 \\ = 0 & \tau < \tau_1, \quad \tau > \tau_2 \end{cases} \quad (2.139)$$

A continuación se calcula el efecto de una distribución de estos dobletes. Se considerará que esta distribución está situada en $\eta = 0$, es decir, sobre el perfil.

A la hora de aplicar el principio de superposición e integrar el efecto de la distribución de dobletes, hay que tener en cuenta que las perturbaciones originadas aguas abajo de ξ_1 no afectarán al punto x, z , puesto que este punto quedará fuera del cono de Mach.

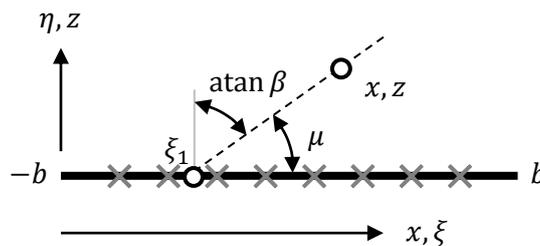


Figura 2.13: Efecto de una distribución de dobletes.

El punto ξ_1 estará en:

$$\mu = \text{asin}\left(\frac{1}{M_\infty}\right), \quad \beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}, \quad \xi_1 = x - \beta z \quad (2.140)$$

Entonces el efecto de la distribución de dobletes será, aplicando el principio de superposición:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, z, t) &= \iint \varphi_1(x, z, t; \xi, \eta, T) d\tau d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{U_\infty^2 - a_\infty^2}} \cdot \int_{-b}^{\xi_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{A(\xi, 0, t - \tau)}{\sqrt{(\tau - \tau_1)(\tau_2 - \tau)}} d\tau d\xi \end{aligned} \quad (2.141)$$

Donde se ha expresado $\varphi_1(x, z, t; \xi, \eta, T)$ a partir de sus raíces $(\tau - \tau_1)$ y $(\tau - \tau_2)$, con un cambio de signo.

El objetivo ahora es conocer $A(\xi)$ para conocer $\varphi_1(x, z, \tau)$. Para ello se aplica la condición de contorno en el perfil:

$$\varphi_{1z}|_{z=0} = U_\infty \cdot z_{1x} + z_{1t} \quad (2.142)$$

Para poder aplicar esta condición será necesario derivar la ecuación (2.141) respecto a z para luego particularizar en el perfil $z = 0$. Con este propósito se considera el cambio de variable:

$$\tau = \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \cos \theta + \frac{\tau_2 + \tau_1}{2}, \quad d\tau = -\frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \sin \theta d\theta \quad (2.143)$$

Se trata del mismo cambio de variable que se empleaba en la asignatura "Aerodinámica" en la analogía de Prandtl-Glauert. Se tienen entonces las relaciones:

$$\begin{aligned} \tau = \tau_1 &\Rightarrow \theta = \pi & \tau - \tau_1 &= \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} (1 + \cos \theta) \\ \tau = \tau_2 &\Rightarrow \theta = 0 & \tau_2 - \tau &= \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} (1 - \cos \theta) \\ & & \sqrt{(\tau - \tau_1)(\tau_2 - \tau)} &= \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \sin \theta \end{aligned} \quad (2.144)$$

Aplicando el cambio de variable en la ecuación (2.141), sustituyendo el valor de ξ_1 , sustituyendo el valor de τ en el argumento de A , cancelando los $(1/2)(\tau_2 - \tau_1) \sin \theta$ de la raíz y del diferencial $d\tau$, y cambiando el orden de integración en θ con un signo menos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{\sqrt{U_\infty^2 - a_\infty^2}} \int_{-b}^{x-\beta z} \int_0^\pi A d\theta d\xi \\ A &= A\left(\xi, 0, t - \left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \cos \theta + \frac{\tau_2 + \tau_1}{2}\right)\right) \end{aligned} \quad (2.145)$$

Ahora aparece z en el límite de integración en ξ . Para derivar esta ecuación y aplicar la condición de contorno hay que tener en cuenta que la derivada en z de la integral en ξ será: la derivada del límite superior por el integrando particularizado para ese límite; menos la derivada en el límite inferior por el integrando particularizado para ese límite; más la integral de la derivada del integrando.

Matemáticamente:

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{g(z)}^{h(z)} f(x, z) dx = \frac{\partial h}{\partial z} \cdot f(h, z) - \frac{\partial g}{\partial z} \cdot f(g, z) + \int_{g(z)}^{h(z)} \frac{\partial f}{\partial z} dx \quad (2.146)$$

Aplicando esto a la integral (2.145) queda:

$$\begin{aligned} \varphi_{1z} = & \frac{1}{\sqrt{U_\infty^2 - a_\infty^2}} \left(\frac{\partial(x - \beta z)}{\partial z} \Big|_0^\pi A d\theta \Big|_{\xi=x-\beta z} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial(-b)}{\partial z} \Big|_0^\pi A d\theta \Big|_{\xi=-b} + \right. \\ & \left. + \int_{-b}^{x-\beta z} \int_0^\pi \frac{\partial A}{\partial z} d\theta d\xi \right) \end{aligned} \quad (2.147)$$

Dado que $\partial(-b)/\partial z = 0$ el segundo término se anula. El tercero se desarrolla aplicando la regla de la cadena:

$$\varphi_{1z} = \frac{1}{\sqrt{U_\infty^2 - a_\infty^2}} \left(-\beta \cdot \Big|_0^\pi A d\theta \Big|_{\xi=x-\beta z} + S \right) \quad (2.148)$$

$$S = \int_{-b}^{x-\beta z} \int_0^\pi \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \cos \theta + \frac{\tau_2 + \tau_1}{2} \right) \right) d\theta d\xi$$

Se continúa buscando la integral S . Para ello se empieza por aplicar la derivada en z . Como $\cos \theta$ no depende de z sólo hay que considerar:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} = \frac{\sqrt{\dots}}{U_\infty^2 - a_\infty^2} & \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \right) = -\frac{z}{\sqrt{\dots}} \\ \frac{\tau_2 + \tau_1}{2} = \frac{U_\infty(x - \xi)}{U_\infty^2 - a_\infty^2} & \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_2 + \tau_1}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.149)$$

Donde $\sqrt{\dots}$ es la raíz que aparece en la solución para τ_1 y τ_2 , en la ecuación (2.138). Entonces:

$$S = \int_{-b}^{x-\beta z} \int_0^\pi \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \left(\frac{z \cos \theta}{\sqrt{\dots}} \right) d\theta d\xi \quad (2.150)$$

A continuación se realiza una integración por partes en θ , con:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du, \quad u = \frac{\partial A}{\partial t}, \quad dv = \left(\frac{z \cos \theta}{\sqrt{\dots}} \right) d\theta \quad (2.151)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right) d\theta = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right) d\theta = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) d\theta = \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \left(-\frac{(\tau_2 - \tau_1) \sin \theta}{2} \right) d\theta \\ v &= \left(\frac{z \sin \theta}{\sqrt{\dots}} \right) \end{aligned} \quad (2.152)$$

Por lo que queda:

$$S = \int_{-b}^{x-\beta z} \left| \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \left(\frac{z \sin \theta}{\sqrt{\dots}} \right) \right|_0^\pi d\xi + \int_{-b}^{x-\beta z} \int_0^\pi \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \left(\frac{(\tau_2 - \tau_1) \sin \theta}{2} \right) \frac{z \sin \theta}{\sqrt{\dots}} d\theta d\xi \quad (2.153)$$

Ahora que ya se ha derivado respecto a z es cuando interesa particularizar para el perfil en $z = 0$. El primer término de la expresión de S se anula, el segundo queda, aplicando el resultado para $(\tau_2 - \tau_1)/2$ de la ecuación (2.149):

$$S = \int_{-b}^{x-\beta z} \int_0^\pi \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \cdot \frac{\sqrt{\dots}}{U_\infty^2 - a_\infty^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{\dots}} \sin^2 \theta d\theta d\xi \quad (2.154)$$

Este término también se anula, por lo que queda finalmente:

$$|S|_{z=0} = 0 \quad (2.155)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (2.148), particularizada para $z = 0$ e igualada a la condición de contorno:

$$\begin{aligned} |\varphi_{1z}|_{z=0} &= \frac{1}{\sqrt{U_\infty^2 - a_\infty^2}} \left(-\sqrt{M_\infty^2 - 1} \right) \int_0^\pi A(|x - \beta z|_{z=0}, 0, |t - \tau|_{\xi=x-\beta z; z=0}) \\ &= -\frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{\sqrt{U_\infty^2 - a_\infty^2}} \cdot \pi \cdot A(x, 0, t) = U_\infty z_{1x} + z_{1t} \end{aligned} \quad (2.156)$$

Donde se ha tenido en cuenta para particularizar el tercer argumento de A que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \right|_{\xi=x-\beta z} &= \frac{\sqrt{a_\infty^2 \beta^2 z^2 + (a_\infty^2 - U_\infty^2) z^2}}{U_\infty^2 - a_\infty^2} \\ \left| \frac{\tau_2 + \tau_1}{2} \right|_{\xi=x-\beta z} &= \frac{U_\infty \beta z}{U_\infty^2 - a_\infty^2} \end{aligned} \quad (2.157)$$

Y al particularizar para $z = 0$:

$$\left| \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \right|_{\xi=x, z=0} = 0, \quad \left| \frac{\tau_2 + \tau_1}{2} \right|_{\xi=x, z=0} = 0 \quad (2.158)$$

Finalmente:

$$A(x, 0, t) = -\frac{a_\infty}{\pi} |\varphi_{1z}|_{z=0} \quad (2.159)$$

Ahora es posible regresar a la ecuación (2.141), donde se planteó encontrar A , para sustituir su valor, quedando:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, 0, t) &= \frac{1}{\sqrt{U_\infty^2 - a_\infty^2}} \int_{-b}^x \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{-\frac{a_\infty}{\pi} \varphi_{1z}(\xi, 0, t - \tau)}{\sqrt{(\tau - \tau_1)(\tau_2 - \tau)}} d\tau d\xi \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_{-b}^x \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\varphi_{1z}(\xi, 0, t - \tau)}{\sqrt{(\tau - \tau_1)(\tau_2 - \tau)}} d\tau d\xi \end{aligned} \quad (2.160)$$

Con los valores de τ_1 y τ_2 de la ecuación (2.138) particularizados también para $z = 0$:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= (x - \xi) \frac{U_\infty - a_\infty}{U_\infty^2 - a_\infty^2} = \frac{x - \xi}{a_\infty} \cdot \frac{1}{M_\infty + 1} \\ \tau_2 &= (x - \xi) \frac{U_\infty + a_\infty}{U_\infty^2 - a_\infty^2} = \frac{x - \xi}{a_\infty} \cdot \frac{1}{M_\infty - 1}\end{aligned}\quad (2.161)$$

Este valor es φ_1^+ para el extradós. El problema no estacionario es anti-simétrico, ya que consiste sólo en efectos de curvatura y ángulo de ataque, no hay variaciones de espesor. Por eso en el intradós sólo hay que cambiar de signo $\varphi_1^- = -\varphi_1^+$.

Hay que resaltar que, hasta este punto, para hacer este desarrollo no se ha supuesto movimiento armónico, al contrario que en el caso subsónico. Ahora sí que se hará esta suposición de cara a encontrar el coeficiente de presión c_p . Para ello será necesario obtener φ_{1x} y φ_{1t} . La solución armónica es:

$$\begin{aligned}z_1(x, t) &= \bar{z}_1(x) \cdot e^{i\omega t} \\ \varphi_1(x, 0, t) &= \bar{\varphi}_1(x, 0) \cdot e^{i\omega t} \\ \varphi_{1z}(\xi, 0, t - \tau) &= \bar{\varphi}_{1z}(\xi, 0) \cdot e^{i\omega(t-\tau)}\end{aligned}\quad (2.162)$$

Aplicando esta solución a φ_1 se tiene:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_1(x, 0) &= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_{-b}^x \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\bar{\varphi}_{1z}(\xi, 0) \cdot e^{-i\omega\tau}}{\sqrt{(\tau - \tau_1)(\tau_2 - \tau)}} d\tau d\xi \\ &= -\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_{-b}^x \bar{\varphi}_{1z} \cdot I(\xi, x) d\xi\end{aligned}\quad (2.163)$$

Donde:

$$I(\xi, x) = \frac{1}{\pi} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\sqrt{(\tau - \tau_1)(\tau_2 - \tau)}} d\tau \quad (2.164)$$

De nuevo se aplica el cambio de variable de la ecuación (2.143) de τ a θ , y se cambia el signo invirtiendo los límites de integración, quedando:

$$I(\xi, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-i\omega\left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \cos \theta + \frac{\tau_2 + \tau_1}{2}\right)} d\theta \quad (2.165)$$

Mediante la función de Bessel de primera especie de orden 0 definida como:

$$J_0(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-i\lambda \cos \theta} d\theta \quad (2.166)$$

Se puede obtener I como:

$$\begin{aligned}I(\xi, x) &= e^{-i\omega\frac{\tau_2 + \tau_1}{2}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-i\omega\frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \cos \theta} d\theta \\ &= e^{-i\omega\frac{\tau_2 + \tau_1}{2}} \cdot J_0\left(\omega \frac{\tau_2 - \tau_1}{2}\right)\end{aligned}\quad (2.167)$$

Y teniendo en cuenta que:

$$\frac{\tau_2 + \tau_1}{2} = \frac{x - \xi}{a_\infty} \frac{M_\infty}{M_\infty^2 - 1}, \quad \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} = \frac{x - \xi}{a_\infty} \frac{1}{M_\infty^2 - 1} \quad (2.168)$$

Se puede escribir:

$$I(\xi, x) = e^{-i\omega \left(\frac{x - \xi}{a_\infty} \frac{M_\infty}{M_\infty^2 - 1} \right)} \cdot J_0 \left(\omega \frac{x - \xi}{a_\infty} \frac{1}{M_\infty^2 - 1} \right) \quad (2.169)$$

En forma adimensional queda:

$$\varphi_1(x, 0) = -\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_{-1}^x \varphi_{1z}(\xi) \cdot I(\xi; x) d\xi \quad (2.170)$$

$$I(\xi, x) = e^{-ik \frac{M_\infty^2}{M_\infty^2 - 1} (x - \xi)} \cdot J_0 \left(k \frac{M_\infty}{M_\infty^2 - 1} (x - \xi) \right)$$

A partir de este resultado para φ_1 se conseguirá ahora el coeficiente de presión. Para ello se supone un perfil como el de la Figura 2.4 de la página 10, con el movimiento del perfil:

$$z_1 = -h(t) + (ab - x) \cdot \alpha(t) + (cb - x) \cdot \beta(t) \cdot H(x - eb) \quad (2.171)$$

Se puede aplicar entonces la condición de contorno derivando esta ecuación:

$$\begin{aligned} \varphi_{1z} &= U_\infty z_{1x} + z_{1t} \\ &= U_\infty (-\alpha - \beta \cdot H(x - eb)) - \dot{h} + (ab - x)\dot{\alpha} + (cb - x)\dot{\beta} \cdot H(x - eb) \end{aligned} \quad (2.172)$$

Suponiendo movimiento armónico (las amplitudes dimensionales se indican con una barra):

$$\bar{\varphi}_{1z} = -U_\infty (\alpha + \beta H(x - eb)) - i\omega \bar{h} + (ab - x)i\omega \alpha + (cb - x)i\omega \beta H(x - eb) \quad (2.173)$$

Y en forma adimensional:

$$\varphi_{1z}(\xi, 0) = -(\alpha + \beta \cdot H(\xi - e)) - ik \frac{h}{b} + (a - \xi)ik\alpha + (c - x)ik\beta \cdot H(x - e) \quad (2.174)$$

Entonces, para integrar la ecuación (2.170) se puede aplicar aerodinámica casi-estacionaria, es decir, considerar k pequeña y despreciable salvo cuando aparece en φ_{1z} .

Si además el número de Mach es suficientemente alto $M_\infty \gtrsim 1.2$ (para que no aparezca una indeterminación), dado que la función de Bessel de primera especie de orden 0 en el origen vale $J_0(0) = 1$, entonces se puede comprobar que $I(\xi, x) \approx 1$, por lo que se puede integrar fácilmente el potencial φ_1 .

Una vez se tiene el potencial ya se puede obtener el coeficiente de presión como se vio en la ecuación (2.130), con φ_1 en forma dimensional (c_p es siempre adimensional):

$$c_{p1}(x, 0, t) = -\frac{2}{U_\infty^2} (U_\infty \varphi_{1x} + \varphi_{1t}) \quad (2.175)$$

Aplicando movimiento armónico y adimensionalizando φ_1 se puede escribir:

$$\bar{c}_{p1}(x, 0) = -\frac{2}{U_\infty^2} (U_\infty \bar{\varphi}_{1x} + i\omega \bar{\varphi}_1) = -2 \left(\varphi_{1x} + \frac{i\omega b}{U_\infty} \varphi_1 \right) \quad (2.176)$$

Como ya se ha comentado, esta solución es para el extradós, en el intradós cambia el signo:

$$c_{p1}^+(x) = -2(\varphi_{1x} + ik\varphi_1), \quad c_{p1}^- = 2(\varphi_{1x} + ik\varphi_1) \quad (2.177)$$

Por lo que el salto de presiones es:

$$\Delta c_{p1} = c_{p1}^- - c_{p1}^+ = 4(\varphi_{1x} + ik\varphi_1) \quad (2.178)$$

Y a partir del Δc_{p1} ya es posible obtener las fuerzas generalizadas igual que en el Tema 4, ecuación (2.110).

Por último, para números de Mach elevados, entre 4 y 10 aproximadamente, puede emplearse la llamada teoría del pistón. Para ello se considera una k moderada, ya no tiene que ser despreciable. Lo que sí se debe cumplir es $k/M_\infty \ll 1$. Entonces la función $I(\xi, x)$ queda:

$$I(\xi, x) \approx e^{-ik(x-\xi)} \cdot J_0 \left(\frac{k}{M_\infty} (x - \xi) \right) \approx e^{-ik(x-\xi)} \quad (2.179)$$

Donde se ha aplicado de nuevo $J_0(0) = 1$. El potencial φ_1 es entonces:

$$\varphi_1(x, 0) \approx -\frac{1}{M_\infty} \int_{-1}^x \varphi_{1z}(\xi, 0) \cdot e^{-ik(x-\xi)} d\xi \quad (2.180)$$

Para obtener c_{p1} habrá que derivar esta expresión del potencial, para ello es necesario aplicar de nuevo la ecuación (2.146) para derivar una integral con variables en los límites. Entonces:

$$\begin{aligned} c_{p1} &= -2(\varphi_{1x} + ik \cdot \varphi_1) \\ &= \frac{2}{M_\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-1}^x \varphi_{1z}(\xi, 0) \cdot e^{-ik(x-\xi)} d\xi + ik \int_{-1}^x \varphi_{1z}(\xi, 0) \cdot e^{-ik(x-\xi)} d\xi \right) \\ &= \frac{2}{M_\infty} \left(\varphi_{1z}(x, 0) + \int_{-1}^x \varphi_{1z}(\xi, 0) \cdot (-ik) e^{-ik(x-\xi)} d\xi + \right. \\ &\quad \left. + ik \int_{-1}^x \varphi_{1z}(\xi, 0) \cdot e^{-ik(x-\xi)} d\xi \right) \\ &= \frac{2}{M_\infty} \varphi_{1z}(x, 0) \end{aligned} \quad (2.181)$$

Donde se han cancelado los dos términos integrales entre ellos por ser iguales. De nuevo se puede calcular Δc_{p1} y a partir de éste se obtienen las fuerzas generalizadas.

Recapitulando, en el Tema 4 y el Tema 5 se han encontrado expresiones para el coeficiente de presión c_{p1} por diferentes métodos. En todos ellos es necesario encontrar una forma de relacionar la condición de contorno del perfil φ_{1z} con el potencial φ_1 para poder derivarlo y encontrar el coeficiente de presión c_{p1} .

Para el caso incompresible, en el Tema 4, se ha encontrado una expresión para el coeficiente de presión c_{p1} , ecuación (2.60). Esta expresión se ha desarrollado encontrando el potencial φ_1 a partir de una distribución de torbellinos en el perfil y la estela, una solución que cumple la laplaciana del potencial, ecuación (2.52). Finalmente se ha obtenido una expresión para Δc_{p1} directamente en función de la condición de contorno para φ_{1z} , que contiene la función de Theodorsen, ecuación (2.96).

En el caso compresible se ha aplicado la teoría linealizada a la ecuación de Euler-Bernoulli, y se ha encontrado la misma expresión para c_{p1} que en el caso incompresible, ecuación (2.130). Esta teoría linealizada es válida en régimen subsónico, y en régimen supersónico desde $M_\infty \approx 1.2$ hasta $M_\infty \approx 2.5$. La diferencia con el caso incompresible está en la forma de obtener φ_1 , empleando la ecuación (2.123). Para cumplir esta ecuación se ha utilizado la distribución de dobletes no estacionarios en supersónico, ecuación (2.137), obteniendo al final una expresión para φ_1 , ecuación (2.170).

En régimen supersónico la precisión de c_{p1} mejora si se emplea, en lugar del coeficiente linealizado, el coeficiente de van Dyke, obtenido a partir de la presión p_1 de la ecuación (2.136). Funciona desde $M_\infty \approx 1.2$ hasta $M_\infty \approx 4$.

Por último, para régimen supersónico elevado se puede emplear la teoría del pistón para simplificar la expresión de c_{p1} y dejarla en función de φ_{1z} . Es válida entre $M_\infty \approx 4$ y $M_\infty \approx 10$.

Hay que resaltar que ninguna de estas teorías es válida en régimen transónico.

Además se ha visto cómo, aplicando aerodinámica casi-estacionaria, es posible simplificar las ecuaciones (2.96) ó (2.170), de forma que sea más sencillo integrar φ_{1z} en estas ecuaciones.

Tema 6. Aeroelasticidad dinámica. Ráfagas y turbulencias.

Para el estudio de ráfagas se considera un perfil en una corriente que se desplaza a una velocidad U_∞ , y que recibe una perturbación en velocidad vertical conocida. Este cambio en la velocidad vertical originará una variación en ángulo de ataque, lo que provocará una perturbación en las fuerzas aerodinámicas que desplazarán el perfil.

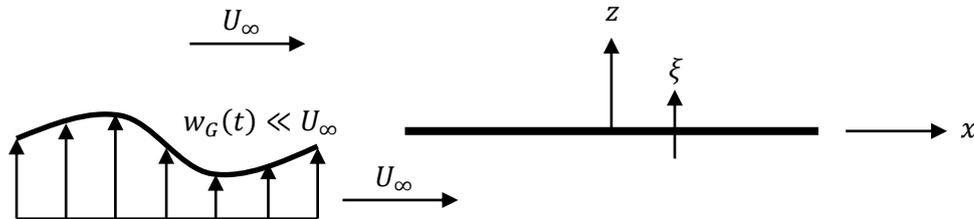


Figura 2.14: Problema de ráfagas.

El desplazamiento del perfil también originará unas fuerzas aerodinámicas, pero en esta ocasión no se podrá suponer movimiento armónico. Sin embargo, dado que se trabaja con excitaciones conocidas, será posible realizar una transformada de Laplace, escribirla en términos de sus armónicos y tratar estos armónicos de forma similar a las secciones anteriores.

El objetivo de este estudio es:

1. Obtener los picos de aceleración y comprobar que sean menores que el máximo especificado en las normas para la ráfaga típica.
2. Determinar los esfuerzos dinámicos para obtener la vida a fatiga.

Esta asignatura se centra en el primer objetivo, el segundo correspondería a las asignaturas de "Estructuras aeroespaciales" y "Diseño de máquinas en aeronáutica". Se realizan las siguientes hipótesis:

1. Ala larga, se estudia el perfil con una teoría bidimensional.
2. Componente lateral no uniforme nula, la ráfaga tiene sólo componente vertical.
3. Flujo incompresible, $M_\infty = 0$.
4. Único grado de libertad en flexión ξ , positivo hacia arriba.

La ecuación dinámica es:

$$M \cdot \frac{d^2 \xi}{dt^2} = L_M(t) + L_G(t) \quad (2.182)$$

Donde se han separado las fuerzas de sustentación en las provocadas por la ráfaga L_G y las inducidas por el movimiento del perfil L_M .

Del mismo modo que en la asignatura "Mecánica de vuelo II", se estudiarán aquí dos funciones de entrada unitarias y se obtendrá la respuesta del sistema para estas funciones. Luego, la respuesta a una función de entrada arbitraria se podrá escribir como una superposición de respuestas unitarias a lo largo del tiempo empleando la integral de convolución.

Se considera como variable de entrada el ángulo de ataque α y como respuesta la sustentación adimensional. El tiempo se adimensionaliza como $s = U_\infty t/b$.

Como ya se ha comentado, se ha de tener en cuenta el ángulo de ataque inducido por la ráfaga de velocidad vertical, y también el ángulo de ataque inducido por el movimiento del perfil. Se definen entonces dos funciones de respuesta unitaria, la función de Kussner y la función de Wagner que consideran estos dos efectos respectivamente.

En primer lugar, la función de Wagner $\phi(s)$ se obtiene como la respuesta de la sustentación adimensional de una placa plana en un flujo incompresible, que en $t = 0$ cambia instantáneamente de $\alpha = 0$ a $\alpha = 1$ rad. La sustentación experimenta un transitorio, la respuesta vale $\phi(0) = 0.5$ inicialmente y va tendiendo a 1.

Por otro lado, la función de Kussner $\psi(s)$ se obtiene como la respuesta de la sustentación adimensional de una placa plana en un flujo incompresible cuando en $t = 0$ incide una ráfaga escalón que induce un ángulo de ataque $\alpha = 1$ rad. El escalón se irá desplazando aguas abajo a velocidad U_∞ , de modo que no todo el perfil ve el cambio en ángulo de ataque de golpe. Inicialmente la sustentación será $\psi(0) = 0$, y al final todo el perfil verá un ángulo de ataque de 1 rad, por lo que el valor final de la respuesta será 1 también.

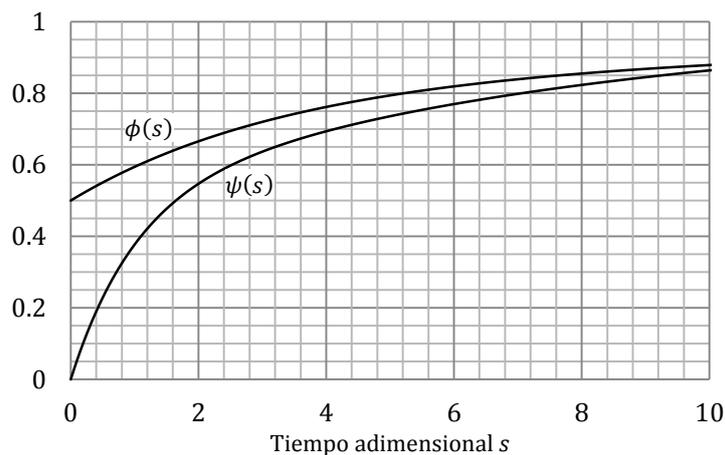


Figura 2.15: Funciones de Wagner $\phi(s)$ y de Kussner $\psi(s)$.

Entonces se puede decir que la respuesta debida al movimiento instantáneo del perfil será la respuesta unitaria de Wagner $\phi(s)$ multiplicada por el ángulo de ataque que induce el movimiento, debido a la velocidad vertical del grado de libertad $\alpha_M = -\dot{\xi}/U_\infty$. Por otro lado, la respuesta debida a una ráfaga escalón de velocidad vertical w_G será la respuesta unitaria de Kussner $\psi(s)$ multiplicada por el ángulo de ataque que induce la ráfaga $\alpha_G = w_G/U_\infty$.

A continuación se obtienen estas dos funciones a partir de la expresión para la sustentación generalizada en función del desplazamiento h (que apunta hacia abajo, al revés que ξ) y el ángulo de ataque α . Aunque el ángulo de ataque no sea un grado de libertad, representa la perturbación que se introduce, por esto se debe tener en cuenta.

Suponiendo que el movimiento es armónico (como ya se ha dicho, no tiene por qué serlo), con amplitudes h_0 y α_0 , al desarrollar la teoría del Tema 4 se obtiene la siguiente expresión para la sustentación:

$$L(k) = (\pi\rho_\infty b^2(-\omega^2) + 2\pi\rho_\infty U_\infty b C(k) i\omega) \cdot h_0 + \left(\pi\rho_\infty b^2(i\omega U_\infty + ba\omega^2) + 2\pi\rho_\infty U_\infty b C(k) \left(U_\infty + b \left(\frac{1}{2} - a \right) i\omega \right) \right) \alpha_0 \quad (2.183)$$

Es posible escribir esta expresión en forma de función de transferencia:

$$L(k) = H_{Lh}(i\omega) \cdot h_0 + H_{L\alpha}(i\omega) \cdot \alpha_0 \quad (2.184)$$

Donde $H_{Lh}(i\omega)$ y $H_{L\alpha}(i\omega)$ son funciones de transferencia que dependen de la frecuencia $i\omega$. Entonces, para obtener la sustentación de un movimiento que no sea armónico, se puede aplicar la transformada de Fourier, denotada aquí por una barra, que se define como:

$$\bar{f}(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(i\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (2.185)$$

De forma que queda:

$$\bar{L}(i\omega) = H_{Lh}(i\omega) \cdot \bar{h}(i\omega) + H_{L\alpha}(i\omega) \cdot \bar{\alpha}(i\omega) \quad (2.186)$$

Entonces se puede aplicar la transformada inversa para obtener $L(t)$:

$$L(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \cdot \left\{ (\pi\rho_\infty b^2(-\omega^2) + 2\pi\rho_\infty U_\infty b \cdot C(k) i\omega) \cdot \bar{h} + \left(\pi\rho_\infty b^2(i\omega U_\infty + ba\omega^2) + 2\pi\rho_\infty U_\infty b C(k) \left(U_\infty + b \left(\frac{1}{2} - a \right) i\omega \right) \right) \bar{\alpha} \right\} d\omega \quad (2.187)$$

A excepción de los términos que incluyen la función de Theodorsen $C(k)$ los demás son fáciles de anti-transformar, teniendo en cuenta que donde aparezca $i\omega$ la anti-transformada es una derivada, y donde aparezca $-\omega^2$ la anti-transformada es una segunda derivada:

$$L(t) = \frac{\pi\rho_\infty b^2}{2\pi} \cdot \frac{d^2 h}{dt^2} + \frac{\pi\rho_\infty b^2}{2\pi} \left(U_\infty \frac{d\alpha}{dt} - ba \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \right) + \frac{2\pi\rho_\infty U_\infty b}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \cdot C(k) \cdot \left\{ i\omega \bar{h} + \left(U_\infty + b \left(\frac{1}{2} - a \right) i\omega \right) \bar{\alpha} \right\} d\omega \quad (2.188)$$

Aunque no se pueda observar a primera vista, el término que multiplica a la función de Theodorsen es la transformada de la velocidad vertical del perfil, cambiada de signo, y particularizada en el punto $x = b/2$. Para comprobarlo, si el perfil es:

$$z_1 = -h(t) + (ab - x)\alpha(t) \quad (2.189)$$

La velocidad vertical será:

$$\varphi_{1z} = U_\infty z_{1x} + z_{1t} = -U_\infty \alpha(t) - \frac{dh}{dt} + (ab - x) \frac{d\alpha}{dt} \quad (2.190)$$

Aplicando la transformada, cambiando de signo y particularizando para $x = b/2$:

$$-|\bar{\varphi}_{1z}|_{x=b/2} = U_\infty \bar{\alpha} + i\omega \bar{h} + b \left(\frac{1}{2} - a \right) i\omega \bar{\alpha} \quad (2.191)$$

Por lo tanto:

$$L(t) = \frac{1}{2}\rho_{\infty}b^2 \cdot \frac{d^2h}{dt^2} + \frac{1}{2}\rho_{\infty}b^2 \left(U_{\infty} \frac{d\alpha}{dt} - ba \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right) - \rho_{\infty}U_{\infty}b \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \cdot C(k) \cdot |\bar{\varphi}_{1z}|_{x=b/2} d\omega \quad (2.192)$$

A partir de la ecuación (2.192) es posible obtener la función de Wagner $\phi(s)$ y la función de Kussner $\psi(s)$ aplicando las condiciones de contorno con las que se definieron. En el caso de la función de Wagner:

$$\alpha = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 \text{ rad} & t > 0 \end{cases}, \quad \frac{d^2h}{dt^2} = 0, \quad \frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0 \quad (2.193)$$

La velocidad vertical que ve el punto $x = b/2$ será, sustituyendo en la ecuación (2.190):

$$|\varphi_{1z}|_{x=b/2} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -U_{\infty} & t > 0 \end{cases} \quad (2.194)$$

Su transformada será:

$$\begin{aligned} |\bar{\varphi}_{1z}|_{x=b/2} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \cdot |\varphi_{1z}|_{x=b/2} dt = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} (-U_{\infty}) dt \\ &= \left| -U_{\infty} \cdot \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right|_0^{\infty} = -\frac{U_{\infty}}{i\omega} \end{aligned} \quad (2.195)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.192), adimensionalizando las frecuencias y tiempos:

$$L_{\phi}(t) = \rho_{\infty}U_{\infty}^2b \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \cdot C(k) \frac{1}{i\omega} d\omega = \rho_{\infty}U_{\infty}^2b \int_{-\infty}^{\infty} e^{iks} \cdot C(k) \frac{1}{ik} dk \quad (2.196)$$

Pero por definición, la función de Wagner $\phi(s)$ es esta respuesta en sustentación, aunque hay que darle dimensiones multiplicando por $c_l = 2\pi$, porque $\alpha = 1$ rad, y por la presión dinámica y la cuerda:

$$L_{\phi}(t) = \frac{1}{2}\rho_{\infty}U_{\infty}^2 \cdot 2b \cdot 2\pi \cdot \phi(s) = 2\pi\rho_{\infty}U_{\infty}^2b \cdot \phi(s) \quad (2.197)$$

Entonces se puede despejar la función de Wagner:

$$\phi(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iks} \cdot C(k) \cdot \frac{1}{ik} dk \quad (2.198)$$

La función de Kussner $\psi(s)$ se obtiene siguiendo el mismo procedimiento, salvo porque en esta ocasión el punto $x = b/2$ no verá ninguna velocidad hasta que no pase un cierto tiempo, el que tarde la ráfaga en alcanzar ese punto, teniendo en cuenta que se desplaza a una velocidad U_{∞} :

$$|\varphi_{1z}|_{x=b/2} = \begin{cases} 0 & t < 3b/2U_{\infty} \\ -U_{\infty} & t > 3b/2U_{\infty} \end{cases} \quad (2.199)$$

La transformada de la velocidad vertical en este caso incluirá una exponencial:

$$\begin{aligned} |\bar{\varphi}_{1z}|_{x=b/2} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \cdot |\varphi_{1z}|_{x=b/2} dt = \int_{\frac{3b}{2U_{\infty}}}^{\infty} e^{-i\omega t} (-U_{\infty}) dt \\ &= \left| -U_{\infty} \cdot \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right|_{\frac{3b}{2U_{\infty}}}^{\infty} = -\frac{U_{\infty}}{i\omega} e^{-i\frac{3k}{2}} \end{aligned} \quad (2.200)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.192), adimensionalizando las frecuencias y tiempos:

$$L_{\psi}(t) = \rho_{\infty} U_{\infty}^2 b \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \cdot C(k) \frac{e^{-i\frac{3k}{2}}}{i\omega} d\omega = \rho_{\infty} U_{\infty}^2 b \int_{-\infty}^{\infty} e^{iks} \cdot C(k) \frac{e^{-i\frac{3k}{2}}}{ik} dk \quad (2.201)$$

De nuevo, por definición la función de Kussner $\psi(s)$ es esta respuesta en sustentación, aunque hay que darle dimensiones:

$$L_{\psi}(t) = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 \cdot 2b \cdot 2\pi \cdot \psi(s) = 2\pi \rho_{\infty} U_{\infty}^2 b \cdot \psi(s) \quad (2.202)$$

Entonces se puede despejar la función de Kussner:

$$\psi(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(s-\frac{3}{2})} \cdot C(k) \cdot \frac{1}{ik} dk \quad (2.203)$$

Una vez se tienen estas dos funciones, empleando la integral de convolución de Duhamel, se puede reproducir la respuesta a una ráfaga arbitraria. En forma dimensional la integral es:

$$q(t) = \int_0^t \dot{Q}(t-\tau) \cdot \Phi(\tau) d\tau \quad (2.204)$$

Donde $\Phi(t)$ es la función de excitación, en términos del ángulo de ataque, $\dot{Q}(t)$ es la llamada función de instalación, que es la respuesta a un impulso unitario, y $q(t)$ es la respuesta global.

Esta integral de convolución indica que el valor de la respuesta global en un instante t es la superposición de muchas respuestas unitarias sucesivas que se producen debido a unos impulsos ocurridos en un instante anterior τ , multiplicadas por el valor esta excitación. Cuando se lleva al límite esta superposición se realiza la integral para τ desde 0 hasta t .

Se escribe la derivada $\dot{Q}(t)$ porque se trata de la respuesta a un impulso unitario. Pero las funciones de Wagner y Kussner son respuestas a un escalón unitario, no a un impulso. La derivada de estas funciones correspondería a la respuesta a un impulso unitario. Otra forma de ver la integral de convolución, con la respuesta a un escalón, resulta de integrar por partes:

$$\begin{aligned} u &= \Phi(\tau) & dv &= \dot{Q}(t-\tau) d\tau \\ du &= d\Phi = \dot{\Phi} d\tau & v &= -Q(t-\tau) \end{aligned} \quad (2.205)$$

Donde $Q(t)$ es por tanto la respuesta a un escalón unitario. Entonces se obtiene:

$$q(t) = \left| -Q(t-\tau) \Phi(\tau) \right|_0^t + \int_0^t Q(t-\tau) \cdot d\Phi \quad (2.206)$$

Si se supone $Q(0) = 0$, aunque esto no es así para la función de Wagner, se tiene:

$$q(t) = Q(t)\Phi(0) + \int_0^t Q(t-\tau) \cdot d\Phi \quad (2.207)$$

Entonces se puede visualizar la respuesta global en el instante t como la respuesta a un escalón unitario inicial, escalada según la excitación inicial, más la suma integral de las respuestas a unas excitaciones de escalón unitario producidas en un instante anterior τ , multiplicadas por el aumento diferencial de excitación en ese instante τ .

Para obtener la respuesta en sustentación debida al movimiento del perfil $L_M(t)$ se utiliza la función de Wagner como función de instalación $Q(s) = \phi(s)$. La función de excitación es el ángulo de ataque que induce el movimiento vertical, que es el mismo en todo el perfil y vale $\Phi(t) = -\dot{\xi}(t)/U_\infty$. Por lo tanto, en forma dimensional, de la ecuación (2.204) se obtiene:

$$L_M(t) = -\pi\rho_\infty b^2 \cdot \frac{U_\infty^2}{b^2} \frac{d^2\xi}{ds^2} + 2\pi\rho_\infty U_\infty^2 b \cdot \frac{1}{b} \int_0^s \dot{\phi}(s-\sigma) \cdot \left(-\frac{d\xi}{d\sigma}\right) d\sigma \quad (2.208)$$

Donde se ha tenido en cuenta que $dt = (b/U_\infty) ds$. Como en el segundo término hay dos derivadas temporales y una sola integral, al realizar el cambio de variable sólo ha quedado una b dividiendo. Solamente el segundo término se obtiene de la integral de convolución.

El primero hay que añadirlo porque la función de Wagner no tiene en cuenta la aceleración instantánea del perfil, que sin embargo sí que genera una fuerza, como se puede ver en el primer término de la ecuación (2.183). Hay que tener en cuenta que en aquella ecuación $-\omega^2 h_0$ representa una segunda derivada, y que entre una expresión y otra ha cambiado el signo porque ξ es positiva hacia arriba, mientras que h era positiva hacia abajo.

De forma similar, para obtener la respuesta en sustentación debida a la velocidad inducida por la ráfaga $L_G(t)$ se utiliza la función de Kussner como función de instalación $Q(s) = \psi(s)$. La función de excitación es la velocidad vertical $\Phi(t) = w_G(t)/U_\infty$. De la ecuación (2.204):

$$L_G(t) = 2\pi\rho_\infty U_\infty^2 b \cdot \int_0^s \psi(s-\sigma) \cdot \frac{w_G(\sigma)}{U_\infty} d\sigma \quad (2.209)$$

Con estos resultados la ecuación dinámica (2.182) queda, adimensionalizando el tiempo:

$$M \frac{U_\infty^2}{b^2} \frac{d^2\xi}{ds^2} = -\pi\rho_\infty U_\infty^2 \frac{d^2\xi}{ds^2} - 2\pi\rho_\infty U_\infty^2 b \int_0^s \dot{\phi}(s-\sigma) \cdot \frac{1}{b} \frac{d\xi}{d\sigma} d\sigma + \\ + 2\pi\rho_\infty U_\infty^2 b \int_0^s \psi(s-\sigma) \cdot \frac{w_G(\sigma)}{U_\infty} d\sigma \quad (2.210)$$

Es conveniente llegado este punto aplicar la transformada de Laplace y su inversa:

$$\bar{f}(p) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \\ f(t) = \mathcal{L}^{-1}(\bar{f}(p)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \bar{f}(p) dp \quad (2.211)$$

Se designa a las transformadas de Laplace con una barra, pero no debería generarse ninguna confusión con las transformadas de Fourier que se emplearon para encontrar las funciones de Wagner y Kussner. La transformada de Laplace tiene algunas propiedades de interés:

- La transformada de una derivada es p por la transformada de la función sin derivar.
- La transformada de una integral de convolución es el producto de las transformadas de las dos funciones del integrando.

Además las funciones de Wagner y de Kussner se pueden aproximar por las exponenciales:

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(s) &\approx 1 - 0.165 \cdot e^{-0.0455 \cdot s} - 0.335 \cdot e^{-0.3 \cdot s} \\ \bar{\psi}(s) &\approx 1 - 0.5 \cdot e^{-0.13 \cdot s} - 0.5 \cdot e^{-s}\end{aligned}\quad (2.212)$$

Aunque no se ajustan muy bien para $s \gg 1$, estas aproximaciones son fáciles de transformar:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\phi}}(p) &= \frac{1}{p} - 0.165 \cdot \frac{1}{p + 0.0455} - 0.335 \cdot \frac{1}{p + 0.3} \\ \bar{\bar{\psi}}(p) &= \frac{1}{p} - 0.5 \cdot \frac{1}{p + 0.13} - 0.5 \cdot \frac{1}{p + 1}\end{aligned}\quad (2.213)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (2.210) y utilizando las dos propiedades que se han comentado se obtiene:

$$M \frac{U_\infty^2}{b^2} \cdot p^2 \bar{\xi} = -\pi \rho_\infty U_\infty^2 \cdot p^2 \bar{\xi} - 2\pi \rho_\infty U_\infty^2 \cdot p \bar{\phi} \cdot p \bar{\xi} + 2\pi \rho_\infty U_\infty^2 b \cdot p \bar{\psi} \cdot \frac{\bar{w}_G}{U_\infty} \quad (2.214)$$

Ahora se puede despejar finalmente el término de la transformada de la aceleración $p^2 \bar{\xi}$, que era el objetivo para el que se propuso este estudio al principio del tema:

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2 \xi}{ds^2}\right) = p^2 \bar{\xi} = \frac{2\pi \rho_\infty U_\infty^2 b \cdot p \bar{\psi} \cdot \frac{\bar{w}_G}{U_\infty}}{M \frac{U_\infty^2}{b^2} + \pi \rho_\infty U_\infty^2 + 2\pi \rho_\infty U_\infty^2 \cdot \bar{\phi}} = \frac{\frac{b}{2U_\infty} \cdot p \bar{\psi} \cdot \bar{w}_G}{\lambda + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \bar{\phi}} \quad (2.215)$$

Donde el llamado parámetro másico λ es:

$$\lambda = \frac{M}{4\pi \rho_\infty b^2} \quad (2.216)$$

Es interesante aplicar una ráfaga escalón uniforme de intensidad w_0 , con $\bar{w}_G = w_0/p$. Dimensionalizando de nuevo el tiempo se obtiene:

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2 \xi}{dt^2}\right) = \frac{U_\infty^2}{b^2} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{d^2 \xi}{ds^2}\right) = \frac{w_0 U_\infty}{2\lambda b} \cdot \frac{\bar{\psi}}{1 + \frac{1}{4\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \bar{\phi}} \quad (2.217)$$

Entonces se puede definir el factor de atenuación o factor de alivio k como:

$$k = \frac{d^2 \xi / dt^2}{w_0 U_\infty / 2\lambda b} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\bar{\psi}}{1 + \frac{1}{4\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \bar{\phi}}\right) \quad (2.218)$$

En el caso estacionario este factor de alivio es la unidad:

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = 2\pi\rho_\infty U_\infty^2 b \cdot \frac{w_0}{U_\infty}, \quad k = \frac{d^2 \xi / dt^2}{w_0 U_\infty / 2\lambda b} = 1 \quad (2.219)$$

El máximo del factor de alivio se puede aproximar por la expresión:

$$k_{max} \approx \frac{0.88 \cdot \lambda}{5.3 + \lambda} \quad (2.220)$$

Se ha visto cómo se trata la ráfaga, representada por una función conocida, aplicando la transformada de Laplace. Para la turbulencia se utiliza una excitación aleatoria. En primer lugar se presentan algunos conceptos para tratar la respuesta de un sistema lineal ante una excitación aleatoria $f(t)$ de forma estadística. Se consideran estas tres funciones estadísticas:

- Media n -ésima:

$$\bar{f}^n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (f(t))^n dt \quad (2.221)$$

Para $n = 2$ se obtiene la media cuadrática, que da una idea de la potencia contenida en $f(t)$.

- Función de auto-correlación:

$$\phi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \cdot f(t + \tau) dt \quad (2.222)$$

La función de correlación permite comprobar la similitud entre dos funciones. En este caso se emplea con la misma función, con el argumento desfasado una cantidad τ . Si se particulariza en $\tau = 0$ se obtiene la media cuadrática, mientras que para $\tau \rightarrow \infty$ entonces $\phi(\tau) \rightarrow 0$. Puede comprobarse fácilmente que la auto-correlación es una función par, es decir $\phi(\tau) = \phi(-\tau)$.

- Densidad espectral de potencia:

$$\Phi(i\omega) = \frac{|F(i\omega)|^2}{2\pi T} \quad (2.223)$$

Donde $F(i\omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$, que se puede escribir como:

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(i\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (2.224)$$

Nótese que $F(i\omega)$ y $F(-i\omega)$ son funciones complejas conjugadas, y se cumple la propiedad:

$$|F(i\omega)|^2 = F(i\omega) \cdot F(-i\omega) \quad (2.225)$$

Se recuerda también, de la ecuación (2.185), cuando se dedujeron las funciones de Wagner y Kussner, que la transformada inversa de Fourier es:

$$\mathcal{F}^{-1}(F(i\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (2.226)$$

Una vez se han expuesto estas expresiones se empieza obteniendo una relación entre la densidad espectral de potencia y la función de auto-correlación planteando la integral:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \cdot F(i\omega) \cdot F(-i\omega) d\omega \quad (2.227)$$

A esta expresión sólo le falta el factor $1/2\pi$ para tratarse de una transformada inversa. Escribiendo $F(i\omega)$ como una transformada de Fourier:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \cdot F(-i\omega) \cdot \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \right\} d\omega \quad (2.228)$$

Aplicando un cambio de variable $\omega' = -\omega$, el cambio de signo en $d\omega$ se puede aprovechar para invertir los límites de integración, que también cambian de signo. Y cambiando también el orden de integración de ω' y t se obtiene:

$$I = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega'(t-\tau)} \cdot F(i\omega') d\omega' \right\} dt \quad (2.229)$$

El término encerrado en llaves es la anti-transformada de $f(t - \tau)$, salvo por el factor $1/2\pi$.

$$I = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(t) \cdot 2\pi \cdot f(t - \tau) dt \quad (2.230)$$

Igualando las ecuaciones (2.227) y (2.230), recordando la propiedad (2.225):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} |F(i\omega)|^2 d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(t) \cdot f(t - \tau) dt \quad (2.231)$$

Aplicando la definición de la densidad espectral de potencia (2.223) se puede escribir:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(i\omega) \cdot e^{i\omega\tau} d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \cdot f(t - \tau) dt \quad (2.232)$$

A la izquierda queda la transformada inversa de Fourier de la densidad de potencia espectral, salvo por un factor $1/\pi$, y a la derecha la función de auto-correlación (2.222). Finalmente:

$$\mathcal{F}^{-1}(\pi \cdot \Phi(i\omega)) = \phi(\tau) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\pi} \cdot \mathcal{F}(\phi(\tau)) = \Phi(i\omega) \quad (2.233)$$

A continuación se analiza la respuesta aleatoria $\xi_r(t)$ y se definen para ella la función de auto-correlación de la respuesta $\psi(\tau)$ y la densidad espectral de potencia de la respuesta $\Psi(i\omega)$. Se llama $h_r(\tau)$ a la respuesta a un impulso unitario. De la relación anterior se puede escribir:

$$\psi(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(i\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.234)$$

Y la respuesta es posible escribirla en términos de la integral de convolución de Duhamel:

$$\xi_r(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot h_r(t - \tau) d\tau \quad (2.235)$$

Dado que para $\tau < 0$ la excitación $f(\tau)$ se considera nula, y para $\tau > t$ la respuesta unitaria $h(t - \tau)$ también se anula, se pueden extender los límites de la integral hasta el infinito. Aplicando también el cambio de variable $\sigma = t - \tau$ se puede escribir:

$$\begin{aligned}\xi_r(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h_r(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{-\infty} f(t - \sigma) \cdot h_r(\sigma) (-d\sigma) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \sigma) \cdot h_r(\sigma) d\sigma\end{aligned}\quad (2.236)$$

Teniendo en cuenta la definición de la función de auto-correlación para la respuesta:

$$\psi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi_r(t) \xi_r(t + \tau) dt \quad (2.237)$$

Es posible introducir en esta expresión la integral de convolución (2.236):

$$\psi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \sigma) f(t + \tau - \sigma') h_r(\sigma) h_r(\sigma') d\sigma d\sigma' dt \quad (2.238)$$

Donde σ' representa la misma variable que σ , se diferencian en que cada una es la variable de una de las dos integrales de convolución que se han introducido, para $\xi_r(t)$ y para $\xi_r(t + \tau)$. Cambiando el orden de integración de t :

$$\psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_r(\sigma) \cdot h_r(\sigma') \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t - \sigma) f(t + \tau - \sigma') dt \right\} d\sigma d\sigma' \quad (2.239)$$

El término encerrado en llaves puede desarrollarse aplicando el cambio de variable $t' = t - \sigma$, obteniendo la función de auto-correlación de la excitación ϕ :

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-\sigma}^{T-\sigma} f(t') f(t' + (\sigma + \tau - \sigma')) dt' &= \phi(\tau + \sigma - \sigma') \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\tau + \sigma - \sigma')} \Phi(i\omega) d\omega\end{aligned}\quad (2.240)$$

Ahora es posible introducir este resultado en (2.239):

$$\psi(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(i\omega) e^{i\omega\tau} h_r(\sigma) e^{i\omega\sigma} h_r(\sigma') e^{-i\omega\sigma'} d\omega d\sigma d\sigma' \quad (2.241)$$

Separando las integrales en σ y σ' :

$$\psi(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(i\omega) e^{i\omega\tau} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h_r(\sigma) e^{i\omega\sigma} d\sigma \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h_r(\sigma') e^{-i\omega\sigma'} d\sigma' \right\} d\omega \quad (2.242)$$

De las integrales encerradas en llaves I_1 e I_2 se desarrolla la segunda. Como ya se ha dicho, la respuesta unitaria $h_r(\sigma')$ se anula para $\sigma' < 0$, y se puede cambiar el límite de integración:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} h_r(\sigma') e^{-i\omega\sigma'} d\sigma' = \int_0^{\infty} h_r(\sigma') e^{-i\omega\sigma'} d\sigma' \quad (2.243)$$

Haciendo el cambio de variable $\sigma' = t - \tau$ se obtiene:

$$I_2 = \int_{-\infty}^t h_r(t - \tau) e^{i\omega(\tau-t)} d\tau = e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^t e^{i\omega\tau} h_r(t - \tau) d\tau \quad (2.244)$$

Puede verse cómo la integral de la derecha es la integral de convolución de Duhamel para una entrada armónica $e^{i\omega\tau}$. Esta integral es entonces la respuesta $H_r(i\omega)$ a una entrada armónica. Aplicando el mismo procedimiento a la otra integral I_1 se puede escribir:

$$I_1 = H_r(-i\omega) \cdot e^{i\omega t}, \quad I_2 = H_r(i\omega) \cdot e^{-i\omega t} \quad (2.245)$$

Y al multiplicar ambas queda, recordando la ecuación (2.225):

$$\psi(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_r(i\omega)|^2 \cdot \Phi(i\omega) \cdot e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.246)$$

Finalmente al igualar esta ecuación con la ecuación (2.234) se obtiene la relación entre la densidad espectral de potencia de la excitación y la de la respuesta:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(i\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_r(i\omega)|^2 \cdot \Phi(i\omega) \cdot e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.247)$$

Igualando ambos integrandos:

$$\Psi(i\omega) = |H_r(i\omega)|^2 \cdot \Phi(i\omega) \quad (2.248)$$

Es decir, la densidad espectral de potencia de la respuesta es la densidad espectral de potencia de la entrada multiplicada por la respuesta a una excitación armónica.

Ahora que ya se ha desarrollado el tratamiento para la respuesta de un sistema lineal ante una excitación aleatoria, se concreta este análisis para la respuesta de un perfil ante la turbulencia atmosférica. Como se indicó al principio de este tema, interesa obtener la aceleración de esta respuesta, pero como no se puede conocer la respuesta exacta, habrá que trabajar con la media cuadrática y la densidad espectral de potencia.

$$\bar{\xi}^2 = \int_0^{\infty} \Psi(i\omega) d\omega = \int_0^{\infty} |H(i\omega)|^2 \cdot \Phi(i\omega) d\omega \quad (2.249)$$

Como se ve más adelante, la densidad espectral de potencia tendrá que obtenerse haciendo un estudio de la atmósfera y aplicando un modelo de turbulencia atmosférica. Este modelo de turbulencia estará referenciado a tierra, por lo que será necesario tener en cuenta que el perfil se desplaza a una velocidad U_{∞} con respecto a la turbulencia.

Como ya se ha indicado, la función $H(i\omega)$ representa la respuesta a una excitación armónica. Como la frecuencia de la excitación está referenciada a tierra, por efecto Doppler la frecuencia de la misma vista desde el perfil será diferente según la velocidad U_{∞} . Entonces la excitación armónica vista desde un punto x del perfil puede escribirse como:

$$w_G = w_0 \cdot e^{-i\omega\left(t - \frac{x}{U_{\infty}}\right)} \quad (2.250)$$

El ángulo de ataque inducido visto por el perfil será:

$$\alpha = \frac{w_G}{U_\infty} = \frac{w_0}{U_\infty} \cdot e^{i\frac{\omega x}{U_\infty}} \cdot e^{-i\omega t} \quad (2.251)$$

Para encontrar entonces la respuesta ante esta excitación armónica se puede aplicar el mismo procedimiento que se usaba en el caso de ráfagas, partiendo de la ecuación dinámica:

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = L_M(t) + L_G(t) \quad (2.252)$$

No se demuestra aquí, pero la sustentación inducida por la ráfaga armónica es:

$$L_G(k) = 2\pi\rho_\infty U_\infty b \cdot S(k) \cdot w_0 \quad (2.253)$$

Donde $S(k)$ es la función de Sears, que puede expresarse combinando funciones de Bessel de primera especie de orden 1, J_1 , con la función de Theodorsen $C(k)$ (que depende de las funciones de Hankel de segunda especie de orden 0 y 1, $H_0^{(2)}$ y $H_1^{(2)}$ (que a su vez son función de las funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden 0 y 1, J_0, J_1, Y_0 e Y_1)):

$$S(k) = C(k)(J_0(k) - iJ_1(k)) + iJ_1(k) \quad (2.254)$$

La función de Sears representa la respuesta en sustentación cuando al perfil le llega una ráfaga armónica pero no se permite su movimiento, de modo que la velocidad inducida se debe sólo a la ráfaga, y no al movimiento del perfil. Podría hacerse un ensayo así en un túnel de viento. Para la sustentación debida al movimiento:

$$L_M = -\rho_\infty b^2 \pi \ddot{\xi} - 2\pi\rho_\infty U_\infty b \cdot C(k) \dot{\xi} = -\pi\rho_\infty b^2 \left(-\omega^2 + \frac{2U_\infty}{b} C(k) i\omega \right) \xi \quad (2.255)$$

Se puede sustituir en la ecuación dinámica aplicando movimiento armónico:

$$-M\omega^2 \xi = -\pi\rho_\infty b^2 \left(-\omega^2 + \frac{2U_\infty}{b} C(k) i\omega \right) \xi + 2\pi\rho_\infty U_\infty b \cdot S(k) \cdot w_0 \quad (2.256)$$

Entonces se puede despejar la respuesta en aceleración para la excitación armónica:

$$H(i\omega) = -\omega^2 \frac{\xi}{w_0} = \frac{2\pi\rho_\infty U_\infty b S(k)}{M + \pi\rho_\infty b^2 \left(1 - \frac{2U_\infty}{b} C(k) \frac{i}{\omega} \right)} = \frac{\frac{U_\infty}{2b} S(k)}{\lambda + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2i}{k} C(k) \right)} \quad (2.257)$$

Para la densidad espectral de potencia de la excitación, el modelo de turbulencia atmosférica más extendido es el de von Kármán, que viene dado por:

$$\Phi(i\omega) = \frac{\bar{w}_0^2}{\pi U_\infty} \cdot \frac{1 + 3 \left(\frac{\omega l}{U_\infty} \right)^2}{\left(1 + \left(\frac{\omega l}{U_\infty} \right)^2 \right)^2} \quad (2.258)$$

Donde la escala integral de turbulencia l y la media cuadrática de la velocidad de turbulencia \bar{w}_0^2 son los dos parámetros característicos de este modelo de turbulencia atmosférica.

Estos parámetros están relacionados con los de otros modelos de turbulencia como el $k-\varepsilon$ y el $k-\omega$. Nótese que el modelo depende de U_∞ porque la forma en que el perfil ve la turbulencia cambiará según la velocidad del perfil respecto a la misma.

Finalmente se puede introducir $H(i\omega)$ y $\Phi(i\omega)$ en la ecuación (2.249) para obtener la media cuadrática de la respuesta en aceleración $\bar{\xi}^2$ y su densidad espectral de potencia $\Psi(i\omega)$. Interesa entonces que el máximo de la media cuadrática de la aceleración esté por debajo de los límites legales.

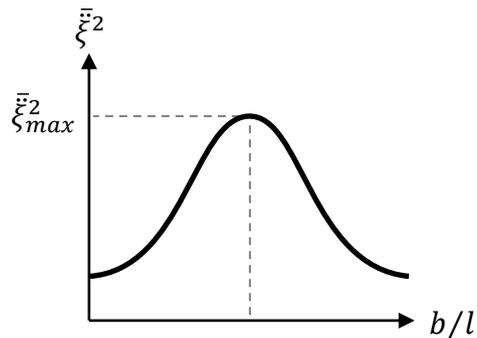


Figura 2.16: Media cuadrática de la aceleración $\bar{\xi}^2$ en función de la semi-cuerda b y la escala integral de turbulencia l .

Tema 7. Aeroelasticidad dinámica. Flameo en separación y bataneo.

El flameo en separación se produce cuando, durante parte del ciclo del movimiento de flameo, el perfil se encuentra en la zona no lineal de la curva de sustentación. Esto impide aplicar aerodinámica linealizada. Puede suceder si por ejemplo, la amplitud del movimiento de flameo es pequeña, pero la posición de equilibrio α_{ss} era cercana a la pérdida.

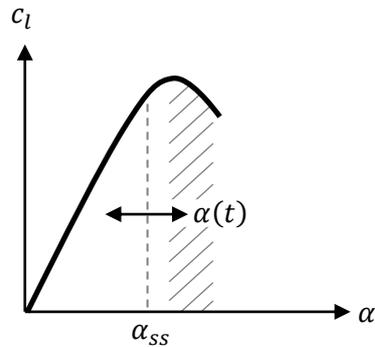


Figura 2.17: Separación de flujo por flameo.

Por otro lado, en el caso de que la amplitud del movimiento sea muy grande, se puede alcanzar la zona no lineal estructural, lo que obligaría a considerar efectos de plasticidad. No se considerará esta situación, y se supondrá que las amplitudes del movimiento son pequeñas. Se estudiarán por separado los casos de flexión y torsión. No se considerará el acoplamiento.

Sí que habrá que tener en cuenta los efectos de la histéresis aerodinámica. Éstos se deben a que la curva de sustentación se obtiene en condiciones estáticas, por ejemplo en el túnel de viento. Sin embargo, si las condiciones varían de forma rápida, hay que considerar que al aumentar el ángulo de ataque se produce un retraso en el desprendimiento, la corriente tarda unos instantes en desprenderse. Por otro lado al disminuir el ángulo de ataque también se produce un retraso en la re-adherencia.

Se estudia a continuación el caso de flexión, con el grado de libertad $h(t)$ positivo hacia abajo. El ángulo de ataque de equilibrio es α_{ss} que, como se ha indicado, no se puede considerar pequeño. La velocidad vertical $\dot{h}(t)$ induce entonces un ángulo de ataque $\alpha(t)$ como se ve en la Figura 2.18:

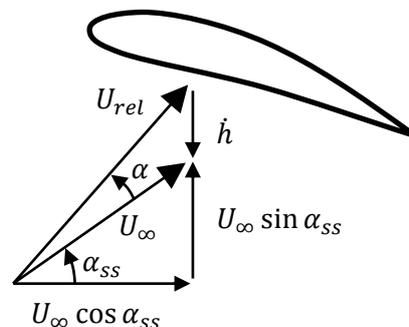


Figura 2.18: Movimiento de flameo en separación de flexión.

Es inmediato obtener la siguiente relación a partir de la Figura 2.18:

$$\tan(\alpha_{ss} + \alpha) = \frac{U_{\infty} \sin \alpha_{ss} + \dot{h}}{U_{\infty} \cos \alpha_{ss}} \quad (2.259)$$

De donde se puede despejar el ángulo α :

$$\alpha(t) = -\alpha_{ss} + \text{atan} \left(\tan \alpha_{ss} + \frac{\dot{h}}{U_{\infty} \cos \alpha_{ss}} \right) \quad (2.260)$$

Suponiendo que $\dot{h}/(U_{\infty} \cos \alpha_{ss}) \ll 1$ entonces se puede describir:

$$\alpha(t) = -\alpha_{ss} + \text{atan}(\tan \alpha_{ss} + x), \quad x = \frac{\dot{h}}{U_{\infty} \cos \alpha_{ss}} \quad (2.261)$$

Y ahora se puede hacer el desarrollo en serie de Taylor de $\text{atan}(\tan \alpha_{ss} + x)$ en torno a $x = 0$:

$$\begin{aligned} \text{atan}(\tan \alpha_{ss} + x) &= \alpha_{ss} + x \cos^2 \alpha_{ss} - x^2 \sin \alpha_{ss} \cos^3 \alpha_{ss} + \\ &+ \frac{x^3}{3} \cos^6 \alpha_{ss} (3 \tan^2 \alpha_{ss} - 1) + \dots \end{aligned} \quad (2.262)$$

Sustituyendo el valor de x y agrupando las funciones trigonométricas, al sustituir la expansión en la ecuación (2.260) se cancelan los dos términos α_{ss} , quedando:

$$\alpha(t) = \cos \alpha_{ss} \left(\frac{\dot{h}}{U_{\infty}} \right) - \frac{1}{2} \sin(2\alpha_{ss}) \left(\frac{\dot{h}}{U_{\infty}} \right)^2 - \frac{1}{3} \cos(3\alpha_{ss}) \left(\frac{\dot{h}}{U_{\infty}} \right)^3 + \dots \quad (2.263)$$

Para h se asume una solución armónica:

$$h(t) = h_0 \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad \dot{h} = -\omega h_0 \sin \omega t \quad (2.264)$$

Y se considera la fuerza vertical N , positiva hacia abajo, como:

$$N = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{rel}^2 \cdot 2b \cdot c_N, \quad -c_N = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n(\alpha_{ss}) \cdot (\alpha(t))^n \right) \quad (2.265)$$

El coeficiente c_N se ha expresado como serie de potencias de α , donde los coeficientes a_n son función del ángulo de equilibrio α_{ss} . Esta función se obtiene habitualmente de forma experimental en función de α , y lo que se hace es desarrollarla en esta serie de potencias. La presión dinámica relativa q_{rel} se puede obtener fácilmente de la Figura 2.18:

$$\begin{aligned} q_{rel} &= \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{rel}^2 = \frac{1}{2} \rho_{\infty} \left((U_{\infty} \cos \alpha_{ss})^2 + (U_{\infty} \sin \alpha_{ss} + \dot{h})^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 \left(1 + 2 \frac{\dot{h}}{U_{\infty}} \sin \alpha_{ss} + \left(\frac{\dot{h}}{U_{\infty}} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.266)$$

Sin embargo, esta expresión para el coeficiente de fuerza c_N no tiene en cuenta el efecto ya mencionado de histéresis aerodinámica, el retraso que sufre la separación y la adhesión del flujo por los cambios bruscos de ángulo de ataque. Para tenerlo en cuenta lo que se hace es añadir un desfase ψ a las \dot{h} del ángulo de ataque α , pero no en las de la presión dinámica q_{rel} .

Sustituyendo todos estos resultados la expresión para la fuerza vertical N queda, limitándose la expresión de c_N a los ν primeros términos:

$$\begin{aligned}
 N = & -\frac{1}{2}\rho_{\infty}U_{\infty}^2 \cdot 2b \cdot \left(1 - 2\frac{h_0\omega}{U_{\infty}}\sin\alpha_{ss}\sin(\omega t) + \left(\frac{h_0\omega}{U_{\infty}}\right)^2\sin^2(\omega t) \right) \cdot \\
 & \cdot \sum_{n=0}^{\nu} \left\{ a_n(\alpha_{ss}) \cdot \left(\cos\alpha_{ss} \left(-\frac{h_0\omega}{U_{\infty}} \right) \sin(\omega t + \psi) - \right. \right. \\
 & \quad - \frac{1}{2}\sin(2\alpha_{ss}) \left(\frac{h_0\omega}{U_{\infty}} \right)^2 \sin^2(\omega t + \psi) - \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{3}\cos(3\alpha_{ss}) \left(-\frac{h_0\omega}{U_{\infty}} \right)^3 \sin^3(\omega t + \psi) + \dots \right)^n \right\} \quad (2.267)
 \end{aligned}$$

Una vez se tiene esta expresión interesa obtener el trabajo que se realiza durante un ciclo de la oscilación, con periodo T , y la potencia asociada a ese trabajo. De este modo se puede deducir que, si la potencia es negativa, la atmósfera extrae energía del sistema y no se produce el flameo. Por otro lado, si la potencia es positiva, entonces se producirá el flameo, y se podrán determinar las condiciones en las que se produce. Para obtener el trabajo en un ciclo:

$$W = \int_0^T N dh = \int_0^T N \dot{h} dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} N \dot{h} d(\omega t) \quad (2.268)$$

Y la potencia será:

$$\mathcal{P} = \frac{W}{T} = W \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N \dot{h} d(\omega t) \quad (2.269)$$

Tras realizar esta integral, que no se desarrolla aquí, queda una expresión del tipo:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\rho_{\infty}U_{\infty}^3 \cdot 2b \cdot \left(\mathcal{A} \left(\frac{h_0\omega}{U_{\infty}} \right)^2 + \mathcal{B} \left(\frac{h_0\omega}{U_{\infty}} \right)^4 + \mathcal{C} \left(\frac{h_0\omega}{U_{\infty}} \right)^6 + \dots \right) \quad (2.270)$$

Los términos con potencias impares se han cancelado al integrar durante un ciclo de oscilación completo. Los coeficientes \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , etc. son función de α_{ss} y ψ . Según los signos de estos coeficientes las características del flameo serán diferentes. Si se dibuja la potencia \mathcal{P} en función de la amplitud del movimiento $h_0\omega/U_{\infty}$, la pendiente de la curva para valores pequeños de la amplitud vendrá dada por el signo de \mathcal{A} , para valores medios se impondrá el signo de \mathcal{B} , y para valores grandes el signo de \mathcal{C} dominará sobre los otros.

Intuitivamente, se puede entender que una potencia \mathcal{P} positiva hará que la amplitud del movimiento aumente, mientras que una potencia negativa hará que disminuya. Esto se puede ver en la Figura 2.19 indicado por flechas junto a las curvas. Los puntos con $\mathcal{P} = 0$ pueden ser entonces de dos tipos: de ciclo límite y de flameo explosivo.

El flameo de ciclo límite es un punto de equilibrio estable para el que, si se produce una pequeña perturbación de amplitud o potencia, el sistema evoluciona hacia el punto de inicio. El flameo explosivo se produce en puntos de equilibrio inestables. Un pequeño aumento de la amplitud o la potencia hará que éstas se disparen.

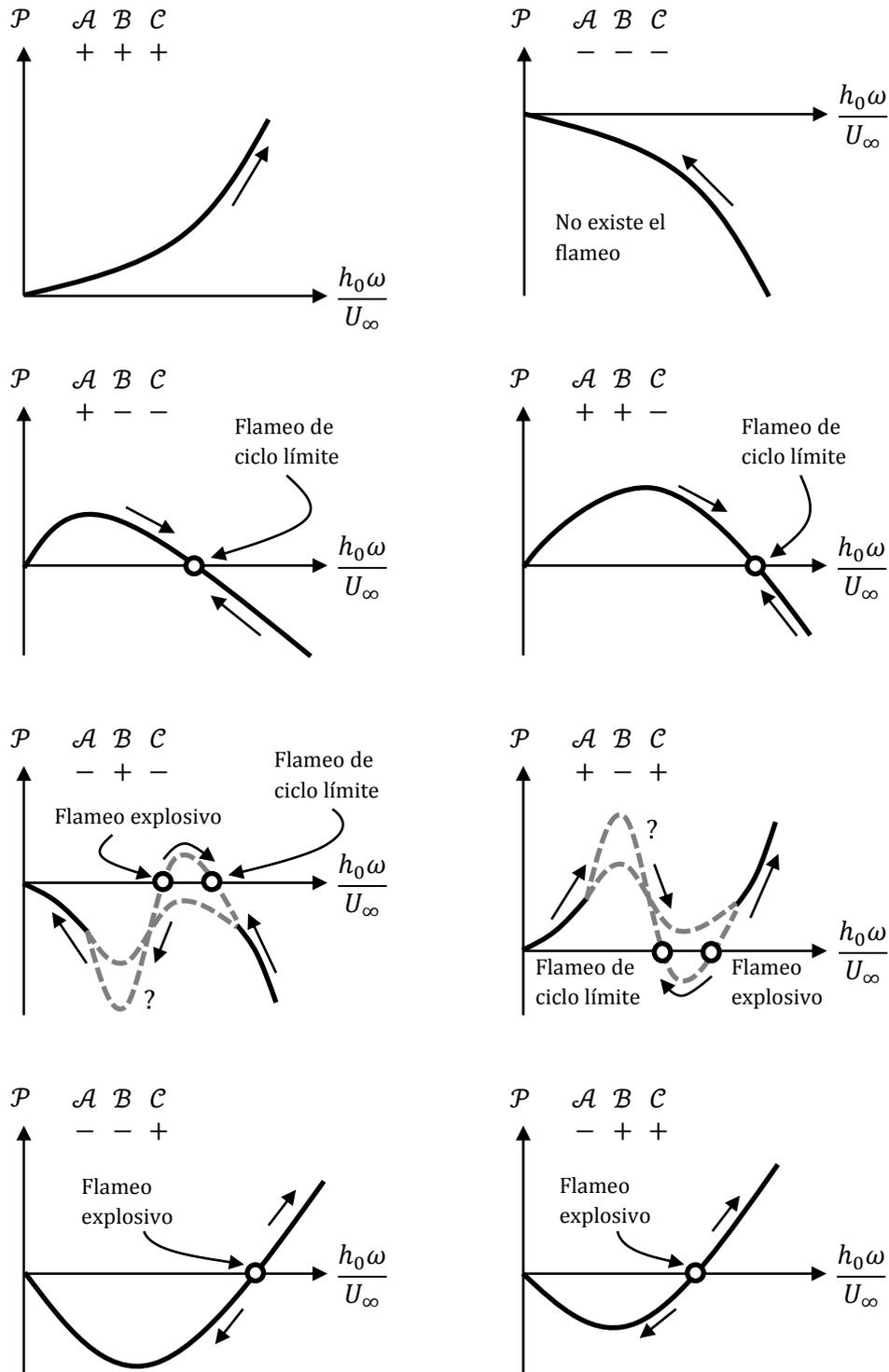


Figura 2.19: Evolución de la amplitud y la potencia de flameo para las diferentes combinaciones de signos de los coeficientes A , B y C .

Los puntos de flameo de ciclo límite y flameo explosivo se pueden obtener igualando la potencia a cero:

$$P = 0 \Rightarrow \left(\frac{h_0\omega}{U_\infty}\right)^2 = \frac{-|B| + \sqrt{B^2 + 4A|C|}}{2|C|} \quad (2.271)$$

Si se considera que la amplitud es suficientemente pequeña, la expresión de la potencia se puede reducir a:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^3 \cdot 2b \cdot \mathcal{A} \left(\frac{h_0 \omega}{U_{\infty}} \right)^2 \quad (2.272)$$

El signo de esta expresión dependerá exclusivamente del signo de \mathcal{A} . Si se toman los dos primeros coeficientes a_n de la expresión (2.265) para c_N :

$$\mathcal{A} = -2a_0 \sin \alpha_{ss} - a_1 \cos \alpha_{ss} \cos \psi \quad (2.273)$$

El coeficiente a_0 representa c_{n0} , el coeficiente de fuerza en el punto de equilibrio, con α_{ss} , y es siempre mayor que cero. Por otro lado el coeficiente a_1 representa la pendiente de la curva de sustentación en ese punto. Para que se produzca flameo deberá cumplirse que:

$$a_1 < -\frac{2a_0 \tan \alpha_{ss}}{\cos \psi} \quad (2.274)$$

Por lo tanto a_1 no sólo debe ser negativo, si no que además deberá ser inferior a este valor.

Se analiza a continuación el caso de torsión. El procedimiento es análogo, aunque el resultado final es más complejo. El perfil es libre de oscilar en torno a un punto x_0 . La velocidad vertical que ve cada punto del perfil será ahora diferente, como se ilustra en la Figura 2.20.

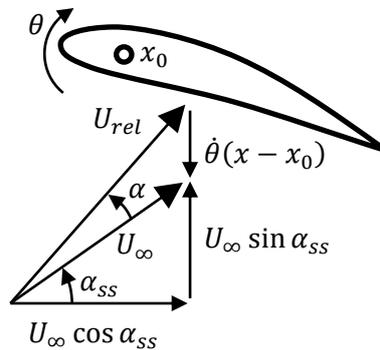


Figura 2.20: Movimiento de flameo en separación de torsión.

El ángulo de ataque será por tanto:

$$\alpha(t) = \text{atan} \left(\tan \alpha_{ss} + \frac{\dot{\theta}(x - x_0)}{U_{\infty} \cos \alpha_{ss}} \right) + \theta(t) - \alpha_{ss} \quad (2.275)$$

Mientras que la presión dinámica relativa es:

$$q_{rel} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{rel}^2 = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 \left(1 + \frac{2\dot{\theta}(x - x_0)}{U_{\infty}} \sin \alpha_{ss} + \left(\frac{\dot{\theta}(x - x_0)}{U_{\infty}} \right)^2 \right) \quad (2.276)$$

Pero ahora $\alpha(t)$ y q_{rel} dependen de la posición x . Para simplificar lo que se hace es suponer que existe un punto característico del movimiento, situado a una distancia eb del punto x_0 , de forma similar a cuando se utilizó el punto $x = b/2$ para obtener la función de Kussner.

De este modo estas expresiones quedan:

$$\alpha(t) = \text{atan} \left(\tan \alpha_{ss} + \frac{\dot{\theta}eb}{U_{\infty} \cos \alpha_{ss}} \right) + \theta(t) - \alpha_{ss} \quad (2.277)$$

$$q_{rel} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{rel}^2 = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 \left(1 + \frac{2\dot{\theta}eb}{U_{\infty}} \sin \alpha_{ss} + \left(\frac{\dot{\theta}eb}{U_{\infty}} \right)^2 \right) \quad (2.278)$$

De nuevo se supone una solución armónica para $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = -\omega \theta_0 \sin \omega t \quad (2.279)$$

Y el coeficiente de momento también se expresa en serie de potencias:

$$M = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{rel}^2 \cdot (2b)^2 \cdot c_M, \quad c_M = \sum_{n=0}^{\infty} \left(b_n(\alpha_{ss}) \cdot (\alpha(t))^n \right) \quad (2.280)$$

Desarrollando $\alpha(t)$ en serie de Taylor en torno a $\theta_0 = 0$, en forma adimensional:

$$\begin{aligned} \alpha(t) = & \theta_0 \cos \omega t + \cos \alpha_{ss} (-ek\theta_0) \sin(\omega t) - \frac{1}{2} \sin(2\alpha_{ss}) (-ek\theta_0)^2 \sin^2(\omega t) \\ & - \frac{1}{3} \cos(3\alpha_{ss}) (-ek\theta_0)^3 \sin^3(\omega t) + \dots \end{aligned} \quad (2.281)$$

De nuevo hay que aplicar el desfase ψ a la hora de introducir el ángulo de ataque en la serie de potencias del coeficiente de momento para tener en cuenta el efecto de histéresis aerodinámica. Una vez se hace esto se obtiene el trabajo en un ciclo completo y la potencia:

$$W = \int_0^T M \dot{\theta} dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} M \dot{\theta} d(\omega t), \quad \mathcal{P} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M \dot{\theta} d(\omega t) \quad (2.282)$$

No se hace aquí, pues se trata de un procedimiento muy largo, pero después de desarrollar esta integral se llega a la expresión:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^3 \cdot (2b)^2 \cdot (\mathcal{A}'\theta_0 + \mathcal{B}'\theta_0^2 + \mathcal{C}'\theta_0^3 + \dots) \quad (2.283)$$

De nuevo los coeficientes \mathcal{A}' , \mathcal{B}' , \mathcal{C}' , etc. son función de α_{ss} y ψ , y sus signos determinarán las características del flameo. Si se da la casualidad de que $e = 0$ y la frecuencia reducida se considera pequeña se puede escribir la integral anterior como:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2\pi} \rho_{\infty} U_{\infty}^3 (4b)k \sin \psi \sum_{n=0}^{\nu} \left(b_n \theta_0^{n+1} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times n}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (n+1)} \right) \quad (2.284)$$

Todo este desarrollo tiene algunas deficiencias. Por un lado, en la realidad los coeficientes a_n y b_n dependen también de la frecuencia reducida k y, en caso de tratarse de flujo compresible, del número de Mach M_{∞} . Además se han considerado los grados de libertad de torsión y flexión por separado, y no se ha estudiado el posible acoplamiento entre ambos.

El último fenómeno de aeroelasticidad en perfiles que se verá es el del bataneo, y se tratará exclusivamente de forma cualitativa. El bataneo es el movimiento regular de una estructura excitada por una turbulencia que se ha generado en alguna parte de la misma, y no por el propio movimiento como sucede en el caso del flameo.

El nombre de bataneo proviene de la palabra batán, que es una máquina compuesta de gruesos mazos de madera, y representa como si la estructura recibiera golpes externos.

Existen dos casos principales de bataneo. El primer caso es el bataneo de cola, en el que la cola está excitada por la turbulencia que proviene del ala. El segundo se llama bataneo de superficies de control, aunque no tiene por qué haber una superficie de control para producirse.

Para el primer caso es necesario conocer con qué frecuencias dominantes se desprenden los torbellinos del ala. El análisis es similar al de la calle de torbellinos de von Kármán. Una aproximación para la frecuencia dominante reducida sería:

$$k = \begin{cases} 0.54 \cdot \alpha & \alpha < 30^\circ \\ 0.15 \cdot \frac{2b \sin \alpha}{U_\infty} & \alpha > 30^\circ \end{cases} \quad (2.285)$$

El segundo caso afecta en régimen transónico, cuando la superficie de control o la parte posterior del perfil está excitada por el movimiento de la onda de choque que se produce en el extradós, como se ilustra en la Figura 2.21. La onda de choque se sitúa en el extradós, provocando una diferencia de presión discreta muy elevada: la presión detrás de la onda de choque aumenta mucho. Por este motivo, en la capa límite se desarrolla un flujo inverso que provoca un movimiento oscilante hacia adelante y hacia atrás de la posición de la onda de choque. El análisis de este fenómeno es muy complejo y no se desarrolla aquí.

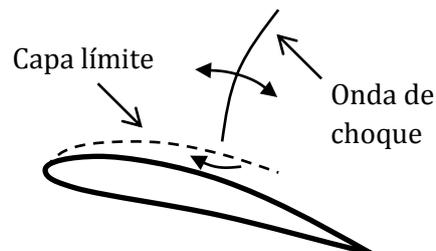


Figura 2.21: Oscilación de la onda de choque en vuelo transónico.

Módulo 3. Estructuras unidimensionales.

Tema 9. Introducción.

En este módulo se desarrollarán los efectos aeroelásticos en alas largas. El ala estará representada como una viga, y se conocen las propiedades elásticas de la misma, como la rigidez a torsión y a flexión.

Únicamente se tendrán en cuenta la variación de las variables a lo largo de la envergadura. Por ejemplo se contará con que el coeficiente de sustentación sea diferente en diferentes perfiles del ala, pero no se tendrá en cuenta su variación a lo largo de la cuerda de cada perfil. Por esto se considera que el estudio es unidimensional, y no bidimensional.

Los fenómenos aeroelásticos que se verán son los mismos que en el caso del perfil, pero su análisis en el caso de alas largas arrojará nuevas conclusiones.

Tema 10. Aeroelasticidad estática en alas rectas.

Para simplificar el tratamiento se considerarán alas sin flecha, en las que los centros de cortadura de las secciones del ala están alineados, formando el eje elástico. En la asignatura "Estructuras Aeroespaciales" se ve cómo obtener la posición del centro de cortadura de una sección del ala. Como en el caso del perfil, en aeroelasticidad estática no influyen los movimientos de flexión, por lo que sólo se tiene en cuenta la torsión.

Existen dos métodos para analizar el ala larga como una viga, empleando la formulación diferencial o la formulación integral de la ecuación de equilibrio. Cada una de las dos formulaciones tiene su utilidad.

La formulación diferencial tiene la ventaja de que es muy sencilla de resolver, si se supone que un montón de cosas son constantes a lo largo de la envergadura, como la cuerda y las propiedades elásticas. Esto último hace que los resultados tengan poca exactitud, pero permite obtener una visión global de los fenómenos aeroelásticos.

Por otro lado la formulación integral, aunque más complicada analíticamente, es mucho más sencilla de implementar numéricamente, y por lo tanto es la que se usa en la realidad.

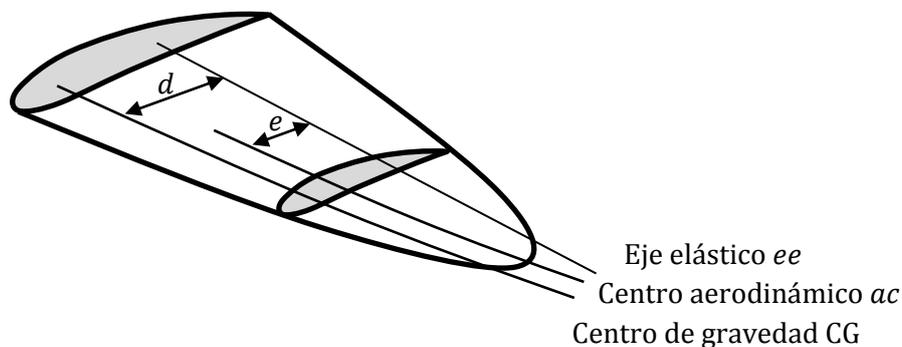


Figura 3.1: Representación del ala recta.

Antes de todo se definen las siguientes variables:

- Cuerda: $c(y)$
- Distancia $ee - CG$: $d(y)$
- Distancia $ee - ac$: $e(y)$
- Longitud de una semi-ala: l
- Masa por unidad de envergadura: $m(y)$
- Rigidez a torsión: $GJ(y)$
- Giro o deformación en torsión: $\theta(y)$
- Momento torsor: $t(y)$
- Distribución de sustentación: $c_L(y)$
- Distribución de momento ac : $c_{Mac}(y)$
- Factor de carga: $N(y)$

Se estudia en primer lugar la formulación diferencial. Se estudiará primero el problema simétrico y después el anti-simétrico. La ecuación de equilibrio es:

$$\frac{d}{dy} \left(GJ \cdot \frac{d\theta}{dy} \right) + t(y) = 0 \quad (3.1)$$

En “Estructuras Aeroespaciales” se ve la misma ecuación pero de forma diferente:

$$GJ \cdot \frac{d\theta}{dy} = T(y) \quad (3.2)$$

Esto es porque aquí $t(y)$ es el momento torsor aplicado, y en “Estructuras Aeroespaciales” $T(y)$ representa el esfuerzo a torsión que soporta la viga, que se obtiene del diagrama de momentos. El diagrama de momentos no es más que la integración a lo largo de la viga de los momentos aplicados, por lo que $t = dT/dy$. El signo depende de los sistemas de referencia.

Para poder resolver analíticamente la ecuación (3.1) será necesario definirlo casi todo constante. El momento torsor será el provocado por las fuerzas aerodinámicas y el peso, escalado por el factor de carga N , que en el caso simétrico es:

$$t(y) = qce \cdot c_L + qc^2 \cdot c_{Mac} - Nmgd, \quad N = L/W = 1 + \ddot{z}/g \quad (3.3)$$

De nuevo, como en el caso del perfil, se supone un ángulo de ataque de equilibrio, rígido, $\alpha^r(y)$, por lo que el ángulo de ataque será la combinación de la parte rígida y la deformación:

$$\alpha(y) = \alpha^r(y) + \theta(y) \quad (3.4)$$

Debe recordarse que este ángulo de ataque se mide respecto a la línea de sustentación nula del ala LSN_w . La sustentación será:

$$c_L = c_L^r + c_L^e = c_L^r(y) + c_{L\alpha}(y)\theta(y) \quad (3.5)$$

Aquí se está haciendo la suposición de que el coeficiente de sustentación c_L de cada perfil sólo se ve afectado por su propia deformación, y no por la deformación de los perfiles vecinos. Tener este efecto en cuenta complicaría mucho el análisis, y se hará solamente para la formulación integral, ya que al discretizar será más sencillo tener este efecto en consideración.

Sustituyendo el momento torsor y la sustentación, despejando los términos que dependen de la deformación en torsión $\theta(y)$, la ecuación diferencial queda:

$$\frac{d}{dy} \left(GJ \cdot \frac{d\theta}{dy} \right) + qce \cdot c_{L\alpha} \theta = - qce \cdot c_L^r - qc^2 \cdot c_{Mac} + Nmgd \quad (3.6)$$

Las condiciones de contorno implican que no haya giro en el encaje del ala y que no haya momento torsor en la punta. Respectivamente:

$$\theta(0) = 0, \quad GJ \cdot \theta'(l) = 0 \quad (3.7)$$

Suponiendo propiedades uniformes la ecuación diferencial se puede escribir como:

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \lambda^2\theta = k^r \quad (3.8)$$

Donde:

$$\lambda^2 = \frac{qcec_{L\alpha}}{GJ}, \quad k^r = -\frac{qcec_L^r}{GJ} - \frac{qc^2 c_{Mac}}{GJ} + \frac{Nmgd}{GJ} \quad (3.9)$$

La solución de la ecuación será la combinación de la solución homogénea (con $k^r = 0$) combinada con una solución particular. La divergencia a torsión ocurrirá cuando la solución de la ecuación homogénea no sea una solución trivial. De forma similar al caso del perfil, para este análisis no se tienen en cuenta los términos constantes k^r . La solución homogénea será:

$$\theta_h(y) = A \cos(\lambda y) + B \sin(\lambda y) \quad (3.10)$$

Al imponer la condición de contorno de no giro en el encaje $\theta(0) = 0$ queda $A = 0$. Para la condición de contorno de no momento en la punta $\theta'(l) = 0$ queda:

$$B\lambda \cos(\lambda l) = 0 \quad (3.11)$$

La solución trivial sería $B = 0$. Para que se produzca la divergencia entonces $\cos(\lambda l) = 0$.

$$\lambda l = (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.12)$$

Comparando con la definición de λ , el valor más pequeño será el que corresponda con la presión dinámica más pequeña, que será para la que se producirá la divergencia:

$$\lambda_D^2 = \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 = \frac{q_D c e c_{L\alpha}}{GJ} \Rightarrow q_D = \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \frac{GJ}{c e c_{L\alpha}} \quad (3.13)$$

En el caso del perfil la presión dinámica de divergencia q_D se podría escribir, partiendo de la ecuación (2.3), y suponiendo una sección característica del ala en $y = 3/4 \cdot l$:

$$q_{D \ 2D} = \left| \frac{k_\alpha}{S e c_{l\alpha}} \right|_{y=\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \frac{GJ}{l^2 c e c_{l\alpha}}, \quad |k_\alpha|_{y=\frac{3}{4}} = \frac{GJ}{3/4 \cdot l} \quad (3.14)$$

Comparando con la presión dinámica del ala:

$$\frac{q_{D\ 3D}}{q_{D\ 2D}} = \frac{\pi^2/4}{4/3} \approx 1.8, \quad \frac{U_{D\ 3D}}{U_{D\ 2D}} \approx 1.3 \quad (3.15)$$

Estos cálculos no son muy precisos, pero sirven para hacerse una idea de la diferencia de los valores calculados en teoría de perfiles con los correspondientes para alas.

Una vez se tiene la presión dinámica de divergencia q_D interesa calcular la deformación del ala para presiones inferiores a ésta. Para ello se obtiene de forma inmediata la solución particular:

$$\theta_p(y) = \frac{k^r}{\lambda^2} \quad (3.16)$$

Por lo que si la presión dinámica es menor que la de divergencia, la solución completa será:

$$\theta(y) = A \cos(\lambda y) + B \sin(\lambda y) + \frac{k^r}{\lambda^2} \quad (3.17)$$

Aplicando las condiciones de contorno se obtiene:

$$A = -\frac{k^r}{\lambda^2}, \quad B = A \tan(\lambda l) \quad (3.18)$$

Quedando entonces la solución como:

$$\theta(y) = \frac{k^r}{\lambda^2} (1 - \cos(\lambda y) - \tan(\lambda l) \sin(\lambda y)) \quad (3.19)$$

Este sería el valor de la deformación si no fuera porque la torsión modificará la sustentación, que a su vez modificará el factor de carga N . Por ello hay que elegir una definición para N que permita cerrar el problema. Existen dos opciones: dejar que N varíe libremente o forzar un valor de N impuesto. El factor de carga será:

$$N = \frac{L}{W} = \frac{2}{W} \int_0^l q c c_L dy \quad (3.20)$$

Donde, teniendo en cuenta que se está tratando el problema simétrico, se ha realizado la integral desde 0 hasta l y se ha multiplicado por 2. En el primer caso, en el que N puede variar:

$$\begin{aligned} N &= \frac{2qc}{W} \int_0^l (c_L^r + c_{L\alpha} \cdot \theta(y)) dy = \\ &= \frac{2qc}{W} \left(c_L^r \cdot l + c_{L\alpha} \frac{k^r}{\lambda^2} \left(l - \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda l) + \tan(\lambda l) \left(\frac{\cos(\lambda l)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) \right) \right) \\ &= \frac{2qc}{W} \left(c_L^r \cdot l + c_{L\alpha} \frac{k^r}{\lambda^2} \left(l - \frac{1}{\lambda} \tan(\lambda l) \right) \right) = \\ &= \frac{2qc}{W} \left(c_L^r \cdot l + \frac{c_{L\alpha}}{qc c_{L\alpha}} (-qc c_L^r - qc^2 c_{Mac} + Nmgd) \left(l - \frac{1}{\lambda} \tan(\lambda l) \right) \right) \quad (3.21) \end{aligned}$$

De esta última expresión es posible despejar N :

$$N = \frac{\left(c_L^r \cdot \frac{1}{\lambda l} \tan(\lambda l) + \frac{c}{e} c_{Mac} \left(\frac{1}{\lambda l} \tan(\lambda l) - 1 \right) \right)}{\frac{1}{q\bar{c}} \left(\frac{W}{2l} - \frac{mgd}{e} \left(1 - \frac{\tan(\lambda l)}{\lambda l} \right) \right)} \quad (3.22)$$

Con el único objetivo de poder analizar un poco el resultado se realizan las simplificaciones de que $d = 0$ y que $c_{Mac} = 0$. Entonces la deformación en torsión queda:

$$\begin{aligned} k^r = -\frac{1}{GJ} q c e c_L^r &\Rightarrow \theta(y) = -\frac{q c e c_L^r / GJ}{q c e c_{L\alpha} / GJ} (1 - \cos(\lambda y) - \tan(\lambda l) \sin(\lambda y)) = \\ &= -\frac{c_L^r}{c_{L\alpha}} (1 - \cos(\lambda y) - \tan(\lambda l) \sin(\lambda y)) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Si se compara entonces la sustentación completa con la sustentación de equilibrio rígida, se puede ver cómo efectivamente, si $\lambda l = \pi/2$, entonces se produce la divergencia:

$$\begin{aligned} \frac{c_L}{c_L^r} &= \frac{c_L^r + c_{L\alpha} \theta}{c_L^r} = 1 + \frac{c_{L\alpha}}{c_L^r} \left(-\frac{c_L^r}{c_{L\alpha}} (1 - \cos(\lambda y) - \tan(\lambda l) \sin(\lambda y)) \right) = \\ &= \cos(\lambda y) + \tan(\lambda l) \sin(\lambda y) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Si por otro lado se considera que N debe ser constante, entonces será necesario que el piloto modifique la sustentación del mismo modo que lo hace la torsión, pero en sentido inverso. Para ello el piloto induce un ángulo de ataque α_p y el factor de carga N queda:

$$N = N_0 = \frac{2}{W} \int_0^l q c (c_L^r + c_{L\alpha} \theta + c_{L\alpha} \alpha_p) dy, \quad N_0 = \frac{2}{W} \int_0^l q c c_L^r dy \quad (3.25)$$

Donde N_0 es el factor de carga del caso de equilibrio rígido, que debe mantenerse. Igualando ambas expresiones se obtiene el ángulo de ataque que debe inducir el piloto:

$$\int_0^l q c (c_{L\alpha} \theta + c_{L\alpha} \alpha_p) dy = 0 \Rightarrow \alpha_p = -\frac{1}{l} \int_0^l \theta dy \quad (3.26)$$

Sustituyendo el valor del giro $\theta(y)$:

$$\alpha_p = -\frac{1}{l} \frac{k^r}{\lambda^2} \left(l - \frac{\sin(\lambda l)}{\lambda} + \tan(\lambda l) \left(\frac{\cos(\lambda l)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) \right) = \frac{-k^r}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\tan(\lambda l)}{\lambda l} \right) \quad (3.27)$$

Si se repiten las hipótesis de que $d = 0$ y que $c_{Mac} = 0$:

$$\frac{k^r}{\lambda^2} = -\frac{c_L^r}{c_{L\alpha}}, \quad \frac{c_L}{c_L^r} = \frac{(c_L^r + c_{L\alpha} \theta + c_{L\alpha} \alpha_p)}{c_L^r} \quad (3.28)$$

Desarrollando de nuevo se comprueba cómo si $\lambda l = \pi/2$ se produce la divergencia:

$$\frac{c_L}{c_L^r} = 1 + \cos(\lambda y) + \tan(\lambda l) \left(\sin(\lambda y) - \frac{1}{\lambda l} \right) \quad (3.29)$$

Una vez se ha estudiado el problema de carga simétrica se estudia el problema anti-simétrico. Para ello se supone que toda la parte simétrica está en equilibrio, por lo que solo existen cargas anti-simétricas, provocadas por una deflexión β de los alerones. El ángulo de ataque será el obtenido por la deflexión de alerones, el inducido por la velocidad de balance p , y el generado por la deformación en torsión:

$$\alpha(y) = \frac{\partial \alpha^r}{\partial \beta} \cdot \beta - \frac{py}{U_\infty} + \theta(y) \quad (3.30)$$

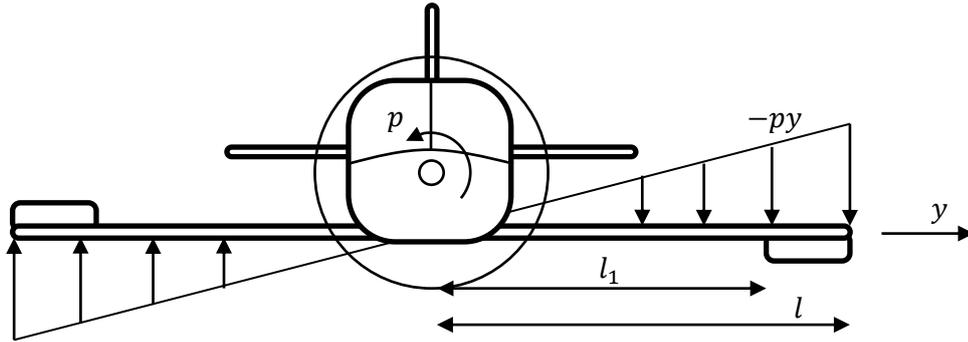


Figura 3.2: Velocidades inducidas por la velocidad de balance p .

Se aplican la misma ecuación de equilibrio y ecuaciones de contorno:

$$\frac{d}{dy} \left(GJ \cdot \frac{d\theta}{dy} \right) + t(y) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \theta'(l) = 0 \quad (3.31)$$

El momento torsor es, considerando sólo términos anti-simétricos:

$$t(y) = qcec_L^r + qc^2 \cdot c_{Mac\beta} \beta - Nmgd + qcec_L^e \quad (3.32)$$

Donde la sustentación rígida es a su vez:

$$c_L^r = c_{L\beta} \beta + c_{Lp} \cdot \frac{pl}{U_\infty}, \quad c_{Lp} = \frac{\partial c_L}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial (pl/U_\infty)} = c_{L\alpha} \cdot \left(-\frac{y}{l} \right) \quad (3.33)$$

Se están abreviando las derivadas de los coeficientes como:

$$c_{L\beta} = \frac{\partial c_L}{\partial \beta}, \quad c_{Lp} = \frac{\partial c_L}{\partial (pl/U_\infty)}, \quad c_{Mac\beta} = \frac{\partial c_{Mac}}{\partial \beta} \quad (3.34)$$

El factor de carga en el caso anti-simétrico se debe a la aceleración angular \dot{p} y varía linealmente con y . El peso y demás cargas simétricas se consideran en equilibrio:

$$N(y) = \frac{\dot{p}y}{g} \quad (3.35)$$

Sustituyendo todos estos valores en la ecuación diferencial queda:

$$\frac{d}{dy} \left(GJ \frac{d\theta}{dy} \right) + qcec_{L\alpha} \theta = -qcec_{L\beta} \beta - qcec_{Lp} \frac{pl}{U_\infty} - qc^2 c_{Mac\beta} \beta + \dot{p}y m d \quad (3.36)$$

Ahora existen dependencias con respecto a y no sólo en $\theta(y)$ como pasaba en el caso simétrico, sino también en el factor de carga y en los coeficientes aerodinámicos. Lo que se hace es simplificar considerando propiedades uniformes, y además se divide el ala en dos trozos, de forma que en la zona donde no hay alerón:

$$y < l_1 \Rightarrow c_{L\beta} = c_{Mac\beta} = 0 \quad (3.37)$$

La ecuación ahora se escribiría a trozos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2}\theta_1 + \lambda^2\theta_1 &= \frac{1}{GJ} \left(-qce \cdot c_{Lp} \frac{pl}{U_\infty} + \dot{p}ymd \right) \quad 0 \leq y \leq l_1 \quad l_1 < y \leq l \\ \frac{d^2}{dy^2}\theta_2 + \lambda^2\theta_2 &= \frac{1}{GJ} \left(-qce \cdot c_{L\beta}\beta - qce \cdot c_{Lp} \frac{pl}{U_\infty} - qc^2 \cdot c_{Mac\beta}\beta + \dot{p}ymd \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Con dos condiciones de continuidad adicionales en el salto $y = l_1$ para el giro y el momento:

$$\theta_1(l_1) = \theta_2(l_1), \quad \theta'_1(l_1) = \theta'_2(l_1) \quad (3.39)$$

Se ha considerado que el alerón llega al final del ala. Esto no tiene por qué ser así, aunque sería complicarlo mucho. No se hace aquí, pero desarrollando esta ecuación se llega a la solución:

$$\theta(y) = c_1\beta + c_2 \frac{pl}{U_\infty} + c_3\dot{p} \quad (3.40)$$

Donde:

$$\begin{aligned} c_1 &= -k_2 \left(l_a(1 - \cos(\lambda(y - l_1))) - \frac{\sin(\lambda(l - l_1))}{\cos(\lambda l)} \sin(\lambda y) \right) \\ c_2 &= \frac{y}{l} - \frac{\sin(\lambda y)}{\lambda l \cos(\lambda l)}, \quad c_3 = \frac{k_1}{\lambda^2} \left(y - \frac{\sin(\lambda y)}{\lambda \cos(\lambda l)} \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$k_1 = \frac{md}{GJ}, \quad k_2 = \frac{1}{ec_{L\alpha}} (ec_{L\beta} + cc_{Mac\beta}), \quad l_a = \begin{cases} 0 & 0 \leq y \leq l_1 \\ 1 & l_1 < y \leq l \end{cases}$$

De nuevo la solución depende del valor de N , y además ahora depende de la evolución temporal de p y \dot{p} . Por ello se proponen dos soluciones: el desplazamiento instantáneo del alerón y el tonel uniforme.

En el caso de desplazamiento instantáneo del alerón se estudia el instante inicial después de la deflexión de alerones, en el que se considera que $p = 0$ porque aún no ha tenido tiempo de aumentar, pero la aceleración \dot{p} sí se tiene en cuenta, y se considera constante.

El momento de balance es, considerando solo una semi-ala y multiplicando por 2:

$$\begin{aligned} I_x \dot{p} &= 2 \int_0^l qc c_{LY} dy = 2qc \int_0^l (c_{L\beta}\beta + c_{L\alpha}\theta) y dy = \\ &= 2qc \int_0^l (c_{L\beta}\beta + c_{L\alpha}(c_1\beta + c_3\dot{p})) y dy \end{aligned} \quad (3.42)$$

De aquí es posible obtener una expresión para \dot{p} :

$$\dot{p} = \frac{2qc \int_0^l (c_{L\beta} + c_{L\alpha}c_1)y dy}{I_x - 2qc \int_0^l c_{L\alpha}c_3y dy} \cdot \beta \quad (3.43)$$

En el caso del tonel uniforme se estudia justamente la situación contraria, en la que la velocidad angular p se ha estabilizado y se considera constante, y por lo tanto la aceleración angular debe anularse $\dot{p} = 0$. El momento de balance es:

$$\begin{aligned} I_x \dot{p} = 0 &= 2 \int_0^l qc c_{Lp} y dy = \\ &= 2qc \int_0^l \left(c_{L\beta} \beta + c_{Lp} \frac{pl}{U_\infty} + c_{L\alpha} \left(c_1 \beta + c_2 \frac{pl}{U_\infty} \right) \right) y dy \end{aligned} \quad (3.44)$$

La expresión que se obtiene para la velocidad angular es entonces:

$$\frac{pl}{U_\infty} = - \frac{\int_0^l (c_{L\beta} + c_{L\alpha}c_1)y dy}{\int_0^l (c_{Lp} + c_{L\alpha}c_2)y dy} \cdot \beta \quad (3.45)$$

El coeficiente que multiplica a β representa la efectividad del mando, la velocidad angular que se alcanza para una deflexión de alerones β . La inversión de mando se producirá cuando el valor de esta expresión se haga nulo. No se hace aquí, pero si se desarrolla se obtiene:

$$\frac{pl}{U_\infty} = \frac{\left(\frac{\cos \lambda l_1}{\cos \lambda l} - 1 \right) \frac{c_{L\beta}}{c_{L\alpha}} + \left(\frac{\cos \lambda l_1}{\cos \lambda l} - 1 - \lambda^2 \frac{l^2 - l_1^2}{2} \right) \frac{c_{Mac\beta}}{e c_{L\alpha}}}{1 - \frac{\tan \lambda l}{\lambda l}} \cdot \beta \quad (3.46)$$

Igualando el numerador a 0 se puede obtener el menor valor de λ que produzca la inversión de mando λ_R . Entonces, de la definición de λ , ecuación (3.9):

$$U_R = \lambda_R \sqrt{\frac{2GJ}{\rho_\infty c e \cdot c_{L\alpha}}} \quad (3.47)$$

Ahora que ya se ha estudiado la formulación diferencial, y se ha realizado un análisis cualitativo de la aeroelasticidad estática en alas, se desarrollará a continuación la formulación integral, mucho más práctica de cara a la realidad. Se empezará por el problema simétrico.

La base es el llamado coeficiente de influencia $C^{\theta\theta}(y, \eta)$, que representa el efecto que tiene un momento torsor unitario en una sección situada en el punto η , sobre la deformación en torsión de una sección situada en el punto y . Entonces el giro completo en esta sección y será:

$$\theta(y) = \int_0^l C^{\theta\theta}(y, \eta) \cdot t(\eta) d\eta \quad (3.48)$$

Donde se ha multiplicado el coeficiente de influencia por el momento torsor que está actuando en cada punto, ya que el coeficiente es para momentos unitarios. Este coeficiente de influencia se podría obtener de la ecuación diferencial aplicada para un momento unitario:

$$\frac{d}{dy} \left(GJ \frac{d\theta}{dy} \right) = -\delta(y - \eta), \quad \delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & \forall x \neq 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

Donde $\delta(x)$ es la delta de Dirac. Sustituyendo el momento aerodinámico $t(\eta)$:

$$\theta(y) = \int_0^l C^{\theta\theta}(y, \eta) \cdot (qcec_L^r + qcec_L^e + qc^2c_{Mac} - Nmgd) d\eta \quad (3.50)$$

Como siempre, para el estudio de la divergencia basta con el término elástico del momento:

$$\theta(y) = q \int_0^l C^{\theta\theta}(y, \eta) \cdot c(\eta) \cdot e(\eta) \cdot c_L^e(\eta) d\eta \quad (3.51)$$

Lo que se hace a continuación es lo que da a esta formulación el sentido práctico del que carece la formulación diferencial. Esta expresión puede discretizarse en m rebanadas, por lo que el giro en la rebanada situada en y_i se puede obtener como:

$$\theta(y_i) = q \sum_{j=1}^m C^{\theta\theta}(y_i, \eta_j) \cdot c(\eta_j) \cdot e(\eta_j) \cdot c_L^e(\eta_j) \cdot w_j \cdot \Delta\eta_j \quad (3.52)$$

Donde w_j representa una función de peso que determina la forma en la que se está realizando la integración. Por ejemplo, si se aplica la regla del trapecio $w_j = 1$. Tomará otros valores diferentes si se aplican reglas diferentes, como la regla de Simpson. En forma matricial:

$$\boldsymbol{\theta} = q \cdot (\mathbf{C}^{\theta\theta} \mathbf{e} \mathbf{w}) \mathbf{c} \mathbf{c}_L^e = q \cdot \mathbf{E} \mathbf{c} \mathbf{c}_L^e \quad (3.53)$$

Donde $\mathbf{C}^{\theta\theta}$ es la matriz $m \times m$ de coeficientes de influencia, \mathbf{e} es una matriz diagonal $m \times m$ con las distancias entre el centro aerodinámico y el eje elástico, y \mathbf{w} es la matriz $m \times m$ de pesos de integración, y si se trabaja con la regla del trapecio $\mathbf{w} = \mathbf{I}_m$. Por último, $\mathbf{c} \mathbf{c}_L^e$ es un vector columna $m \times 1$. La expresión $q \cdot \mathbf{E}$ es una relación estructural entre las fuerzas aerodinámicas y el giro de las rebanadas. La matriz \mathbf{E} se podría obtener aplicando un código de cálculo estructural. Interesa ahora encontrar la misma relación pero de forma aerodinámica. Para ello existen tres métodos diferentes.

El primero es el llamado método de las rebanadas, y es el más sencillo. Consiste en considerar que el ángulo de ataque elástico de cada rebanada sólo se ve influenciado por el giro, y que ninguna rebanada induce ángulo de ataque alguno sobre las demás. Por lo tanto la sustentación elástica de una rebanada será $c_{Li}^e = c_{L\alpha} \theta_i$, de donde se puede escribir, para todas las rebanadas, en forma matricial:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A} \mathbf{c} \mathbf{c}_L^e, \quad a_{ij} = \frac{1}{(c c_{L\alpha})_i} \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (3.54)$$

Donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, y por lo tanto \mathbf{A} es una matriz diagonal $m \times m$.

El segundo método es el método de la línea sustentadora, y se basa en la teoría de ala larga de Prandtl que se vio en la asignatura "Aerodinámica". En esta teoría se utilizaba una distribución de circulación a lo largo del ala $\Gamma(y)$ de forma que la sustentación se puede obtener como:

$$1/2 \cdot \rho_{\infty} U_{\infty}^2 c c_L = \rho_{\infty} U_{\infty} \Gamma \quad (3.55)$$

Para aplicar esta teoría se realiza el cambio de variable $y = l \cdot \cos \phi$ (habitualmente se usa la letra θ , aquí se usa ϕ para no confundirla con el giro), y se describe $\Gamma(y)$ en serie de senos:

$$\Gamma(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\phi, \quad \phi = \arccos\left(\frac{y}{l}\right) \quad (3.56)$$

Debido a las variaciones de circulación a lo largo de la envergadura, para conservar la circulación es necesario considerar hilos de torbellinos que se desprenden del ala.

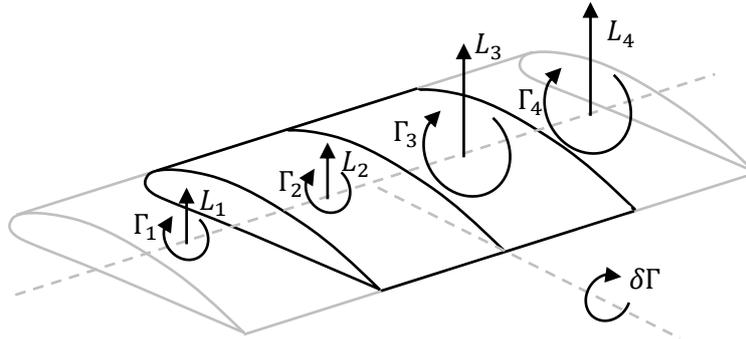


Figura 3.3: Desprendimiento de torbellinos.

Estos torbellinos que se desprenden interactúan con las rebanadas. Desarrollando esta teoría es posible encontrar la matriz \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \frac{1}{8l} \cdot \mathbf{S}' \mathbf{R}' \mathbf{T}' \quad (3.57)$$

Donde \mathbf{A}' es la misma matriz diagonal \mathbf{A} del método de las rebanadas, \mathbf{S}' es una matriz diagonal $m \times m$, \mathbf{R}' es una matriz $m \times m$ y \mathbf{T}' es una matriz $m \times m$:

$$s_{ij} = \frac{1}{\sin \phi_i} \delta_{ij}, \quad r_{ij} = (2j - 1) \sin((2j - 1)\phi_i), \quad t_{ij} = \sin((2j - 1)\phi_i) \quad (3.58)$$

Esta matriz \mathbf{A} es la misma que en el método de las rebanadas más otra matriz que representa la interacción de las diferentes rebanadas debido a los torbellinos que se desprenden.

El tercer y último método es el de la superficie sustentadora. Consiste en aplicar el método *vortex lattice*, o de entramado de torbellinos. El procedimiento es similar al método de paneles de herradura de torbellinos que se ve en "Aerodinámica avanzada", pero en el *vortex lattice* se discretiza el ala no sólo en m rebanadas, sino también en s porciones a lo largo de la cuerda, obteniendo un total de $m \times s$ paneles de herradura, tal y como se observa en la Figura 3.4.

El resto del método se desarrolla de forma muy similar a los paneles de herradura. Cada panel está formado por un hilo de torbellinos que pasa por $x = 1/4$ del largo del panel, y dos hilos de torbellinos que se desprenden formando la herradura. El punto de control de cada panel está centrado en y y situado en $x = 3/4$ del largo del panel. De este modo se cumple la condición de Kutta. Para obtener las circulaciones de cada herradura de torbellinos se impone velocidad nula en cada punto de control y se resuelve el sistema:

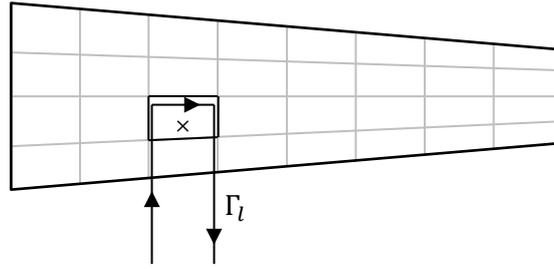


Figura 3.4: Esquema del método vortex lattice.

$$\mathbf{D}\mathbf{W}\mathbf{\Gamma} = \boldsymbol{\alpha} \quad (3.59)$$

Donde $\boldsymbol{\alpha}$ es un vector columna $ms \times 1$ con los ángulos de ataque locales de cada panel, $\mathbf{\Gamma}$ es otro vector columna $ms \times 1$ con el valor de la intensidad de cada herradura de torbellinos, y $\mathbf{D}\mathbf{W}$ es una matriz $ms \times ms$ que representa la velocidad normal, sobre cada punto de control, inducida por todos los paneles.

El problema con este método es que tiene en cuenta la variación de las características aerodinámicas a lo largo de la cuerda, pero con el modelo estructural que se ha elegido, sólo con rebanadas, esto no es así. Por ello los resultados del *vortex lattice* deben ser modificados para encajar con el modelo estructural. La ecuación (3.55) se sigue aplicando en este caso, pero lo que interesa es combinar los efectos de los s paneles de cada rebanada:

$$cc_{L_i}^e = \frac{2}{U_\infty} \sum_{l=i_1}^{i_s} \Gamma_l \quad (3.60)$$

Donde se está realizando la suma para la circulación de cada panel de la rebanada i . En forma discreta se puede escribir:

$$\frac{2}{U_\infty} \cdot \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{c}\mathbf{c}_L^e \quad (3.61)$$

Donde \mathbf{S} es una matriz que permite sumar las circulaciones de cada rebanada, de la forma:

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \ddots \end{array} \right] \quad (3.62)$$

Además, como la rebanada estructuralmente es de una pieza, hay que forzar que el ángulo de ataque de todos los paneles sea también el mismo. Esto se consigue mediante la expresión:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{S}^T \boldsymbol{\theta} \quad (3.63)$$

De este modo el ángulo de ataque de todos los paneles de una misma rebanada queda sustituido por el giro en el primer panel. Introduciendo esta expresión en la ecuación anterior:

$$\frac{2}{U_\infty} \cdot \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{W}^{-1} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\theta} = \mathbf{c}\mathbf{c}_L^e \quad (3.64)$$

De forma que finalmente se puede obtener la matriz \mathbf{A} por este tercer método:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{2}{U_\infty} \cdot \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{S}^T \right)^{-1} \quad (3.65)$$

Ya sea por uno de estos métodos, o por otro, como puede ser un cálculo de CFD, al final se obtiene la matriz \mathbf{A} que relaciona $\boldsymbol{\theta}$ y $\mathbf{c} \mathbf{c}_L^e$ en términos aerodinámicos, de la misma forma que la matriz estructural \mathbf{E} :

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A} \mathbf{c} \mathbf{c}_L^e, \quad \boldsymbol{\theta} = q \cdot \mathbf{E} \mathbf{c} \mathbf{c}_L^e \quad (3.66)$$

Por lo tanto se obtiene el problema homogéneo:

$$(\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E}) \mathbf{c} \mathbf{c}_L^e = \mathbf{0} \quad (3.67)$$

Y mediante un determinante se puede encontrar la velocidad de divergencia:

$$\det(\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E}) = 0 \Rightarrow q_D \Rightarrow U_D \quad (3.68)$$

De nuevo, igual que en el caso de la formulación diferencial, si se está por debajo de esta velocidad de divergencia interesa entonces averiguar el giro $\theta(y)$. De la ecuación (3.50), cuando antes se eliminaron todos los términos menos el elástico, ahora se mantendrán todos:

$$\theta(y) = \int_0^l C^{\theta\theta}(y, \eta) \cdot (q c e c_L^e + q c e c_L^r + q c^2 c_{Mac} - N m g d) d\eta \quad (3.69)$$

En forma discreta:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &= \mathbf{A} \mathbf{c} \mathbf{c}_L^e = q \cdot \mathbf{E} \mathbf{c} \mathbf{c}_L^e + q \cdot \mathbf{E} \mathbf{c} \mathbf{c}_L^r + q \cdot \mathbf{F} \mathbf{c}_{Mac} - N \cdot \mathbf{G} \mathbf{m} \mathbf{g} \\ &= q \cdot \mathbf{E} \mathbf{c} \mathbf{c}_L^e + \mathbf{f}^s \end{aligned} \quad (3.70)$$

Donde las matrices \mathbf{F} y \mathbf{G} son:

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}^{\theta\theta} \mathbf{c}^2 \mathbf{w}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{C}^{\theta\theta} \mathbf{d} \mathbf{w} \quad (3.71)$$

Finalmente el problema completo es:

$$(\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E}) \mathbf{c} \mathbf{c}_L^e = \mathbf{f}^s \quad (3.72)$$

Bueno, finalmente no. Igual que con la formulación diferencial, ahora queda determinar N . Se analizan las mismas posibilidades: N libre y N fijada por el piloto.

En el caso de N libre:

$$N = \frac{2q}{W} \int_0^l c c_L dy = \frac{2q}{W} \int_0^l (c c_L^r + c c_L^e) dy \quad (3.73)$$

Si se discretiza esta integral se obtiene:

$$N = \frac{2q}{W} \cdot (\mathbf{1} \mathbf{w} \mathbf{c} \mathbf{c}_L^r + \mathbf{1} \mathbf{w} \mathbf{c} \mathbf{c}_L^e), \quad \mathbf{1} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1] \quad (3.74)$$

Sustituyendo el valor de $\mathbf{c}c_L^e$ de la ecuación (3.72):

$$N = \frac{2q}{W} \cdot \mathbf{1} \mathbf{w} \left(\mathbf{c}c_L^r + (\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E})^{-1} (q \cdot \mathbf{E} \mathbf{c}c_L^r + q \cdot \mathbf{F} \mathbf{c}c_{Mac} - N \cdot \mathbf{G} \mathbf{m} \mathbf{g}) \right) \quad (3.75)$$

Ahora es posible sumar y restar $\mathbf{A} \mathbf{c}c_L^r$ dentro del paréntesis para que, combinado con el término $q \cdot \mathbf{E} \mathbf{c}c_L^r$, al multiplicar por $(\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E})^{-1}$ quede exactamente $-\mathbf{c}c_L^r$ y se cancele con el $\mathbf{c}c_L^r$ que ya hay fuera. De este modo queda:

$$N = \frac{2q}{W} \cdot \mathbf{1} \mathbf{w} (\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E})^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{c}c_L^r + q \cdot \mathbf{F} \mathbf{c}c_{Mac} - N \cdot \mathbf{G} \mathbf{m} \mathbf{g}) \quad (3.76)$$

La única información que ha quedado del ala rígida es el ángulo de ataque rígido:

$$\mathbf{A} \mathbf{c}c_L^r = \boldsymbol{\alpha}^r \quad (3.77)$$

Finalmente (ahora sí) es posible despejar N :

$$N = \frac{2q}{W} \cdot \frac{\mathbf{1} \mathbf{w} (\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E})^{-1} (\boldsymbol{\alpha}^r + q \cdot \mathbf{F} \mathbf{c}c_{Mac})}{1 + \frac{2q}{W} (\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E})^{-1} \mathbf{G} \mathbf{m} \mathbf{g}} \quad (3.78)$$

En el caso de N fijada por el piloto a un valor N_0 igual al inicial, rígido, se obtiene:

$$N = N_0 = \frac{2q}{W} \int_0^l c c_L dy = \frac{2q}{W} \int_0^l (c c_L^r + c c_L^e + c c_{L\alpha} \alpha_p) dy \quad (3.79)$$

Donde el piloto induce un ángulo de ataque α_p para mantener N constante e igual a:

$$N_0 = \frac{2q}{W} \int_0^l c c_L^r dy \quad (3.80)$$

Por lo tanto:

$$\int_0^l (c c_L^e + c c_{L\alpha} \alpha_p) dy = 0 \quad (3.81)$$

Discretizando esta integral se tiene:

$$\mathbf{1} \mathbf{w} \mathbf{c}c_L^e + \mathbf{1} \mathbf{w} \mathbf{c}c_{L\alpha} \cdot \alpha_p = \mathbf{0} \quad (3.82)$$

Y finalmente despejando α_p :

$$\alpha_p = - \frac{\mathbf{1} \mathbf{w} \mathbf{c}c_L^e}{\mathbf{1} \mathbf{w} \mathbf{c}c_{L\alpha}} \quad (3.83)$$

Con el valor de N de la ecuación (3.78), o bien el valor de α_p de la ecuación (3.83) que permite encontrar el valor de N , ya es posible cerrar el problema simétrico de la ecuación (3.72).

Para estudiar el problema anti-simétrico de la Figura 3.2 se vuelve a la formulación integral para el giro de la ecuación (3.48), y se aplica el momento torsor teniendo en cuenta únicamente los términos anti-simétricos, ecuación (3.32), con lo que, sustituyendo también el valor de c_L^r de la ecuación (3.33) y del factor de carga $N = \dot{p}y/g$, ecuación (3.35), se obtiene:

$$\theta(y) = \int_{-0}^l C^{\theta\theta}(y, \eta) \left(q c e \left(c_{L\beta} \beta + c_{Lp} \frac{pl}{U_\infty} \right) + q c^2 c_{Mac\beta} \beta - m \dot{p} \eta d + q c e c_L^e \right) d\eta \quad (3.84)$$

Se recuerda que se han abreviado las derivadas de los coeficientes como:

$$c_{L\beta} = \frac{\partial c_L}{\partial \beta}, \quad c_{Lp} = \frac{\partial c_L}{\partial (pl/U_\infty)}, \quad c_{Mac\beta} = \frac{\partial c_{Mac}}{\partial \beta} \quad (3.85)$$

Discretizando en m rebanadas se puede escribir la ecuación (3.84) en forma matricial:

$$\boldsymbol{\theta} = q \cdot \mathbf{E} \mathbf{c} \mathbf{c}_L^e + q \cdot \mathbf{E} \left(\mathbf{c} \mathbf{c}_{L\beta} \cdot \beta + \mathbf{c} \mathbf{c}_{Lp} \cdot \frac{pl}{U_\infty} \right) + q \cdot \mathbf{F} \mathbf{c}_{Mac\beta} \cdot \beta - \mathbf{G} \boldsymbol{\eta} \mathbf{m} \cdot \dot{p} \quad (3.86)$$

Donde $\boldsymbol{\eta}$ es una matriz diagonal $m \times m$ con las posiciones de cada rebanada, $\mathbf{c} \mathbf{c}_{L\beta}$, $\mathbf{c} \mathbf{c}_{Lp}$ y $\mathbf{c}_{Mac\beta}$ son vectores columna $m \times 1$, y las matrices \mathbf{E} , \mathbf{F} y \mathbf{G} son:

$$\mathbf{E} = \mathbf{C}^{\theta\theta} \mathbf{e} \mathbf{w}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{C}^{\theta\theta} \mathbf{c}^2 \mathbf{w}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{C}^{\theta\theta} \mathbf{d} \mathbf{w} \quad (3.87)$$

Donde \mathbf{e} , \mathbf{c}^2 y \mathbf{d} son matrices diagonales $m \times m$ y \mathbf{w} es la matriz de pesos de integración. De nuevo se pueden agrupar los términos rígidos:

$$\boldsymbol{\theta} = q \cdot \mathbf{E} \mathbf{c} \mathbf{c}_L^e + \mathbf{f}^a \quad (3.88)$$

Llegado este punto hay que volver a encontrar la matriz \mathbf{A} que relaciona el giro $\boldsymbol{\theta}$ y la sustentación elástica $\mathbf{c} \mathbf{c}_L^e$ de forma aerodinámica, mediante uno de los tres métodos que se han descrito antes, o con algún código de CFD. Combinando ambas expresiones se llega a la misma solución que en el caso simétrico (pero con matrices distintas):

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A} \mathbf{c} \mathbf{c}_L^e \Rightarrow (\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E}) \mathbf{c} \mathbf{c}_L^e = \mathbf{f}^a \quad (3.89)$$

Para que se produzca la divergencia el siguiente determinante deberá anularse:

$$\det(\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E}) = 0 \rightarrow q_D \quad (3.90)$$

Si se está por debajo de la velocidad de divergencia interesará obtener \mathbf{f}^a . Pero dentro aparecen el factor de carga N y la velocidad angular p . Por ello hay que considerar de nuevo los casos de desplazamiento instantáneo del alerón y de tonel uniforme. En el primero se considera $p = 0$ y \dot{p} constante. Considerando una semi-ala y multiplicando por 2, la ecuación de momento de balance queda:

$$I_x \dot{p} = 2 \int_0^l q c c_{Ly} dy = 2q \int_0^l (c c_{L\beta} \beta + c c_L^e) y dy \quad (3.91)$$

En forma matricial:

$$I_x \dot{p} = 2q \mathbf{y} \mathbf{w} (\mathbf{c} \mathbf{c}_{L\beta} \cdot \beta + \mathbf{c} \mathbf{c}_L^e) \quad (3.92)$$

Donde \mathbf{y} es un vector fila con las posiciones de cada rebanada. Combinando $\mathbf{y} \mathbf{w} = \mathbf{H}$, que será también un vector fila, y sustituyendo $\mathbf{c} \mathbf{c}_L^e$, queda:

$$I_x \dot{p} = 2q \mathbf{H} \left(\mathbf{c} \mathbf{c}_{L\beta} \beta + (\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E})^{-1} (q \mathbf{E} \mathbf{c} \mathbf{c}_{L\beta} \beta + q \cdot \mathbf{F} \mathbf{c}_{Mac\beta} \beta - \mathbf{G} \boldsymbol{\eta} \mathbf{m} \cdot \dot{p}) \right) \quad (3.93)$$

De donde se puede despejar el valor de \dot{p} :

$$\dot{p} = \frac{2q \mathbf{H} \left(\mathbf{c} \mathbf{c}_{L\beta} \beta + (\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E})^{-1} (q \mathbf{E} \mathbf{c} \mathbf{c}_{L\beta} \beta + q \cdot \mathbf{F} \mathbf{c}_{Mac\beta} \beta) \right)}{I_x + 2q \mathbf{H} (\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E})^{-1} \mathbf{G} \boldsymbol{\eta} \mathbf{m}} \quad (3.94)$$

Para el caso del tonel uniforme se procede del mismo modo, pero con $\dot{p} = 0$ y p constante. La ecuación del momento de balance queda:

$$I_x \dot{p} = 0 = 2 \int_0^l q c c_{Lp} y dy = 2q \int_0^l \left(c c_{L\beta} \beta + c c_{Lp} \frac{pl}{U_\infty} + c c_L^e \right) y dy \quad (3.95)$$

En forma matricial:

$$0 = \mathbf{H} \left(\mathbf{c} \mathbf{c}_{L\beta} \beta + \mathbf{c} \mathbf{c}_{Lp} \frac{pl}{U_\infty} + (\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E})^{-1} \left(q \mathbf{E} \left(\mathbf{c} \mathbf{c}_{L\beta} \beta + \mathbf{c} \mathbf{c}_{Lp} \frac{pl}{U_\infty} \right) + q \mathbf{F} \mathbf{c}_{Mac\beta} \beta \right) \right) \quad (3.96)$$

Y despejando:

$$\frac{pl}{U_\infty} = - \frac{\mathbf{H} \mathbf{c} \mathbf{c}_{L\beta} + \mathbf{H} (\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E})^{-1} (q \cdot \mathbf{E} \mathbf{c} \mathbf{c}_{L\beta} + q \cdot \mathbf{F} \mathbf{c}_{Mac\beta})}{\mathbf{H} \mathbf{c} \mathbf{c}_{Lp} + \mathbf{H} (\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E})^{-1} (q \cdot \mathbf{E} \mathbf{c} \mathbf{c}_{Lp})} \cdot \beta \quad (3.97)$$

Ahora es posible sumar y restar $\mathbf{A} \mathbf{c} \mathbf{c}_{L\beta}$ dentro del paréntesis del numerador para que, combinado con el término $q \cdot \mathbf{E} \mathbf{c} \mathbf{c}_{L\beta}$, al multiplicar por $\mathbf{H} (\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E})^{-1}$ quede exactamente $-\mathbf{H} \mathbf{c} \mathbf{c}_{L\beta}$ y se cancele con el $\mathbf{H} \mathbf{c} \mathbf{c}_{L\beta}$ que ya hay fuera. Lo mismo se puede hacer con $\mathbf{c} \mathbf{c}_{Lp}$ en el denominador, quedando entonces:

$$\frac{pl}{U_\infty} = - \frac{\mathbf{H} (\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E})^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{c} \mathbf{c}_{L\beta} + q \cdot \mathbf{F} \mathbf{c}_{Mac\beta})}{\mathbf{H} (\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E})^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{c} \mathbf{c}_{Lp})} \cdot \beta \quad (3.98)$$

Además, $\mathbf{A} \mathbf{c} \mathbf{c}_{L\beta} = \boldsymbol{\alpha}_\beta^r$ es el ángulo de ataque inducido por una deflexión de alerones $\beta = 1$ rad. De forma similar $\mathbf{A} \mathbf{c} \mathbf{c}_{Lp} = \mathbf{y}/l$ es el ángulo de ataque inducido por una velocidad angular $p = 1$ rad/s, donde \mathbf{y}/l es un vector columna. Entonces:

$$\frac{pl}{U_\infty} = - \frac{\mathbf{H} (\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E})^{-1} (\boldsymbol{\alpha}_\beta^r + q \cdot \mathbf{F} \mathbf{c}_{Mac\beta})}{\mathbf{H} (\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E})^{-1} (\mathbf{y}/l)} \cdot \beta \quad (3.99)$$

Para que se produzca la inversión de mando el numerador deberá anularse:

$$\mathbf{H} (\mathbf{A} - q \cdot \mathbf{E})^{-1} (\boldsymbol{\alpha}_\beta^r + q \cdot \mathbf{F} \mathbf{c}_{Mac\beta}) = 0 \quad (3.100)$$

Esto es posible resolverlo por iteración:

$$q_R^{n+1} = - \frac{\mathbf{H} (\mathbf{A} - q_R^n \cdot \mathbf{E})^{-1} \boldsymbol{\alpha}_\beta^r}{\mathbf{H} (\mathbf{A} - q_R^n \cdot \mathbf{E})^{-1} \mathbf{F} \mathbf{c}_{Mac\beta}} \quad (3.101)$$

Con esto termina la aeroelasticidad estática de alas rectas. Se han visto el problema simétrico y el anti-simétrico, aplicando la formulación diferencial y la integral. No se han visto alas con flecha porque los centros de cortadura de las secciones no están alineados, no hay eje elástico, y aparece acoplamiento con el movimiento de flexión, lo que complica mucho el análisis.

Tema 11. Flameo en alas de gran alargamiento.

Se estudiará en este tema el movimiento de flameo lineal en torsión y flexión de alas rectas o con flecha. En el caso del flameo lineal, al contrario que en el caso de la aeroelasticidad estática, no tiene mucha importancia si el ala tiene flecha o no, porque a través de los términos de inercia habrá acoplamiento entre flexión y torsión igualmente.

Se definen de inicio las siguientes variables:

- Masa por unidad de envergadura: $m(y)$
- Posición del eje elástico en el eje x : $a(y)$
- Momento de inercia respecto al eje elástico: $I_\alpha(y)$
- Momento estático respecto al eje elástico: $S_\alpha(y)$
- Rigidez a flexión: $EI(y)$
- Rigidez a torsión: $GJ(y)$
- Desplazamiento vertical del eje elástico, positivo hacia arriba: $w(y, t)$
- Giro respecto al eje elástico, positivo si el borde de ataque sube: $\theta(y, t)$

El problema que se considera es el flameo de un ala en flexión y torsión con un perfil sin alerón y sin tener en cuenta la disipación estructural. Las ecuaciones de una viga son:

$$\begin{aligned} \text{Flexión:} \quad m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - S_\alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= L(y, t) \\ \text{Torsión:} \quad I_\alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - S_\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(GJ \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) &= M_\alpha(y, t) \end{aligned} \quad (3.102)$$

Puede comprobarse que el momento estático S_α produce el acoplamiento de torsión y flexión. Para que no se produjera el acoplamiento el eje elástico y el centro de masas deberían coincidir. Además se ve cómo, al considerar régimen estático, se recupera la ecuación (3.1).

La ecuación de flexión tiene términos de orden 4, y la ecuación en torsión tiene términos de orden 2, por lo que hacen falta 6 condiciones de contorno. En el empotramiento no puede haber desplazamiento ni giro, y tampoco derivada del desplazamiento:

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad \theta(0) = 0 \quad (3.103)$$

Mientras que en el extremo libre no puede haber ni esfuerzo torsor, ni flector, ni cortante:

$$GJ\theta'(l) = 0, \quad EIw''(l) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} (EIw''(l)) = 0 \quad (3.104)$$

Lo que se hará a continuación es similar a lo que se hizo en el Tema 3 para el flameo en perfiles: primero se plantea el problema desde el punto de vista estructural, para después analizar las fuerzas aerodinámicas. Este sistema de ecuaciones no se va a manejar directamente. Lo que se hará es obtener un número de modos propios para la estructura y suponer que el movimiento será una superposición de los mismos. Después se calculará la energía cinética y la energía potencial asociada a ese movimiento y se obtendrán las ecuaciones de Lagrange. No se tendrá en cuenta el amortiguamiento.

Existen tres tipos de modos propios diferentes con los que se puede analizar el problema. Cada uno de los tipos de modos propios tiene sus utilidades. Estos modos son:

1. Modos normales acoplados:

Son los modos propios reales de la estructura en vacío. Se podrían obtener experimentalmente al hacer vibrar libremente a la estructura en el vacío, aunque las fuerzas aerodinámicas que produciría el movimiento de vibración serían muy pequeñas si el ensayo se realizara en atmósfera. También se pueden obtener aplicando el método de los elementos finitos (FEM), lo que es preferible porque experimentalmente el amortiguamiento es muy complicado de tratar. Al tratarse de modos de vibración reales habrá acoplamiento entre torsión y flexión.

2. Modos normales desacoplados:

Son los modos que tendría teóricamente la estructura en vacío si su momento estático S_α fuera nulo. Pueden obtenerse aplicando FEM de forma especial para anular el momento estático. Los modos que se obtienen están desacoplados en flexión y torsión.

3. Modos ficticios o asumidos:

Igual que se hace para las palas de un helicóptero en la asignatura “Diseño de helicópteros y aeronaves diversas”, se trata de suponer unos modos propios, por ejemplo polinómicos, que cumplan las condiciones de contorno. Para realizar un análisis detallado este método no es correcto, harían falta muchos modos para representar adecuadamente el movimiento, y además no se obtendría información de los modos reales. Pero es muy útil para un análisis preliminar, si se tiene una idea de cómo se va a entrar en flameo, y además tiene la ventaja de que se puede añadir un modo propio al alerón. Normalmente se asumen modos desacoplados.

Se estudia primero el caso de los modos normales acoplados. Estos modos serán de la forma:

$$\phi_i(x, y) = h_i(y) - (x - a(y))\theta_i(y) \quad (3.105)$$

Donde ϕ_i representa el movimiento vertical del modo en toda la superficie alar, y h_i y θ_i no son modos propios, sino que son la parte de flexión y la parte de torsión respectivamente de estos modos normales acoplados. Como ya se ha comentado, estos modos se obtendrían preferiblemente utilizando un código FEM.

El movimiento vertical del ala será entonces combinación lineal por superposición de los n modos que se utilicen, del entorno de los 10 ó 20 primeros, aunque hay infinitos modos.

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x, y) \cdot \xi_i(t) \quad (3.106)$$

Donde ξ_i representa el peso o amplitud de cada uno de los modos en el movimiento global. La energía cinética debida a este movimiento se puede obtener como:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-b(y)}^{b(y)} \dot{w}^2(x, y) dm = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-b}^b \rho(x, y) \left(\sum_{i=1}^n \phi_i(x, y) \cdot \dot{\xi}_i(t) \right)^2 dx dy \quad (3.107)$$

Ahora se puede aprovechar la propiedad de que los modos naturales de la estructura son ortogonales entre ellos. Según esta propiedad, al integrar en toda la estructura dos modos diferentes se obtiene que el valor de la integral es cero.

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_{-b}^b \rho \phi_i \phi_j \, dx \, dy = \\ & = \int_0^l (mh_i h_j - S_\alpha (h_i \theta_j + h_j \theta_i) + I_\alpha \theta_i \theta_j) \, dy = 0, \quad \forall i \neq j \end{aligned} \quad (3.108)$$

Al elevar al cuadrado la velocidad vertical \dot{w}^2 en la ecuación de la energía cinética lo que quedará es precisamente la suma de todas las combinaciones de productos de modos:

$$\left(\sum_{i=1}^n \phi_i(x, y) \cdot \dot{\xi}_i(t) \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\phi_i \dot{\xi}_i) \cdot (\phi_j \dot{\xi}_j) \quad (3.109)$$

Pero dado que los sumandos con $i \neq j$ se anularán por la propiedad de ortogonalidad, finalmente quedarán sólo los términos con $i = j$, por lo que la energía cinética T será:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-b}^b \rho \left(\sum_{i=1}^n \phi_i^2 \dot{\xi}_i^2 \right) \, dx \, dy \quad (3.110)$$

Se puede definir entonces la masa generalizada de cada modo M_i como:

$$M_i = \int_0^l \int_{-b}^b \rho \phi_i^2 \, dx \, dy = \int_0^l (mh_i^2 - 2S_\alpha h_i \theta_i + I_\alpha \theta_i^2) \, dy \quad (3.111)$$

De este modo la energía cinética queda finalmente, para el caso de los modos acoplados:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \dot{\xi}_i^2 \quad (3.112)$$

Gracias a que los modos están acoplados en flexión y torsión, la expresión para la energía cinética aparece sin acoplamiento, es decir, sin términos con modos cruzados. Se puede proceder de la misma manera para obtener la energía potencial, donde la propiedad de ortogonalidad en rigidez indica que:

$$\int_0^l (EI h_i'' h_j'' + GJ \theta_i' \theta_j') \, dy = 0, \quad \forall y \neq j \quad (3.113)$$

Se puede definir entonces una rigidez generalizada B_i , que además se puede escribir como producto de la masa generalizada M_i por la frecuencia propia del modo ω_i^2 al cuadrado, de forma que la energía potencial U queda:

$$B_i = M_i \omega_i^2 = \int_0^l (EI h_i''^2 + GJ \theta_i'^2) \, dy, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \omega_i^2 \xi_i^2 \quad (3.114)$$

Como se puede ver, la energía potencial queda también desacoplada.

A continuación se realiza el mismo desarrollo pero para los modos normales desacoplados. Para este procedimiento se tendrán en cuenta dos tipos de modos propios, n de flexión h_i y m de torsión θ_i . A diferencia de los modos normales acoplados donde representaban las dos partes de un mismo modo acoplado, en este caso h_i y θ_i son dos modos independientes. Cada uno de estos modos desacoplados tendrá una contribución diferente al movimiento vertical.

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n h_i(y) \xi_i(t) - (x - a(y)) \sum_{j=1}^m \theta_j(y) \eta_j(t) \quad (3.115)$$

Por la forma de obtener los modos normales desacoplados, como si se tratasen de los modos reales pero forzando $S_\alpha = 0$, se puede asumir que los modos de flexión h_i presentarán ortogonalidad entre ellos, y también los modos de torsión θ_i serán ortogonales entre sí. Sin embargo, no se podrá considerar que los modos h_i y θ_i sean ortogonales.

$$\begin{aligned} \int_0^l m h_i h_j &= 0 & \int_0^l I_\alpha \theta_i \theta_j &= 0 \\ \int_0^l EI h_i'' h_j'' &= 0 & \int_0^l GJ \theta_i' \theta_j' &= 0 \end{aligned} \quad \forall i \neq j \quad (3.116)$$

La energía cinética T será en este caso:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-b(y)}^{b(y)} \rho(x, y) \dot{w}^2(x, y) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-b(y)}^{b(y)} \rho(x, y) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (h_i h_j \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j) + \right. \\ &\quad \left. + (x - a)^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\theta_i \theta_j \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j) - \right. \\ &\quad \left. - 2(x - a) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (h_i \theta_j \dot{\xi}_i \dot{\eta}_j) \right) dx dy \end{aligned} \quad (3.117)$$

Al aplicar la ortogonalidad a las dos primeras sumas los términos con $i \neq j$ se desvanecerán, mientras que en la tercera suma se conservarán todos los términos. Definiendo:

$$M_i = \int_0^l m h_i^2 dy, \quad I_{\alpha i} = \int_0^l I_\alpha \theta_i^2 dy, \quad S_{\alpha ij} = \int_0^l S_\alpha h_i \theta_j dy \quad (3.118)$$

Entonces la energía cinética queda:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \dot{\xi}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m I_{\alpha j} \dot{\eta}_j^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m S_{\alpha ij} \dot{\xi}_i \dot{\eta}_j \quad (3.119)$$

Esta expresión es muy similar a la obtenida para los modos normales acoplados, donde todos los términos aparecían combinados en la masa generalizada. La diferencia es que el tercer término presenta acoplamiento en la expresión de la energía, mientras que antes el acoplamiento ya estaba incluido en la masa, y la energía aparecía desacoplada.

Para la energía potencial U , como en la ecuación no aparecen términos acoplados, aunque no haya ortogonalidad para los modos cruzados, no aparece acoplamiento. Definiendo:

$$K_{hi} = M_i \omega_{hi}^2 = \int_0^l EI h_i'^2 dy, \quad K_{\alpha i} = I_{\alpha r} \omega_{\alpha r}^2 = \int_0^l GJ \theta_i'^2 dy \quad (3.120)$$

Entonces la energía potencial queda:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n K_{hi} \xi_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m K_{\alpha j} \eta_j^2 \quad (3.121)$$

Las $n + m$ ecuaciones de Lagrange para el caso de los modos normales desacoplados quedan:

$$\begin{aligned} \xi_i: \quad & M_i \ddot{\xi}_i - \sum_{r=1}^m S_{\alpha ir} \ddot{\eta}_r + K_{hi} \xi_i = Q_{\xi i} \quad i \in [1, n] \\ \eta_r: \quad & I_{\alpha r} \ddot{\eta}_r - \sum_{i=1}^n S_{\alpha ir} \ddot{\xi}_i + K_{\alpha r} \eta_r = Q_{\eta r} \quad r \in [1, m] \end{aligned} \quad (3.122)$$

En el caso de los modos normales acoplados la ecuación se simplifica, pero hay que recordar que además de los modos, las masas generalizadas también están acopladas:

$$\xi_i: \quad M_i (\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i) = Q_{\xi i} \quad i \in [1, n] \quad (3.123)$$

Se desarrolla en forma matricial la ecuación para los modos desacoplados, que es más compleja. El desarrollo para la formulación con modos acoplados sería idéntico:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_i & -\mathbf{S}_{\alpha ir} \\ -\mathbf{S}_{\alpha ir}^T & \mathbf{I}_{\alpha r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\xi}} \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{hi} & \\ & \mathbf{K}_{\alpha r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\xi i} \\ \mathbf{Q}_{\eta r} \end{bmatrix} = q_{\infty} \mathbf{Q}(t) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

Donde \mathbf{M} es la matriz diagonal $n \times n$ de masas generalizadas, \mathbf{I}_{α} es la matriz diagonal $m \times m$ de momentos de inercia generalizados, \mathbf{S}_{α} es la matriz de momentos estáticos $m \times n$, \mathbf{K}_h y \mathbf{K}_{α} son matrices diagonales de rigidez a flexión $n \times n$, y torsión $m \times m$ respectivamente (por lo que la matriz de rigidez de todo el sistema también es diagonal), $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}$ son los vectores columna de las amplitudes de los modos a flexión $n \times 1$ y a torsión $m \times 1$ respectivamente, \mathbf{Q}_{ξ} y \mathbf{Q}_{η} son vectores columna de las fuerzas generalizadas de flexión $n \times 1$ y de torsión $m \times 1$ respectivamente, y \mathbf{Q} es una matriz $(n + m) \times (n + m)$ que representa los coeficientes de las fuerzas generalizadas con respecto a los grados de libertad. Estas fuerzas generalizadas se obtienen del principio de los trabajos virtuales, igual que para el perfil:

$$Q_{\xi i} = q_{\infty} \iint_{S_w} \Delta c_p(x, y, t) \cdot \frac{\partial(\delta W)}{\partial(\delta \xi_i)} dx dy \quad (3.125)$$

En el caso de modos acoplados la derivada $\partial(\delta W)/\partial(\delta \xi_i)$ es directamente ϕ_i , mientras que para los modos desacoplados se tiene:

$$Q_{\xi i} = q_{\infty} \iint_{S_w} \Delta c_p \cdot h_i dx dy, \quad Q_{\eta r} = q_{\infty} \iint_{S_w} \Delta c_p \cdot (-(x - a)) \theta_r dx dy \quad (3.126)$$

Por último se considera el caso de los modos ficticios o asumidos. El procedimiento es el mismo que el que se ve en la asignatura “Diseño de helicópteros y aeronaves diversas” para la vibración de las palas de un helicóptero. Se asumen unas funciones $f_i(y)$ para los modos en flexión, y $g_j(y)$ para los modos de torsión. Se asumirá además un modo de deflexión para un alerón rígido, aunque podrían asumirse más modos. La velocidad vertical según estos modos ficticios es entonces:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n f_i(y) \xi_i(t) - (x - a(y)) \sum_{j=1}^m g_j(y) \eta_j(t) - (x - c(y)) \lambda(y) \beta(t) \quad (3.127)$$

Donde se ha supuesto que $c = e$, es decir, que el eje de giro del alerón está en la charnela. Como el alerón es rígido la velocidad vertical sólo depende de x según la posición del eje de giro, y en y de la posición del alerón respecto a la envergadura, a través de la función λ :

$$\lambda(y) = \begin{cases} 0 & y < l_1 \\ 1 & l_1 \leq y \leq l_2 \\ 0 & y > l_2 \end{cases} \quad (3.128)$$

Utilizando modos ficticios se ahorra tener el estudio de FEM para obtener los modos propios. Pero para hacer un buen análisis harían falta más modos ficticios que los necesarios si se utilizaran modos reales. Sin embargo normalmente se utilizan incluso menos, porque este tipo de estudio se usa en diseños preliminares, si se tiene una idea aproximada de los modos. Para que los modos ficticios sean válidos las funciones f_i y g_j deberán cumplir las condiciones de contorno de las ecuaciones (3.103) y (3.104).

Con la expresión de la velocidad vertical ya se puede obtener la energía cinética:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \iint_{S_w} \rho \dot{w}^2 \, dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{S_w} \rho \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (f_i f_j \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j) + (x - a)^2 \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m (g_r g_s \dot{\eta}_r \dot{\eta}_s) + \right. \\ &\quad \left. + (x - c)^2 \lambda \dot{\beta}^2 - 2(x - a) \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m (f_i g_r \dot{\xi}_i \dot{\eta}_r) - \right. \\ &\quad \left. - 2\lambda(x - c) \sum_{i=1}^n (f_i \dot{\xi}_i \dot{\beta}) + 2\lambda(x - a)(x - c) \sum_{r=1}^m (g_r \dot{\eta}_r \dot{\beta}) \right) dx dy \end{aligned} \quad (3.129)$$

Si se integra en x se obtienen las distribuciones de masas, momentos estáticos y de inercia:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^l \left(m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (f_i f_j \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j) + I_\alpha \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m (g_r g_s \dot{\eta}_r \dot{\eta}_s) + I_\beta \lambda \dot{\beta}^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2S_\alpha \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m (f_i g_r \dot{\xi}_i \dot{\eta}_r) - 2\lambda S_\beta \sum_{i=1}^n (f_i \dot{\xi}_i \dot{\beta}) + 2\lambda P_{\alpha\beta} \sum_{r=1}^m (g_r \dot{\eta}_r \dot{\beta}) \right) dy \end{aligned} \quad (3.130)$$

Donde $P_{\alpha\beta}$ es un producto de inercia.

Al integrar en y estas distribuciones junto con las funciones de los modos ficticios se obtienen las masas, momentos estáticos, momentos de inercia y productos de inercia generalizados:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (M_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m (I_{ars} \dot{\eta}_r \dot{\eta}_s) + I_{\beta\beta} \cdot \dot{\beta}^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m (S_{air} \dot{\xi}_i \dot{\eta}_r) - \sum_{i=1}^n (S_{\beta i} \dot{\xi}_i \dot{\beta}) + \sum_{r=1}^m (P_{\alpha\beta r} \dot{\eta}_r \dot{\beta}) \quad (3.131)$$

En este caso no hay ortogonalidad entre los modos ficticios, por lo que no se cancela ningún término y la matriz de masas estará completamente llena. Para la energía potencial se tiene:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\sum_{i=1}^n f_i'' \xi_i \right)^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^l GJ \left(\sum_{r=1}^m g_r' \eta_r \right)^2 dy + \frac{1}{2} k_{\beta} \beta^2 \quad (3.132)$$

En la energía potencial no existe acoplamiento entre flexión y torsión por la propia física del problema, pero sí que hay acoplamiento de los diferentes modos de flexión entre ellos, y también de los diferentes modos de torsión entre ellos. En forma generalizada:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{hij} \xi_i \xi_j + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m K_{ars} \eta_r \eta_s + \frac{1}{2} k_{\beta} \beta^2 \quad (3.133)$$

Y si se aplican las ecuaciones de Lagrange se obtiene el un sistema de $n + m + 1$ ecuaciones:

$$\begin{aligned} \xi_i: \quad & \sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{\xi}_j - \sum_{r=1}^m S_{air} \ddot{\eta}_r - S_{\beta i} \ddot{\beta} + \sum_{j=1}^n K_{hij} \xi_j = Q_{\xi i} \quad i \in [1, n] \\ \eta_r: \quad & \sum_{s=1}^m I_{ars} \ddot{\eta}_s - \sum_{i=1}^n S_{air} \ddot{\xi}_i + P_{\alpha\beta r} \ddot{\beta} + \sum_{s=1}^m K_{ars} \eta_s = Q_{\eta r} \quad r \in [1, m] \\ \beta: \quad & I_{\beta\beta} \ddot{\beta} - \sum_{i=1}^n S_{\beta i} \ddot{\xi}_i + \sum_{r=1}^m P_{\alpha\beta r} \ddot{\eta}_r + K_{\beta} \beta = Q_{\beta} \end{aligned} \quad (3.134)$$

Donde las expresiones para las fuerzas generalizadas son:

$$\begin{aligned} Q_{\xi i} &= q_{\infty} \iint_{S_w} \Delta c_p(x, y, t) f_i(y) dx dy \\ Q_{\eta r} &= q_{\infty} \iint_{S_w} \Delta c_p(x, y, t) (-(x - a(y))) g_r(y) dx dy \\ Q_{\beta} &= q_{\infty} \iint_{S_w} \Delta c_p(x, y, t) (-(x - c(y))) \lambda(y) dx dy \end{aligned} \quad (3.135)$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ij} & -\mathbf{S}_{air} & -\mathbf{S}_{\beta i} \\ -\mathbf{S}_{air}^T & \mathbf{I}_{ars} & \mathbf{P}_{\alpha\beta r} \\ -\mathbf{S}_{\beta i}^T & \mathbf{P}_{\alpha\beta r}^T & I_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{hij} & & \\ & \mathbf{K}_{ars} & \\ & & k_{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\xi i} \\ \mathbf{Q}_{\eta r} \\ Q_{\beta} \end{bmatrix} = q_{\infty} \mathbf{Q}_{ij}(k) \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \beta \end{bmatrix} \quad (3.136)$$

Esta expresión tiene la misma forma que la ecuación (3.124) para los modos desacoplados, aunque las definiciones de las matrices son diferentes. En concreto $\mathbf{S}_{\beta i}$ y $\mathbf{P}_{\alpha \beta r}$ representan vectores columna $n \times 1$ y $m \times 1$ respectivamente, y el término $I_{\beta \beta}$ es un escalar, la inercia generalizada resultante de integrar $I_{\beta} \lambda$ en y , porque sólo se usa un grado de libertad para el alerón.

Una vez se ha escrito el sistema compuesto por las ecuaciones de Lagrange para cada grado de libertad hay que encontrar las fuerzas generalizadas, para lo que es necesario encontrar la expresión del coeficiente de presión Δc_p .

Tema 12. Flujo incompresible no estacionario en torno a alas deformables.

El cálculo de fuerzas aerodinámicas se verá muy por encima porque en concepto es lo mismo que ya se ha desarrollado para perfiles en el Tema 4 y el Tema 5, y para aeroelasticidad estática de alas del Tema 10. De nuevo existen tres métodos para calcular las fuerzas aerodinámicas: el método de las rebanadas, la teoría de la línea sustentadora y el método de la superficie sustentadora.

El método de las rebanadas consiste en utilizar cualquiera de las soluciones no estacionarias que se han visto en el Tema 4 y el Tema 5 para el perfil, como por ejemplo el coeficiente de presión de Theodorsen, ecuación (2.96). Esta solución se aplica para el ala completa, dividida en rebanadas, y considerando que las rebanadas son aerodinámicamente independientes unas de otras, como si fueran perfiles separados.

La teoría de la línea sustentadora, o de ala larga de Prandtl, es muy compleja en régimen no estacionario, y además carece de utilidad práctica, por lo que no se estudiará.

Por último, el método de la superficie sustentadora consiste en aplicar el método del entramado de dobletes o *doublet lattice*, que es como el método del *vortex lattice*, pero en régimen no estacionario. Se considera que las perturbaciones que se generan en cada panel varían en el tiempo, y se obtiene la velocidad inducida en cada panel por todos los paneles.

Después de esta introducción de los métodos se pasa a detallar su uso. Si se aplica el método de las rebanadas, se está aplicando un operador aerodinámico \mathcal{A} , que puede ser por ejemplo la solución de Theodorsen, el coeficiente de van Dike, la teoría del pistón, aerodinámica casi-estacionaria, etc. Este operador relaciona la condición de contorno en el perfil con el coeficiente de presión como:

$$\Delta c_p(x, y, t) = \mathcal{A}(\bar{z}_{1x} + ik\bar{z}_1) \quad (3.137)$$

Esta condición de contorno adimensional es función de y . La ecuación del perfil se escribe en función de los modos ficticios, pero se podrían emplear los modos normales acoplados o desacoplados de forma análoga.

$$\bar{z}_1 = \frac{z}{b(y)} = \sum_{i=1}^n f_i(y)\bar{\xi}_i(t) - (\bar{x} - \bar{a}) \sum_{j=1}^m g_j(y)\eta_j(t) \quad (3.138)$$

La condición de contorno adimensional queda entonces:

$$\bar{z}_{1x} + ik\bar{z}_1 = - \sum_{j=1}^m g_j\eta_j + ik \left(\sum_{i=1}^n f_i\bar{\xi}_i - (\bar{x} - \bar{a}) \sum_{j=1}^m g_j\eta_j \right) \quad (3.139)$$

Es importante notar que estas ecuaciones han sido adimensionalizadas con la semi-cuerda $b(y)$ que varía a lo largo de la envergadura.

La frecuencia reducida k también está adimensionalizada con esta $b(y)$. Para obtener una frecuencia única de referencia lo que se hace es definir una semi-cuerda de referencia b_R , por ejemplo la del encaste, de modo que:

$$k = \frac{\omega b_R}{U_\infty} \cdot \frac{b(y)}{b_R} = k_R \frac{b(y)}{b_R} \quad (3.140)$$

Entonces se podrá buscar la solución para la frecuencia de referencia k_R . La integración de la fuerza generalizada se puede realizar ahora en forma adimensional. Para la flexión:

$$Q_{\xi i} = q_\infty b_R^2 \iint_{\bar{S}_w} \mathcal{A} \left(- \sum_{j=1}^m g_j \eta_j + \right. \\ \left. + ik_R \frac{b(y)}{b_R} \left(\sum_{i=1}^n f_i \bar{\xi}_i - (\bar{x} - \bar{a}) \sum_{j=1}^m g_j \eta_j \right) \right) f_i(y) d\bar{x}d\bar{y} \quad (3.141)$$

Y para los modos de torsión:

$$Q_{\eta r} = q_\infty b_R^3 \iint_{\bar{S}_w} \mathcal{A} \left(- \sum_{j=1}^m g_j \eta_j + \right. \\ \left. + ik_R \frac{b(y)}{b_R} \left(\sum_{i=1}^n f_i \bar{\xi}_i - (\bar{x} - \bar{a}) \sum_{j=1}^m g_j \eta_j \right) \right) (-\bar{x} - \bar{a}) g_r d\bar{x}d\bar{y} \quad (3.142)$$

Es importante notar que la condición de contorno que se ha introducido en el operador aerodinámico \mathcal{A} está adimensionalizada con $b(y)$, porque la teoría de perfiles requiere que se adimensionalize con la semi-cuerda de cada perfil en concreto. Por otro lado, la integral en la superficie del ala está adimensionalizada con la semi-cuerda de referencia b_R , que es el factor que se ha sacado de la integral. En concreto el término $(\bar{x} - \bar{a})$ está adimensionalizado con $b(y)$ dentro de la condición de contorno que se introduce en \mathcal{A} , mientras que está adimensionalizado con b_R cuando multiplica al modo de torsión g_r .

Por otro lado, si se utiliza el método del *doublet lattice*, lo que se obtiene es que el coeficiente de presión en cada panel está relacionado con la condición de contorno por una matriz de coeficientes de influencia llamada *Aerodynamic Influence Coefficient Matrix*:

$$\Delta \mathbf{c}_p = \mathbf{AIC} (\bar{\mathbf{z}}_{1x} + ik_R \bar{\mathbf{z}}_1) \quad (3.143)$$

Donde $\Delta \mathbf{c}_p$ es un vector columna con los coeficientes de presión, \mathbf{AIC} es la matriz de coeficientes de influencia y $(\bar{\mathbf{z}}_{1x} + ik_R \bar{\mathbf{z}}_1)$ es un vector columna con la condición de contorno de cada panel. Ahora no será necesario adaptar el vector de coeficientes $\Delta \mathbf{c}_p$ del entramado de paneles a las rebanadas, como se hizo en aeroelasticidad estática, porque se integrará directamente para toda la superficie alar. Sin embargo los valores discretizados de los modos sí que deberán ser los mismos en todos los paneles de una misma rebanada. Para los modos de flexión la fuerza generalizada quedará:

$$Q_{\xi i} = q_\infty \iint_{\bar{S}_w} \Delta c_p \frac{\partial(\delta z)}{\partial(\delta \xi_i)} d\bar{x}d\bar{y} = q_\infty b_R^2 \iint_{\bar{S}_w} \Delta c_p f_i d\bar{x}d\bar{y} \quad (3.144)$$

Entonces es posible discretizar esta integral y sustituir el coeficiente de presión:

$$Q_{\xi i} = q_{\infty} b_R^2 \cdot \mathbf{f}_i \mathbf{w} \mathbf{AIC} (\bar{\mathbf{z}}_{1x} + ik_R \bar{\mathbf{z}}_1) \quad (3.145)$$

Donde \mathbf{w} es la matriz de pesos de integración, y \mathbf{f}_i es un vector fila que representa el modo de flexión discretizado en los paneles del entramado. Hay que recordar que el valor de f_i deberá ser el mismo para todos los paneles de una misma rebanada. De forma similar, para la torsión:

$$Q_{\eta r} = q_{\infty} b_R^3 \cdot (-\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{a}}) \circ \mathbf{g}_r \mathbf{w} \mathbf{AIC} (\bar{\mathbf{z}}_{1x} + ik_R \bar{\mathbf{z}}_1) \quad (3.146)$$

En este caso, la matriz que representa los modos discretizados es el producto de Hadamard, es decir, el producto componente a componente, de una matriz $(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{a}})$ que depende tanto de x explícitamente como de y implícitamente a través de la posición del eje elástico $a(y)$, con la matriz \mathbf{g}_r que representa propiamente el modo de torsión y que, igual que \mathbf{f}_i , debe tomar el mismo valor para todos los paneles de una misma rebanada.

Una vez se han obtenido las fuerzas aerodinámicas generalizadas, ya sea por el método de las rebanadas o por el método de la superficie sustentadora, pueden introducirse en el sistema matricial de las ecuaciones de Lagrange, que en este tema se escriben de forma genérica como:

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} + \frac{1}{\omega} \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{K} \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = q_{\infty} \cdot \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

Donde se ha añadido, por completitud, el término de disipación estructural. Es importante tener en cuenta que las matrices \mathbf{M} , \mathbf{K} y \mathbf{Q} no tienen las mismas dimensiones en todas las filas y columnas porque los grados de libertad ξ y η tampoco tienen las mismas dimensiones. Además las n ecuaciones de flexión tienen dimensión [F], diferentes a las de las m ecuaciones de torsión que tienen dimensión [FL]. Dimensionalmente las matrices quedan:

$$\begin{bmatrix} \text{M} & \text{ML} \\ \text{ML} & \text{ML}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{LT}^{-2} \\ \text{LT}^{-2} \end{bmatrix} + [\text{T}] \begin{bmatrix} \text{FL}^{-1} & \text{F} \\ \text{F} & \text{FL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{LT}^{-1} \\ \text{T}^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{FL}^{-1} & \text{F} \\ \text{F} & \text{FL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{L} \\ \text{L} \end{bmatrix} = [\text{FL}^{-2}] \begin{bmatrix} \text{L} & \text{L}^2 \\ \text{L}^2 & \text{L}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{L} \\ \text{L} \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

Donde [M] es la dimensión de masa, [L] es la de longitud, [T] es la de tiempo, y se ha agrupado $[\text{F}] = [\text{MLT}^{-2}]$ como la dimensión de fuerza. Esto será importante en el momento de adimensionalizar la ecuación. Para ello hará falta primero definir algunas magnitudes de referencia, como una masa de referencia M_R , que puede ser por ejemplo la masa total de un ala o la masa total del avión. El parámetro másico es entonces:

$$\mu = \frac{M_R}{\pi \rho b_R^3} \quad (3.149)$$

Se define también una rigidez de referencia K_R a partir de la frecuencia del flameo ω que se está buscando, de forma que:

$$\omega_R^2 = \frac{K_R}{\mu} \quad (3.150)$$

Y la frecuencia reducida es:

$$k_R = \frac{\omega b_R}{U_{\infty}} \quad (3.151)$$

Con todo esto ahora ya se puede definir que los grados de libertad oscilarán con un movimiento armónico a la frecuencia del flameo ω , quedando:

$$(-\omega^2 \cdot \mathbf{M} + (\mathbf{I} + i \cdot \gamma) \mathbf{K}) \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = q_\infty \cdot \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

Ahora es posible dividir las ecuaciones de flexión por $M_R b_R \omega^2$ y las de torsión por $M_R b_R^2 \omega^2$. En los términos que van multiplicados por el grado de libertad de flexión, un término b_R irá a parar a adimensionalizar este grado de libertad ξ . Todo lo demás va a adimensionalizar las matrices \mathbf{M} , \mathbf{K} y \mathbf{Q} , y teniendo en cuenta que:

$$\frac{q_\infty b_R}{M_R \omega^2} = \frac{1}{2\pi\mu k_R^2} \quad (3.153)$$

Finalmente queda en forma adimensional, pasando el término de fuerzas junto con los otros:

$$\left(-\bar{\mathbf{M}} + \left(\frac{\omega_R}{\omega} \right)^2 (1 + i\gamma) \bar{\mathbf{K}} - \frac{1}{2\pi\mu k_R^2} \cdot \bar{\mathbf{Q}} \right) \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.154)$$

Donde se ha multiplicado y dividido \mathbf{Q} por b_R para adimensionalizarla y que quede este factor, y se ha extraído el término de la frecuencia de referencia ω_R^2 de la matriz de rigidez para hacerla también adimensional. Si se multiplica por la izquierda por la inversa de la rigidez $\bar{\mathbf{K}}^{-1}$ y se cambia el signo se obtiene:

$$\left(\bar{\mathbf{K}}^{-1} \left(\bar{\mathbf{M}} + \frac{1}{2\pi\mu k_R^2} \cdot \bar{\mathbf{Q}} \right) - \left(\frac{\omega_R}{\omega} \right)^2 (1 + i\gamma) \cdot \mathbf{I} \right) \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.155)$$

Donde \mathbf{I} es la matriz identidad. Se tiene entonces un problema de autovalores que se resuelve igualando el siguiente determinante a cero:

$$\det \left(\bar{\mathbf{K}}^{-1} \left(\bar{\mathbf{M}} + \frac{1}{2\pi\mu k_R^2} \cdot \bar{\mathbf{Q}} \right) - \left(\frac{\omega_R}{\omega} \right)^2 (1 + i\gamma) \cdot \mathbf{I} \right) = 0 \quad (3.156)$$

La forma de resolver este problema puede ser, por ejemplo, con un método tipo VG como el que se ve en el Tema 3, suponiendo una frecuencia reducida de referencia k_R para obtener las fuerzas aerodinámicas, y con ellas resolver el problema de autovalores. De nuevo para cada autovalor z_i se han de comprobar las partes real e imaginaria del mismo para obtener la frecuencia de flameo ω_F y la velocidad de flameo U_F :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Re}(z_i) > 0 \quad ? \\ \frac{\text{Im}(z_i)}{\text{Re}(z_i)} \approx \gamma \quad ? \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{sí}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Re}(z_i) = \left(\frac{\omega_R}{\omega_F} \right)^2 \rightarrow \omega_F \\ k_{RF} = \frac{\omega_F b_R}{U_F} \rightarrow U_F \end{array} \right. \quad (3.157)$$

Para este análisis se ha supuesto que la matriz \mathbf{K} es invertible. Sin embargo, es posible añadir modos de sólido rígido de la aeronave completa, de cabeceo, de balance o de desplazamiento vertical, por ejemplo. Si se hace esto la matriz \mathbf{K} ya no será invertible. De todos modos aquí se han estudiado exclusivamente modos para las alas, en flexión y en torsión, y también uno de superficie de control.

A continuación se describe el método y algunos consejos que se deben seguir para aplicar estos desarrollos en el diseño de una aeronave.

En primer lugar se deben determinar los elementos que sufrirán deformaciones apreciables. Dependerá del tipo de avión: un avión de transporte civil, por ejemplo, presentará mayores deformaciones en el ala y en las superficies de cola, y se podría tratar el fuselaje como un sólido infinitamente rígido. Sin embargo la forma de un caza de superioridad aérea hace que sea mucho más importante analizar la estructura completa.

Para elegir el tipo de modos con los que se va a trabajar, si se cree que las deformaciones serán sencillas, o bien se sabe cómo serán estas deformaciones de antemano, entonces los modos ficticios funcionan bastante bien. En este caso, como se ha visto, la ventaja es que se pueden incluir modos asociados a las superficies de control, ya que éstas suelen intervenir en el flameo.

Se puede hacer el equilibrado másico para reducir los momentos estáticos, igual que cuando se añadían masas cerca del borde de ataque del perfil para reducir el valor de S_α . Si el flameo está asociado a una superficie de control entonces se debe reducir el S_β . En el caso de alas, se trata de reducir los términos que se encuentran fuera de la diagonal principal de la matriz de masas. Por esto el equilibrado másico será más complejo, habrá que añadir masas en los diferentes puntos en los que se produzca más deformación de la estructura.

Si el movimiento es complejo se pueden utilizar modos normales, para lo que es necesario un análisis modal por FEM, para obtener los modos propios y las frecuencias propias. Habitualmente se emplean de 15 a 20 modos propios, los correspondientes a las frecuencias más bajas, que son los que entrarán antes en flameo, además de que modos de orden superior son más difíciles de determinar con exactitud.

Se deben separar los estudios simétricos de los anti-simétricos. Como aquí solamente se ha estudiado una semi-ala, esto hace más bien referencia a las cargas que se aplican. Si se emplean modos de la aeronave completa, habrá que diferenciarlos en simétricos y anti-simétricos. Con esto se obtienen dos velocidades de flameo.

Es posible analizar el sistema antes de su resolución para eliminar los modos que tengan una menor influencia en el flameo, comparando el orden de magnitud de sus valores en la matriz de masas generalizadas.

Después de calcular el flameo hay que comprobar si la velocidad de flameo es aceptable o no, y comprobar si el flameo se debe al alerón. Si la velocidad de flameo es muy baja y no se puede aumentar mediante equilibrado másico, entonces se puede recurrir a tecnologías de aero-servo-elasticidad, con las que se puede controlar activamente las superficies de control para evitar el flameo. Este es un tema altamente complejo en el que no se entra en este curso.