Algèbre
Chapitre 5

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

I) Généralités

1) Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisabilité

Déf 1 E Kev, $u \in \mathcal{L}(E)$

- $\lambda \in K$ est une valeur propre de u si $\mathrm{Ker}(u - \lambda\, id_E) \neq \{0\}$
- $x \in E$ est dit vecteur propre de u si x est non nul et $\exists \lambda \in K / u(x) = \lambda x$
- spectre de u : ensemble des valeurs propres de u ds K noté $Sp(u)$
- si $\lambda \in Sp(u)$, $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\, id_E)$ sous-espace propre associé à λ

Prop 1 E Kevdf n, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in K$

$$\begin{aligned}\lambda \in Sp(u) &\iff (u - \lambda\, id_E) \text{ non injectif}\\ &\iff rg(u - \lambda\, id_E) < n\\ &\iff \underbrace{\det(u - \lambda\, id_E)}_{\chi_u(\lambda)} = 0\end{aligned}$$

(ds ce cas $\dim E_\lambda(u) = n - rg(u - \lambda\, id_E)$)

Déf 2 E Kev $u \in \mathcal{L}(E)$

u est dit diagonalisable si $\exists$ base B de E formée de vecteurs propres de K

si E df, équivalent à $M_B(u)$ diagonale

($\Leftrightarrow E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$)

2) Matrices

$A \in M_n(K) \longleftrightarrow u_A : \begin{array}{l} X \longmapsto AX \\ E \longrightarrow E \end{array}$ avec $E = M_{n,1}(K) \equiv K^n$ tq $A = \mathrm{Mat}_{can}(u_A)$

Déf 1 $A \in M_n(K)$, $E = M_{n,1}(K)$

valeur propre	vecteur propre
vap	vep
vp	vp

- $\lambda \in K$ valeur propre de A s'il existe $X \in E, X \neq 0 / AX = \lambda X$
- $X \in E \setminus \{0\}$ vecteur propre de A s'il existe $\lambda \in K / AX = \lambda X$
- $Sp_K(A)$ = ens des vap de A ds K
- $E_\lambda(A) = \{X \in E / AX = \lambda X\}$

Prop 2 $\lambda \in K$, $A \in M_n(K)$

$$\lambda \in Sp_K(A) \iff \exists X \in E \setminus \{0\},\ AX = \lambda X$$
$$\iff rg(A - \lambda I_n) < n$$
$$\iff \underbrace{\det(A - \lambda I_n)}_{\chi_A(\lambda)} = 0$$

$$\dim E_\lambda(A) = n - rg(A - \lambda I_n)$$

Déf 2 $A \in M_n(K)$ diagonalisable si elle est semblable à 1 matrice diagonale ds $M_n(K)$.

$$\left(\text{cf } E = \bigoplus_{\lambda \in Sp_K(A)} E_\lambda(A)\right)$$

3) Somme directe de sev propres

Propriété E Kev, $u \in \mathcal{L}(E)$

1) Toute famille de vep de u associés à des vap deux à deux distincts est libre.

2) Toute somme d'1 nb fini de sev propres est directe.

Démo 1) $\mathcal{E} = (e_i)_{i \in I}$ où $u(e_i) = \lambda_i e_i$, $e_i \neq 0$

$\mathcal{E}$ libre : $J \subset I$, J fini, $J \neq \emptyset$

$\sum_{i \in J} \alpha_i e_i = 0$, par récurrence sur $n = \text{card } J \geq 1$:

$n = 1$ $e_i \neq 0$ (e_i) libre

$P(n-1) \Rightarrow P(n)$ $(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_{i_j} = 0$ on applique u :

$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_{i_j} e_{i_j} = 0$ $L_2 - \lambda_{i_n} L_1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\lambda_{i_j} - \lambda_{i_n}) e_{i_j} = 0$

HR : $(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-1}})$ libre $\quad 1 \leq j \leq n-1$, $\alpha_j \underbrace{(\lambda_{i_j} - \lambda_{i_n})}_{\neq 0} = 0$

$\Rightarrow \alpha_j = 0$

$\alpha_n e_{i_n} = 0$, $e_{i_n} \neq 0 \Rightarrow \alpha_n = 0$

CQFD

2) Csq de 1) $\quad \lambda_1, \dots, \lambda_n$ vap de u, $F = \sum_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(u)$

où $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$ $\quad$ somme directe ?

$x \in F$, 2 décompositions :

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} 1(x_i - x'_i) = 0$

$x_i, x'_i \in E_{\lambda_i}(u)$

si $x_i \neq x'_i$, $x_i - x'_i$ vep de u

par 1), $\forall i$, $x_i - x'_i = 0$

CSQ : Diagonalisabilité de u :

$F = \sum_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

u diagonalisable $\Leftrightarrow E = F$

4) PN d'endomorphismes (ou de matrices)

Prop E Kev, $u \in \mathcal{L}(E)$

Soit $\Phi_u : P(X) \longmapsto P(u)$ $\quad$ où si $P = \sum a_k X^k$, $P(u) = \sum a_k u^k$

$\mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$

alors Φ_u est un morphisme de K-algèbre ie :

$(P + \lambda Q)(u) = P(u) + \lambda Q(u)$

$(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$

$(1)(u) = id_E$

Prop 2 $\quad \mathrm{Im}\, \phi_u = $ "$\mathbb{K}[u]$"

$\mathrm{Im}\, \phi_u = \{P(u) / P \in \mathbb{K}[X]\}$ est 1 sous algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$

Prop 3 $\quad \mathrm{Ker}\, \phi_u = $ "$\mathrm{Ann}(u)$" est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ (ens des PN annulateurs de u $= \{P \in \mathbb{K}[X] / P(u) = 0\}$)

2 cas $\quad \mathrm{Ann}\, u = \{0\}$, $\mathrm{Ann}\, u \neq \{0\}$

Prop / Déf E kev et $u \in \mathcal{L}(E)$ — lorsque $\mathrm{Ann}(u) \neq \{0\}$
(ce qui est toujours le cas en DF), il existe 1 unique PN
unitaire noté Πu ou Π_u tq $\mathrm{Ann}(u) = \{\Pi_u Q / Q \in K[X]\}$
Π_u est le PN minimal de u
Si $r = d^\circ \Pi_u$ alors $(id_E, \ldots, u^{r-1})$ base de $\mathrm{Im}\, \phi_u$ $= K[u]$ —

Calcul pratique

NB Si E df n, $\mathcal{L}(E)$ df n^2
$(id_E, u, \ldots, u^{n^2})$ liée
$\exists (\lambda_0, \ldots, \lambda_{n^2}) \neq (0, \ldots, 0) \,/\, \sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i u^i = 0$
$P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i \neq 0$ et $P(u) = 0$

Recherche de Π_u, intérêt de $d^\circ \Pi_u \overset{r}{=} \geq 1$

$r = 1$? (id_E, u) liée $\Rightarrow u = \lambda\, id_E \Rightarrow \Pi_u = X - \lambda$
$r = 2$ $u^2 = \alpha u + \beta\, id_E$ — —

Applications $u \in \mathcal{L}(E)$ $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0 \,/\, P(u) = 0$

Appli 1 si $P(0) \neq 0$, $u \in GL(E)$ et $u^{-1} \in K[u]$
$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $id_E = \underbrace{\left(-\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k u^{k-1}\right)}_{u^{-1}} \circ u$

Appli 2 Calcul de $\left| \begin{array}{l} u^p,\ p \in \mathbb{N} \\ A(u),\ A \in K[X] \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{ll} p \geq n = d^\circ P & \text{DE de } X^p \text{ par } P \\ d^\circ A \geq n & \text{DE de } A \text{ par } P \end{array} \right.$

- $X^p = PQ + R$ $d^\circ R < n$, $u^p = R(u) \in \mathrm{Vect}(id_E, \ldots, u^{n-1})$
- •• $A = PQ_1 + R_1$ $d^\circ R_1 < n$, $A(u) = R_1(u)$

Rem Π_u ? $P \in \mathrm{Ann}(u)$ cf Π_u / P

ex $E = \mathbb{R}^3$ $\mathcal{E}$ base can $u \in \mathcal{L}(E)$, $A = M_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Π_u ? $A^2 = 0 \Rightarrow X^2 \in \mathrm{Ann}(u)$
$\Pi_u / X^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{soit } \Pi_u = X \text{ impossible car } u \neq 0 \\ \text{— } \Pi_u = X^2 \end{array} \right.$

②

Remarque générale : cas proj, sym, nilpotent

• $p \in \mathcal{L}(E)$ / $p^2 = p$ $\Rightarrow p^2 - p = 0$ $\Rightarrow (X^2 - X) = X(X-1) \in \mathrm{Ann}(u)$

$$\Pi_p = \begin{cases} X & \text{si } p = 0 \\ X-1 & \text{si } p = id_E \\ X(X-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

•• $s \in GL(E)$ $s^2 = id_E$ $\Rightarrow X^2 - 1 = (X-1)(X+1) \in \mathrm{Ann}(u)$

$$\Pi_s = \begin{cases} X-1 & \text{si } s = id_E \\ X+1 & \text{si } s = -id_E \\ X^2-1 & \text{sinon} \end{cases}$$

∴ $u \in \mathcal{L}(E)$ nilp d'indice r ie $u^r = 0$, $u^{r-1} \neq 0$

$\Pi_u = X^r$

Prop E kev $u \in \mathcal{L}(E)$

• Si $\lambda \in Sp(u)$ et x vep associé $(u(x) = \lambda x)$

alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$ ie $P(\lambda) \in Sp(P(u))$

•• les vap de u sont à prendre parmi les racines ds K de tout PN annulateur de u

ie $Sp(u) \subset \{\lambda \in K / P(\lambda) = 0\}$

Prop Si E kevdf et $u \in \mathcal{L}(E)$ de PN min Π_u, alors

$Sp(u) = \{\lambda \in K / \Pi_u(\lambda) = 0\}$

Démo $\subset$ cf prop préc : $Sp(u) \subset Z = \{\lambda \in K / \Pi_u(\lambda) = 0\}$

$\supseteq$ $\lambda \in Z$, m multiplicité $\Pi_u = (X-\lambda)^m . Q(X)$

où $Q(\lambda) \neq 0$

justifier que $\lambda \in Sp(u)$:

$\Pi_u(u) = 0 = (u - \lambda id_E)^m \circ Q(u)$

si $\lambda \notin Sp(u)$ alors $(u - \lambda id_E) \in GL(E)$, on aurait $Q(u) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} Q \in \mathrm{Ann}(u) \text{ avec } d°Q < d°\Pi_u \\ Q \neq 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ absurde donc $\lambda \in Sp(u)$ □

Ex $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ base can $u \in \mathcal{L}(E)$ $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$

Π_u, $Sp(u)$?

▶ $\chi_u(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$
car $\lambda \in \mathbb{R}$!

$\Rightarrow Sp(u) = \{1\}$

▶ Recherche de Π_u

$\tilde{u} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ X \longmapsto AX \end{array} \right.$, $\Pi_{\tilde{u}} \in \mathbb{C}[X]$, $\Pi_{\tilde{u}}(\tilde{u}) = 0$, $\Pi_{\tilde{u}}(A) = 0$

$Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{1, 1+i, 1-i\}$

$P(X) = (X-1)(X^2 - 2X + 2) \in Ann(A)$?

$P(A) = 0 \Rightarrow P(u) = 0$

Ccl $P \in Ann(u)$

Π_u / P $\quad d°\Pi_u = \begin{cases} 1 \Rightarrow \Pi_u = (X-1) \text{ faux : } A \neq I_3 \\ 2 \Rightarrow \Pi_u = \cancel{(X-1)^2} \underset{P'(1) \neq 0}{} \text{ ou } \cancel{(X-1)(X-\alpha)} \ \alpha \in \mathbb{R} \text{ car } \alpha \in \mathbb{C} \\ 3 \Rightarrow \Pi_u = P \end{cases}$

5) Décomposition des noyaux

Th Soient E Kev, $u \in \mathcal{L}(E)$, $P, Q \in K[X]$ premiers entre eux
Alors $\operatorname{Ker}(PQ)(u) = \operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$

Si de plus P et Q annulateurs de u, $E = \operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$ et
$\operatorname{Ker} P(u) = \operatorname{Im} Q(u)$; $\operatorname{Ker} Q(u) = \operatorname{Im} P(u)$

Démo Pour simplifier notons $p = P(u)$, $q = Q(u)$

$P \wedge Q = 1$, Bézout : $\exists A, B \in K[X] \,/\, AP + BQ = 1$

Si $a = A(u)$, $b = B(u)$ on a $\underline{a \circ p + b \circ q = id_E}$

$\forall x \in E$, $a \circ p(x) + b \circ q(x) = x \quad (1)$

$\hookrightarrow \in K[u]$ commutatif

▶ Mq $\mathrm{Ker}\, pq = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, q$?

* $\forall x \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q \Rightarrow x = 0$ cf (1)

* $\mathrm{Ker}\, pq = \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, q$?

$x \in \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, q \Rightarrow x = x_1 + x_2 \ / \ x_1 \in \mathrm{Ker}\, p,\ x_2 \in \mathrm{Ker}\, q$

$\Rightarrow p \circ q(x) = q \circ \underbrace{p(x_1)}_{0} + p \circ \underbrace{q(x_2)}_{0} = 0$

$x \in \mathrm{Ker}\, p \circ q \overset{(1)}{\Longrightarrow} x = \underbrace{q \circ b(x)}_{x_1 \in \mathrm{Ker}\, p} + \underbrace{p \circ a(x)}_{x_2 \in \mathrm{Ker}\, q}$

car $p(x_1) = b(\underbrace{p \circ q}_{0})(x) = 0$

▶ $PQ \in \mathrm{Ann}(u)$

* $\mathrm{Ker}\, \underbrace{(P \times Q)(u)}_{0} = E$

* On a $p \circ q = q \circ p = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Ker}\, p \ (\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, q)$

réc $x \in \mathrm{Ker}\, p$, $(1) \Rightarrow x = q(b(x)) \in \mathrm{Im}\, q$ $\square$

Théorème Itération :

E Kev, $u \in \mathcal{L}(E)$

Soient $P_1, \ldots, P_r \in K[X]$ premiers entre eux 2 à 2

Alors $\mathrm{Ker}\,(P_1 \times \ldots \times P_r)(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\, P_i(u)$

Même : récurrence ...

Dem $\hat{P_i} = P_1 \ldots P_{i-1} P_{i+1} \ldots P_r$, $\hat{P_i} \cdot P_i = \prod P_j$

$\mathrm{pgcd}(\hat{P_1}, \ldots, \hat{P_r}) = 1 \Rightarrow$ Bézout généralisé

il existe $A_1, \ldots, A_r \in \mathbb{K}[X]$ tq

$\sum_1^r A_i \hat{P_i} = 1 \rightarrow$ analogue de (1)

$x = \sum A_i(u) \circ \hat{P_i}(u)(x)$, ...

Ex Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ / $f^3 = -f$, $f \neq 0$

Mq $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + id_{\mathbb{R}^3}) \\ \operatorname{rg} f = 2 \\ \text{il existe une base } B \text{ de } f \text{ tq } M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$

▶ $f^3 + f = 0 \Rightarrow X^3 + X \in \operatorname{Ann}(f)$

$X^3 + X = X(X^2 + 1)$

X et $X^2 + 1$ sont premiers entre eux

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \underbrace{\operatorname{Ker}(f^2 + id)}_{\operatorname{Im} f}$

▶ $f \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} f \neq 0$

Considérons $\operatorname{Im} f$. Il est stable par f

Soit $\tilde{f} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} f)$: $\begin{array}{l} x \longmapsto f(x) \\ \operatorname{Im} f \to \operatorname{Im} f \end{array}$

$\left| \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}^3, f^3(x) + f(x) = 0 \\ \forall y \in \operatorname{Im} f, \tilde{f}^2(y) + y = 0 \Rightarrow \tilde{f}^2(y) = -id_{\operatorname{Im} f} \end{array} \right.$

$\det(\tilde{f}^2) = \det(-id_{\operatorname{Im} f}) = (-1)^{\operatorname{rg} f}$

$\Rightarrow \operatorname{rg} f$ pair $\Rightarrow$ $\underline{\operatorname{rg} f = 2}$

▶ construction d'1 base B tq $\operatorname{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\dim \operatorname{Ker} f = 1 \longrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}(e_1)$

$\dim \operatorname{Ker}(f^2 + id) = 2$

Soit $e_2 \neq 0 \in \operatorname{Im} f$ tq $f(e_2) = e_3$

et $f(e_3) = f^2(e_2) = -e_2$

Enfin je vérifie que (e_1, e_2, e_3) base de $\mathbb{R}^3$

$\begin{array}{l} \\ f \\ f \end{array} \begin{cases} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 \\ \lambda_2 e_3 - \lambda_3 e_2 = 0 \\ -\lambda_2 e_2 - \lambda_3 e_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

CSQ critère de diagonalisabilité :

Th ① Soit E Kev, $u \in \mathcal{L}(E)$
s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul, tq $P(u)=0$, scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et à racines simples, alors u diagonalisable

② Soit E Kevdf. Alors u diagonalisable ssi il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tq $P(u)=0$
ou ssi Π_u scindé ds $\mathbb{K}[X]$ à racines simples
$\left(\text{alors } \Pi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)\right)$

Demo ① $P(X) = \alpha \prod_{j=1}^{r} (X-z_j)$ où $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{K}$ 2 à 2 distincts.

on prend $\alpha = 1$, soit $P_j = (X-z_j)$, $P_i \wedge P_j = 1$ si $i \neq j$
forme itérée TDN :

$$E = \operatorname{Ker} P_1(u) \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker} P_r(u)$$
$$= E_{z_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{z_r}(u)$$

La base de E adaptée à cette somme directe est formée de vep après nettoyage.

NB il se peut que certains $E_{z_j}(u) = \operatorname{Ker}(u - z_j\, id_E) = \{0\}$
cf $Sp(u) \subset \{z_1, \dots, z_r\}$

② u diag avec $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$
vap : $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ 2 à 2 distincts
$P = \prod_{j=1}^{r} (X-\lambda_j)$, vérifier que $P(u)=0$
$\mathcal{B}$ base de vep $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ $\dim E = n$
$u(b_i) = \mu_i b_i$ $\mu_i \in Sp(u)$ $\exists j \in [\![1, r]\!], \mu_i = \lambda_j$

$$P(u)(b_i) = (u - \lambda_1 id_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_j id_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_r id_E)(b_i)$$
$$= v \circ \underbrace{(u - \lambda_j id_E)(b_i)}_{0} = 0 \implies b_i \in \operatorname{Ker} P(u)$$

et $P = \Pi_u$ cf Π_u / P et à racines dernière équivalence $\Leftarrow$ $\begin{cases} P \in K[X], P \text{ scindé à racines simples} \\ P(u) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \Pi_u / P$, Π_u scindé à racines simples

$\boxed{\text{rec}}$ Π_u convient

On retiendra

$\in$ $\mathcal{L}(E)$, u diagonalisable

$$\Pi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$$

5) Traduction matricielle

$A \in M_n(K)$

P1) $\phi_A : \begin{matrix} P \mapsto P(A) \\ K[X] \to M_n(K) \end{matrix}$ morphisme de K algèbre

P2) $\mathrm{Im}\, \phi_A = \{P(A) / P \in K[X]\}$ s/ algèbre commutative de $M_n(K)$ (cf produit ds $K[X]$)

P3) $\mathrm{Ker}\, \phi_A = \mathrm{Ann}(A) = \{P \in K[X] / P(A) = 0\}$ idéal de $K[X]$; Π_A générateur unitaire (PN minimal de A)

et si $r = d^\circ \Pi_A \geq 1$, $(I_n, A, \ldots, A^{r-1})$ base de $\mathrm{Im}\, \phi_A$

Rem utilisation des PNs annulateurs :

$P(0) \neq 0 \to A^{-1}$

calcul de A^k, $k \in \mathbb{N}$

P4) Si $P \in K[X]$ et $P(A) = 0$

Alors $Sp_K(A) \subset \{\lambda \in K / P(\lambda) = 0\}$

P5) $A \in M_n(K)$

$\chi_A(X) = \det(A - X I_n)$ PN carac de A, Π_A PN min de A

$Sp_K(A) = \{\lambda \in K / \chi_A(\lambda) = 0\} = \{\lambda \in K / \chi_A(\lambda) = 0\} = \{\lambda \in K / \Pi_A(\lambda) = 0\}$

Premier critère de diagonalisabilité :

P6) $A \in M_n(K)$

A diagonalisable ssi $\exists P \in K[X]$, $d^\circ P \geq 1$ annulateur de A, scindé ds $K[X]$ et à racines simples ; ssi Π_A scindé ds $K[X]$ et à racines simples

Ex) Soit $A \in M_n(K)$, $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$

Mq A diag ds $M_n(K)$ ssi B diag ds $M_{2n}(K)$

Calcul préparatoire $B^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & 2^k A^k \end{pmatrix}$

$P(B) = \sum_{k=0}^{q} a_k B^k \qquad (P \in K[X])$

$= \sum_{k=0}^{q} a_k \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & 2^k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_k A^k & 0 \\ 0 & \sum a_k 2^k A^k \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(2A) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\exists P \in K[X]$ tq $P(A) = 0$ scindé à racines simples

$2A$ diagonalisable ? $\quad A = Q \Delta Q^{-1}$ Δ diag, $Q \in GL_n(K)$

$\Rightarrow 2A = Q(2\Delta) Q^{-1}$

$\Rightarrow 2A$ diagonalisable

$\Rightarrow \exists P_1$ scindé à racines simples / $P_1(2A) = 0$

On prend $P_2 = PPCM(P, P_1)$ qui est scindé à racines simples

et $P_2(A) = P_2(2A) = P(B) = 0 \Rightarrow B$ diagonalisable

$\Leftarrow$ B diagonalisable. Soit P scindé à racines simples tq $P(B) = 0$, alors $P(A) = 0$ $\square$

Si $B' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 8A & 2A \end{pmatrix}$, m̂ questions

Phase n° 1 mq B et B' semblables

Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ mq M, D semblables

$Sp(M) = \{1, 2\}$ $\quad \chi_M(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)$

$E_2(M) = \text{vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_1(M) = \text{Ker}(M - I)$ $\quad \begin{cases} x = x \\ 8x + y = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow E_1(M) = \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$

soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} M P = D$

Extrapolation $P = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ -8I_n & I_n \end{array}\right)$, $P^{-1} B' P = B$

$P' = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 8I_n & I_n \end{array}\right)$ (car $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ via $\frac{{}^t\text{comatrice}}{\det}$ ...)

$P = T_{21}(-8) \Rightarrow P^{-1} = T_{21}(8)$)

$P P' = I_{2n} \Rightarrow P^{-1} = P'$

ie B' diagonalisable $\Leftrightarrow B$ diagonalisable

$\Leftrightarrow A$ diagonalisable

II) Réduction en dimension finie

1) Utilisation de sev stables

Def E kev, $u \in \mathcal{L}(E)$

F sev stable par u si $u(F) \subset F$

ie $\forall x \in F$, $u(x) \in F$

Intérêt considérer l'endomorphisme induit :

$\tilde{u} \in \mathcal{L}(F)$ agit comme $u_{/F}$

$\tilde{u} : F \longrightarrow F$

$x \longmapsto u(x)$

Prop (Traduction matricielle)

E kev df, $u \in \mathcal{L}(E)$, F sev de E

F stable par u ssi pour une (resp toute) base $\mathcal{B}$ de E adaptée à F : $M_{\mathcal{B}}(u)$ est trigonale sup par blocs :

$M_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & U \\ \hline 0 & V \end{array}\right)$ où $A \in M_r(K)$ avec $r = \dim F$

Démo $\Rightarrow$ $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ adaptée à F

si $(e_1, \dots, e_r)$ base de F

$u(e_j) \in F$, $1 \leq j \leq r$ $\quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij} e_i \in F$

$\Leftarrow$ par lecture de $M_{\mathcal{B}}(u)$

$\forall j \in [\![1, r]\!]$ $u(e_j) \in F$, $\forall x \in F$ $u(x) = x$

Prop E Kev df, $u \in \mathcal{L}(E)$ $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ où $F_1, \dots, F_p$ sev de E supplémentaires
u stabilise chaque sev F_i ssi $M_B(u)$ avec B base de E adaptée à $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$, est diag par blocs : $\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_p \end{bmatrix}$ où $D_j \in M_{m_j}(K)$, $m_j = \dim F_j$

2) PN caractéristique (d'1 endo ou d'1 mat)

Def ① E Kev df, $\dim E = n \geq 1$ $u \in \mathcal{L}(E)$
χ_u : PN cara de u défini par $\chi_u(\lambda) = \det(u - \lambda \mathrm{id}_E)$
② $A \in M_n(K)$ $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

Prop 1 $d^\circ \chi_u = n$ (resp $d^\circ \chi_A = n$)
$\chi_u(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \mathrm{tr}(u) X^{n-1} + \dots + \det u$
(resp $\chi_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \mathrm{tr}\, A\, X^{n-1} + \dots + \det A$)
$sp(u) = \{\lambda \in K / \chi_u(\lambda) = 0\}$
(resp $sp_K(A) = \{\lambda \in K / \chi_A(\lambda) = 0\}$)

Rem pour $n = 2$ $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}\, A . X + \det A$

Def multiplicité d'1 valeur propre λ de u est celle dans χ_u notée m_λ

Prop si χ_u scindé ds $K[X]$ et $sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ vap de u
alors $\chi_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}} = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (\lambda - X)^{m_\lambda}$

Dans ce cas : $\begin{cases} \mathrm{tr}\, A = \sum_{\lambda \in Sp A} m_\lambda . \lambda \\ \det A = \prod_{\lambda \in Sp A} \lambda^{m_\lambda} \end{cases}$

Rem tr, det permet de retrouver certaines vap

ex $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ rg $(A - I) = 1 \Rightarrow 1$ vap
$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 4$ vap ; $\mathrm{tr}\, A = 6 \Rightarrow 1$ double, 4 simple

Prop Soit E Kev df $\dim E = n$ $u \in \mathcal{L}(E)$

$\lambda \in K$ vap de u

Alors $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$

Démo $\lambda \in Sp(u) \Rightarrow E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \, id_E) \neq \{0\}$

donc $\dim E_\lambda(u) \geq 1$

$E_\lambda(u)$ est stable par u : $x \in E_\lambda(u)$, $u(x) = \lambda x \in E_\lambda(u)$

Si $\tilde{u} \in \mathcal{L}(E_\lambda(u))$ induit par u, $\tilde{u} = \lambda \, id_{E_\lambda(u)}$

Soit $\mathcal{B}$ base de E adaptée à $E_\lambda(u)$, $p = \dim E_\lambda(u)$

$$A = M_\mathcal{B}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_p & * \\ \hline 0 & M \end{array}\right)$$

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, \dots, e_n)$
$u(e_i) = \lambda e_i$ pour $1 \leq i \leq p$

$$\chi_A(X) = \det(A - X I_n) = \left|\begin{array}{c|c} (\lambda - X) I_p & * \\ \hline 0 & M - X I_{n-p} \end{array}\right| = (\lambda - X)^p \cdot \chi_M(X)$$

$\Rightarrow m_\lambda \geq p$ $\square$

Csq Si λ vap simple de u, $\dim E_\lambda(u) = 1$

Prop E Kev df, $u \in \mathcal{L}(E)$, F sev de E stable par u (où $\dim F \geq 1$)

Soit $\tilde{u} \in \mathcal{L}(F)$ induit par u

Alors $\chi_{\tilde{u}}$ divise χ_u.

démo Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à F

$$A = M_\mathcal{B}(u) = \left(\begin{array}{c|c} M_\mathcal{C}(\tilde{u}) & * \\ \hline 0 & M \end{array}\right)$$

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, \dots, e_n)$
$\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_p)$ base de F

$$\chi_u(X) = \det(A - X I_n) = \underbrace{\det(M_\mathcal{C}(\tilde{u}) - X I_p)}_{\chi_{\tilde{u}}(X)} \times \chi_M(X) \quad \square$$

Rem $A = \begin{pmatrix} D_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & D_p \end{pmatrix}$ où $D_j \in \mathcal{M}_{m_j}(K)$

alors $\chi_A(X) = \prod_{j=1}^{p} \chi_{D_j}(X)$

Rem autres prop de χ_A

(1) $A \in GL_n(K)$, lien entre χ_A et $\chi_{A^{-1}}$?

$\lambda \in K, \lambda \neq 0$ ($0 \notin Sp A$ car inversible)

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det A \, (-\lambda)^n \det(A^{-1} - \frac{1}{\lambda} I_n)$

$\Rightarrow \chi_A(\lambda) = (-\lambda)^n \chi_{A^{-1}}(1/\lambda)$

(2) $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

• si A inversible alors AB et BA semblables $AB = A(BA)A^{-1}$

$\rightarrow AB - \lambda I_n$ et $BA - \lambda I_n$ semblables

•• si A non inversible soit $A_x = A - x I_n$

si $x \in \mathbb{C} \setminus Sp_{\mathbb{C}}(A) \rightarrow A_x$ inversible

$\det(A_x B - \lambda I_n) = \det(BA_x - \lambda I_n)$

2 Pol en x qui coïncident sur 1 ens ∞ → égaux, on prend $x = 0$ □

3) Th de Cayley-Hamilton

① E kev df, $u \in \mathcal{L}(E)$ dim $E = n \geq 1$

Alors $\chi_u(u) = 0$

(donc Π_u / χ_u)

② $A \in M_n(K)$ alors $\chi_A(A) = 0_n$ (et Π_A / χ_A)

Démo ① $\chi_u(u)$? ie $\forall x \in E$ $\chi_u(u)(x) = 0$?

$x = 0$ évident (AL), reste le cas $x \neq 0$

F sev de E contenant x, stable par u → contient $u^k(x)$, $k \in \mathbb{N}$

si $F = \mathrm{vect}(u^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$, de dimension finie

soit $U = \{ k \in \mathbb{N} / u^{k+1}(x) \in \mathrm{Vect}(x, \ldots, u^k(x)) \}$

$U \neq \emptyset$ sinon $\forall k$ $u^{k+1}(x) \notin \mathrm{Vect}(x, \ldots, u^k(x))$ ie $(u^i(x))_{i \in \mathbb{N}}$ libre

(impossible en DF)

Soit $p = \min U$ tq $\begin{cases} B = (x, \ldots, u^p(x)) \text{ libre } (p-1 \notin U) \\ u^{p+1}(x) = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i u^i(x) \quad (*) \text{ où } \alpha_0, \ldots, \alpha_p \in K \end{cases}$

B base de F ? • B libre par def

●● générateurs : soit $\Pi = X^{p+1} - \sum_{i=0}^{p} \alpha_i X^i$

$k \in \mathbb{N}$, DE de X^k par Π : $X^k = \Pi Q_k + R_k$, $d^\circ R_k \leq p$

$\Rightarrow u^k(x) = Q_k(u)\big[\underbrace{\Pi(u)(x)}_{0 \text{ cf } (*)}\big] + \underbrace{R_k(u)(x)}_{\in \mathrm{Vect}(B)}$ → F espace cyclique associé à x

Considérons $v \in \mathcal{L}(F)$ induit par u ie $v : \begin{array}{l} y \mapsto u(y) \\ F \to F \end{array}$

Donc $M_B(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & & & \alpha_1 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & \alpha_p \end{pmatrix}$ χ_v ? on a $\chi_v \mid \chi_u$

(matrice compagnon de Frobenius)

$$\chi_v = \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & -X & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -X & \alpha_{p-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & \alpha_p - X \end{vmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + \dots + X^p L_{p+1}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0 & Q(X) \\ & \alpha_1 \\ \cancel{X} & \vdots \\ & \alpha_p - X \end{vmatrix}$$

$Q(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{p-1} X^{p-1} + \alpha_p X^p - X^{p+1}$

et $\chi_v(X) = (-1)^{p+1}\left(-\sum_{k=0}^{p} \alpha_k X^k + X^{p+1}\right)$

$\chi_v(v)(x) = \underbrace{(-1)^{p+1}\left[u^{p+1}(x) - \sum_{k=0}^{p} \alpha_k u^k(x)\right]}_{0 \text{ (cf } (*))} = 0$

Comme χ_v / χ_u : $\chi_u = H \cdot \chi_v$

$\chi_u(u) = H(u) \circ \chi_v(u)$

$\chi_u(u)(x) = H(u)\left[\chi_v(v)(x)\right] = 0$ □

Rem : Le calcul de χ_u permet de construire $A \in M_n(K)$ tq

$\chi_A(X) = (-1)^n \left[X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k\right]$

ex : $A \in M_4(\mathbb{R})$, $\chi_A(X) = X^4 + X^2 - 1$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Démo ② $A \in M_n(K)$, $u \in \mathcal{L}(K^n)$, B base ca…

u canoniquement associé. $\chi_u = \chi_A$ $\quad M_B(u) = A$

$\chi_A(A) = M_B(\chi_u(u))$, $\chi_u(u) = 0 \Rightarrow \chi_A(A) = 0$ □

Rem : Csq du Th de Cayley Hamilton et du th de décomposition des noyaux

E Kev df, $u \in \mathcal{L}(E)$ tq χ_u est scindé ds $\mathbb{K}[X]$

$Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$

$\chi_u = \prod_{j=1}^{r} (\lambda_j - X)^{m_j} = P_1 \times \dots \times P_r$

$P_j = (\lambda_j - X)^{m_j}$; $P_i \wedge P_j = 1$ si $i \neq j$

TDN itéré $\quad \underbrace{\mathrm{Ker}\,(P_1 \times \dots \times P_r)(u)}_{\chi_u} = \bigoplus_{j=1}^{r} \mathrm{Ker}\; P_j(u)$

$E = \bigoplus_{j=1}^{r} (u - \lambda_j id_E)^{m_j}$

$E_{\lambda_j}(u) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_j id_E)$ sep associé à λ_j

Def E Kevdf, $u \in \mathcal{L}(E)$

$\lambda \in Sp(u)$ de multiplicité m_λ

on note $C_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\;(u - \lambda id_E)^{m_\lambda}$ le sev caractéristique associé à λ

NB $\quad \underset{= \mathrm{Ker}(u - \lambda id_E)}{E_\lambda(u)} \subset \underset{= \mathrm{Ker}(u - \lambda id_E)^{m_\lambda}}{C_\lambda(u)}$

4) Critères de diagonalisabilité en DF

a) Bilan, complété des diverses prop

Th Soit E Kev df, $\dim E = n \geq 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence :

(1) u diagonalisable : il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vep de u ou tq $M_{\mathcal{B}}(u)$ diagonale

(2) $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

(3) $\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u)$

(4) χ_u scindé ds $\mathbb{K}[X]$ et $\forall \lambda \in Sp(u)$ on a $m_\lambda = \dim E_\lambda(u)$

(5) $\exists P \in \mathbb{K}[X]$, $d°P \geq 1$, scindé ds $\mathbb{K}[X]$, à racines simples ; tq $P(u) = 0$

(6) le PN minimal Π_u de u scindé ds $\mathbb{K}[X]$ et à racines simples

•• CS pour que u soit diagonalisable il suffit que u possède n vap distinctes

Explication

(1) $\Leftarrow$ (2) $\mathcal{B}$ base adaptée à somme directe $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [1,n]}$ $u(e_i) = \lambda_i e_i$

(1) $\Rightarrow$ (2) $\lambda \in Sp(u)$ $I_\lambda = \{ i \in [1,n] / \lambda_i = \lambda \}$ $x = \sum_1^n x_i e_i$

$u(x) = \lambda x$, $x \in \mathrm{vect}(e_i)_{i \in I_\lambda}$

$E_\lambda(u) = \mathrm{vect}(e_i)_{i \in I_\lambda}$ quitte à permuter $\mathcal{B}$:

$E = \sum E_\lambda(u)$, somme directe déjà vue

(2) $\Leftarrow$ (3) immédiat

(1) $\Leftarrow$ (5) $\Leftarrow$ (6) déjà vu

(3) $\Leftarrow$ (4) ? On a vu $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$

$n = \sum \dim E_\lambda(u) \leq \sum m_\lambda \leq n$

(3) $\Rightarrow$ (4) $\sum m_\lambda = n$

$\Rightarrow \chi_u$ scindé $\forall \lambda$ $m_\lambda = \dim E_\lambda(u)$

(4) $\Rightarrow$ (3) trivial $\underbrace{\sum m_\lambda}_{\substack{\text{scindé} \\ n}} = \sum \dim E_\lambda(u)$

CS Si u possède n vap, par (4) ...

(b) Décomposition spectrale

Def/Prop E kevdf, $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable

pour chaque $\lambda \in Sp(u)$, on note p_λ la projection sur $E_\lambda(u)$

p_λ (projecteur spectral) la projection sur $E_\lambda(u)$

$//^t$ à $\sum_{\substack{\mu \in Sp(u) \\ \mu \neq \lambda}} E_\mu(u)$. Alors : $\forall \lambda, \mu \in Sp\, u$:

- $p_\lambda \circ p_\mu = \delta_{\lambda,\mu} \cdot p_\lambda$
- $u = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \lambda p_\lambda$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k = \sum \lambda^k p_\lambda$

Traduction matricielle

$A \in M_n(K)$ diagonalisable si il existe $P \in GL_n(K) / P^{-1}AP = D$

quitte à permuter les vap, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \dots, \lambda_r I_{m_r})$

Démo prop $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$, $x = \sum_{\lambda \in Sp(u)} p_\lambda(x)$

$\mathrm{id}_E = \sum p_\lambda$, $u(x) = \sum \lambda p_\lambda(x)$

$\lambda \neq \mu$: $p_\lambda(x) \in E_\lambda(u)$ $p_\mu(p_\lambda(x)) = 0$ $\Rightarrow p_\mu \circ p_\lambda = 0$

Recherche pratique des p_λ ?

Rem $E_\lambda(u) = \mathrm{Im}\, p_\lambda$

Card $S = r$, r premières conditions

$$\begin{cases} \mathrm{id}_E = \sum_{\lambda \in S} p_\lambda \\ u = \sum_{\lambda \in S} \lambda p_\lambda \\ \vdots \\ u^{r-1} = \sum_{\lambda \in S} \lambda^{r-1} p_\lambda \end{cases}$$

Cramer, Vandermonde

Version matricielle

$A \in M_n(k)$ diagonalisable $\quad Sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$

$\exists\, P_1, \ldots, P_r$ (matrices dans base can des proj spectraux)

tq $A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i$, $\quad P_i P_j = \delta_{ij} P_i$

et $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k P_i$

ex $\quad A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \quad b \neq 0$, A^k ?

$A - (a-b) I_n = \begin{pmatrix} b & \cdots & b \\ \vdots & & \vdots \\ b & \cdots & b \end{pmatrix}$ de rang 1, TdR

$\alpha = a - b$ vap, $m_\alpha \geq n-1 = \dim E_\alpha$

$\mathrm{tr}\, A = n a$, autre vap $\beta = a + (n-1) b$

2 vap $\begin{cases} \alpha \to m_\alpha = n-1 \to E_\alpha \text{ de dim } n-1 \\ \beta \to m_\beta = 1 \longrightarrow E_\beta \quad 1 \end{cases}$

donc A diagonalisable, il existe P_α, P_β tq

$$\begin{cases} I_n = P_\alpha + P_\beta \\ A = \alpha P_\alpha + \beta P_\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_\alpha = \dfrac{A - \beta I_n}{\alpha - \beta} \\ P_\beta = \dfrac{A - \alpha I_n}{\beta - \alpha} \end{cases}$$

$P_\alpha P_\beta = \delta_{\alpha\beta} P_\alpha \longrightarrow \forall k,\ A^k = \alpha^k P_\alpha + \beta^k P_\beta$

Exercice : diagonalisation simultanée

Lemme (commutation) E kev $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tq $u \circ v = v \circ u$

Alors v stabilise $\mathrm{Im}\, u$, $\mathrm{Ker}\, u$ et les sep de u

Démo $\quad$ Im u $\quad \forall y \in \mathrm{Im}\, u$, $\exists x \in E / y = u(x)$

$v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \Rightarrow v(y) \in \mathrm{Im}\, u$

$\longrightarrow \mathrm{Im}\, u$ est v-stable

Ker u

$\forall x \in \operatorname{Ker} u$, $u(x) = 0$ et $v(x) \in \operatorname{Ker} u$ car

$u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} u$ v-stable □

On peut montrer de même $E_\lambda(u)$ v-stable.

Csq : prop E Kevdf, $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables et $u \circ v = v \circ u$

Alors il existe une base de E propre pour u et v

démo $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ vap de u

u dz : $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}(u)$

diagonalisable

chaque $E_{\lambda_j}(u)$ est v-stable (cf Lemme)

soit $v_j \in \mathcal{L}(E_{\lambda_j}(u))$ induit par v, dz ?

v dz $\Rightarrow \exists P$ scindé ds $K[X]$ racines simples

tq $P(v) = 0$, alors $P(v_j) = 0$.

($x \in E_{\lambda_j}(u)$, $P(v_j)(x) = P(v)(x)$)

donc v_j dz

donc $\exists$ base de $E_{\lambda_j}(u)$ $\mathcal{B}_j = (e_{j,1}, \dots, e_{j,m_j})$ formée de vep propre pour v_j u

$\mathcal{B} = (e_{1,1}, \dots, e_{1,m_1}, \dots, e_{r,1}, \dots, e_{r,m_r})$ convient

5) Trigonalisation

ⓐ Def (1) E Kevdf $n \geq 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$

ODQ u trigonalisable s'il existe 1 base $\mathcal{B}$ de E tq $M_\mathcal{B}(u)$ soit tri sup.

(2) $A \in M_n(K)$ est dite trigonalisable si son endo can ass l'est, c'est équivalent à A semblable dans $M_n(K)$ à 1 matrice tri sup

Rem ① $M_\mathcal{B}(u)$ tri sup $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ $M_\mathcal{B}(u) = T = \begin{pmatrix} t_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix}$

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{j} T_{ij} e_i \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_j)$

si $M_{\mathcal{C}}(u) = T'$ tri inf $\quad \mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$

on transforme $\mathcal{C}$ en $\mathcal{B} = (c_n, \dots, c_1)$

② matriciellement : $A = PTP^{-1} \Rightarrow {}^tA = {}^tP^{-1}\,{}^tT\,{}^tP$, $Q = {}^tP \in GL_n(K)$

T tri inf $\Leftrightarrow$ ${}^tT$ tri sup

③ trigonalisation de u ou A

- sans contrainte ...
- avec ______ , T donnée , "lecture de la base" pour construire $\mathcal{B}$

$\boxed{\text{Ex}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 1) trigonaliser A librement 2) A semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) recherche des élts propres

$\operatorname{rg} A = 1 \rightarrow 0$ vap , $E_0(A)$ de dim 2 (plan d'eqn dans base can $x + y - 2z = 0$)

$\operatorname{tr} A = 0 \Rightarrow m_0 = 3$

$\Rightarrow A$ non dgz

vérifient l'eqn de E_0 $\qquad$ ne vérif pas l'eqn de E_0

$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ libre $\quad a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ can ass

$\mathcal{B}$ base tq. $M_{\mathcal{B}}(a)$ trigonale , on complète $\mathcal{B}$ avec $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vap

$A\varepsilon_1 = 0 \quad A\varepsilon_2 = 0$

calcul pour trouver α, β

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A\varepsilon_3 = \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) trouver 1 base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ tq $M_{\mathcal{C}}(a) = T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ie $\begin{cases} a(v_1) = 0 \\ a(v_2) = 0 \\ a(v_3) = v_2 \end{cases}$ $v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} a$ avec $\operatorname{Ker} a$ plan d'eqn $\Rightarrow v_2 \in \operatorname{Im} a \quad x + y - 2z = 0$

$\operatorname{Im} a$ droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (cf rg A)

$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = T$

③ Critères

Théorème E K-evdf, $u \in \mathcal{L}(E)$. Les prop suivantes sont équi:

(1) u trigonalisable

(2) χ_u scindé ds $K[X]$

(3) u annule 1 pol $P \in K[X]$, $P \neq 0$, P scindé ds $K[X]$

Π -

idem pour matrices...

démo (1) ⟹ (2) évident

si B base de E tq $M_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

alors $\chi_u(X) = \prod(\lambda_i - X)$

(2) ⟹ (3) $P = \chi_u$ ann de u

(3) ⟹ (2) soit $P \in Ann(u)$, $\mathcal{B}$ base ~~qcq~~ de E, $A = M_{\mathcal{B}}(u)$

$A \in M_n(\mathbb{C})$ $K \subset \mathbb{C}$, Π_A, χ_A ds $\mathbb{C}[X]$

m̂ racines Π_A / P ds $\mathbb{C}[X]$

P scindé ds $K[X]$, ses racines ds K

(2) ⟹ (1) démo par récurrence $n = 1$, ok...

on prend $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n$

tq χ_u scindé ds $K[X]$ avec $\chi_u(X) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda_j - X)$

λ_1 vap de u, e_1 vep associé

→ compléter (TBI) $(e_1, -, e_n) = B$ base de E

$M_B(u) = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \\ 0 & \boxed{*} \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right]$ of $u(e_1) = \lambda_1 e_1$

soit $E' = Vect(e_2, -, e_n)$ $\dim E' = n-1$

$u_{/E'} : E' \to E$ <u>MAIS</u> E' n'est pas forcément u-stable

soit p projection sur E' //^{t} à Ke_1

soit $v : \begin{array}{rcl} E' & \longrightarrow & E' \\ x & \longmapsto & p(u(x)) \end{array}$ $\in \underline{\mathcal{L}(E')}$

HR : χ_v scindé ds $K[X]$?

$2 \leq j \leq n$; $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$, $p(u(e_j)) = \sum_{i=2}^{n} a_{ij} e_i$

$\Rightarrow \boxed{*} = M_{B'}(v) = A'$ avec $B' = (e_2, \ldots, e_n)$

$\chi_A = \chi_u = (\lambda_1 - X)\,\chi_{A'}$ $\Rightarrow$ χ_v scindé ds $\mathbb{K}[X]$

on applique HR à $v \in \mathcal{L}(E')$, il existe 1 base $B'' = (\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ de E' tq $M_{B''}(v)$ tri sup

$\mathcal{C} = (e_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ convient : base de E et $M_{\mathcal{C}}(u)$ tri sup $\square$

(base : $E = \mathbb{K}e_1 \oplus E'$

$u(e_1) = e_1$

$2 \leq j \leq n$; $v(e_j) = p(u(\varepsilon_j)) = \sum_{i=2}^{j} b_{ij}\,\varepsilon_i$ (traduit $M_{B''}(v)$ tri sup)

d'où ($\ker p = \mathbb{K}e_1$) $u(\varepsilon_j) = b_{1j}e_1 + \sum_{i=2}^{j} b_{ij}\,\varepsilon_i$

$M_{\mathcal{C}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & b_{1j} \\ \hline 0 & \begin{matrix} \ddots & b_{ij} \\ 0 & \ddots \end{matrix} \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right)$ tri sup)

© autres réductions $u \in \mathcal{L}(E)$

construire B tq $M_B(u)$ soit réduite sous la forme la plus simple possible

NB diagonalis(able) — trigonalis(able)

$\Longrightarrow$ semblable

$\neq$ équivalente (Gauss)

diagonalisat° par blocs

Prop E kevdf, $u \in \mathcal{L}(E)$, $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$

u stabilise chaque sev $F_i \Leftrightarrow \forall$ base B de E adaptée à $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$, $M_B(u) = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_p \end{pmatrix}$ où $D_i \in M_{\dim F_i}(\mathbb{K})$

III Applis de la réduction

1) Utilisation de la similitude

ⓐ Endos

E Kev, si $v \in GL(E)$ $\varphi_v : u \mapsto v \circ u \circ v^{-1}$
$\mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$

φ_v = automorphisme d'algèbre

- bijectif $\forall w \in \mathcal{L}(E), \exists! u \in \mathcal{L}(E), \varphi_v(u) = w$
  $(u = \varphi_{v^{-1}}(w))$
- $\varphi_v(u + \lambda u') = \_\_\_ = \varphi_v(u) + \lambda \varphi_v(u')$
- $\varphi_v(u \circ u') = v \circ u (v^{-1} \circ v) \circ u' \circ v^{-1} = \varphi_v(u) \circ \varphi_v(u')$
- $\varphi_v(id_E) = id_E$

De plus $\forall v, w \in GL(E)$, $\varphi_w \circ \varphi_v = \varphi_{w \circ v}$

$\left(\begin{array}{l} v \mapsto \varphi_v \\ (GL(E), \circ) \to (Aut(\mathcal{L}(E)), \circ) \end{array} \quad \text{morphisme de groupes} \right)$

CQ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi_v(u^k) = (\varphi_v(u))^k$

si pour u donné, on connaît $v \in GL(E)$ avec $\varphi_v(u)$ simple
alors on peut calc les puissances.

Prop $u \in \mathcal{L}(E)$, $v \in GL(E)$, $u' = \varphi_v(u)$, alors
- $Sp(u) = Sp(u')$
- si $\lambda \in Sp(u)$, x vep associé alors $v(x)$ vep associé à u'

$\lambda \in Sp(u)$, $x \in E$, $x \neq 0$

$u(x) = \lambda x \Leftrightarrow v \circ u \circ v^{-1}(v(x)) = \lambda v(x)$
$x \neq 0 \Leftrightarrow v(x) \neq 0$

NB si E df, $\chi_u = \chi_{\varphi_v(u)}$:
$\det(u - X id_E) = \det(v \circ (u - X id_E) \circ v^{-1}) = \det(\varphi_v(u) - X id_E)$

ⓑ Matrices

$P \in GL_n(K)$, $\varphi_P : M \mapsto PMP^{-1}$ automorphisme de $M_n(K)$

$P, Q \in GL_n(K)$ $\varphi_P \circ \varphi_Q = \varphi_{PQ}$

Si $M' = \varphi_P(M)$ alors

- $\forall k \in \mathbb{N}, \ M'^k = \varphi_P(M^k)$
- $\chi_{M'} = \chi_M \qquad sp(M') = sp(M)$

  $tr\, M' = tr\, M \qquad \det M' = \det M$

2) Puissances

Méthode 1 réduction of A

$\boxed{ex}$ $\quad M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad M$ dgz, $sp(M) = \{4, 2\}$

$E_4 : x = y \ , \quad E_2 : x = -y$

$E_4 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$M = PDP^{-1} \Rightarrow M^k = P\begin{pmatrix} 4^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}P^{-1} = \ldots$

Méthode 2 utiliser la décomposition spectrale

$\exists P_2, P_4$ tq $\begin{cases} I_2 = P_2 + P_4 \\ M = 2P_2 + 4P_4 \end{cases}$

$P_2 = \frac{M - 2I_2}{2} \ ; \ P_4 = \frac{4I_2 - M}{2}$

$\Rightarrow M^k = 2^k P_2 + 4^k P_4 \ \ldots$

Méthode 3 Binôme $\quad \triangle \ \begin{cases} u = v + w & \text{avec } v\circ w = w \circ v \\ U = V + W & \text{— } VW = WV \end{cases}$

$\Rightarrow u^k \ / \ U^k \ \ldots$

$M = 2I + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Méthode 4 Utilisation du PN ann, on cherche $\begin{vmatrix} u^k / P(u) \\ A^k / P(A) \end{vmatrix}$ $(P \in \mathbb{K}[X])$

Si on connait 1 PN ann S de u (resp A)

$\rightarrow$ DE de $\begin{array}{l|l} X^k & \\ P & \end{array}$ par S $\qquad \begin{array}{l} X^k = Q_k S + R_k \rightarrow u^k = R_k(u) \\ P = QS + R \rightarrow P(u) = R(u) \end{array}$

pour det le reste, on utilise les racines de S

ex $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_M = (1-X)^2(2-X)$

M non dgz : $rg(M - I_3) = rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$

et $\dim E_1(M) = 1 < m_1$ $\qquad$ M^k ?

$\Pi_M = (X-1)^2(X-2)$ car $(X-1)(X-2)$ impossible sinon M dgz

$\rightarrow$ DE de X^k par Π_M $\quad$ reste $\rightarrow$ degré $= 2$

$X^k = Q_k \Pi_M + \underbrace{(a_k X^2 + b_k X + c_k)}$, on dérive : pour utiliser la racine double de Π

$$\begin{cases} 1^k = a_k + b_k + c_k \\ k = 2a_k + b_k \\ 2^k = 4a_k + 2b_k + c_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_k = 2^k - c_k \\ a_k = -1 - k + 2^k \\ b_k = 2 + 3k - 2^{k+1} \end{cases}$$

Mais $M^k = a_k M^2 + b_k M + c_k I_3$

3) Commutant

(a) E Kev, $u \in \mathcal{L}(E)$

Prop $\left| \begin{array}{l} \mathcal{C}_u = \{ v \in \mathcal{L}(E) / u \circ v = v \circ u \} \\ \mathcal{C}_u \text{ sous-algèbre de } \mathcal{L}(E) \text{ contenant "} K[u] \text{"} \\ \text{avec } K[u] = \{ P(u) / P \in K[X] \} \end{array} \right.$

démo : sev de $\mathcal{L}(E)$ car noyau de $\left| \begin{array}{l} v \mapsto (v \circ u - u \circ v) \text{ linéaire} \\ \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E) \end{array} \right.$

- stable par $\circ$ $\quad v, w \in \mathcal{C}_u$

$u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w = (v \circ u) \circ w = v \circ (u \circ w) = v \circ (w \circ u)$

$\Rightarrow v \circ w \in \mathcal{C}_u$

- $\forall k \in \mathbb{N}, u^k \in \mathcal{C}_u$

Bon cas = u dgz et $\in$ df

Prop E Kerdf, $u \in \mathcal{L}(E)$ $\underline{dgz}$

- Pour $v \in \mathcal{L}(E)$, v commute avec u ssi v stabilise les sep de u

- $\Phi : \left| \begin{array}{l} v \longmapsto (v_1, \ldots, v_p) \\ \mathcal{C}_u \longrightarrow \mathcal{L}(E_{\lambda_1}(u)) \times \ldots \times \mathcal{L}(E_{\lambda_p}(u)) \end{array} \right.$ où $v_i \in \mathcal{L}(E_{\lambda_i}(u))$ induit par v

Φ isomorphisme, $\dim \mathcal{C}_u = \sum_{i=1}^{p} \dim^2 E_{\lambda_i}(u)$

Démo • $\underline{\text{En g}^{al}}$ si $v \circ u = u \circ v$ les sep de u sont stabls par v

$\underline{\text{réciproque}}$ vraie car u dgz

$E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}(u)$

soit $x = x_1 + \ldots + x_p$

où $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$ et $v(x_i) \in E_{\lambda_i}(u)$

$u(x) = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p$

$v(x) = v(x_1) + \ldots + v(x_p)$

$\left. \begin{array}{l} u \circ v = \lambda_1 v(x_1) + \ldots + \lambda_p v(x_p) \\ v \circ u = \lambda_1 v(x_1) + \ldots + \lambda_p v(x_p) \end{array} \right|$ $\underline{v \circ u = u \circ v}$

•• Φ linéaire (clair) cf $v \mapsto v_i$ linéaire

$(v + \lambda w)_i = v_i + \lambda w_i$, $\overline{m}$ action sur tt vecteur de $E_{\lambda_i}(u)$

$\Phi(v + \lambda w) = (v_1 + \lambda w_1, \ldots, v_p + \lambda w_p) = \ldots = \Phi(v) + \lambda \Phi(w)$

soit $(w_1, \ldots, w_p) \in \mathcal{L}(E_{\lambda_1}(u)) \times \ldots \times \mathcal{L}(E_{\lambda_p}(u))$

Trouver unique antécédent v / $v_i = w_i$

$x \in E$, $x = x_1 + \ldots + x_p$ $\quad x_i \in E_{\lambda_i}(u)$

$v(x) = w_1(x_1) + \ldots + w_p(x_p)$ $\quad v \in \mathcal{C}_u$ car il stabilise les sep $E_{\lambda_i}(u)$

$\underline{\text{ccl}}$ $\dim \mathcal{C}_u = \sum \dim^2 E_{\lambda_i}(u)$

$\underline{\text{Variante matricielle}}$ $\quad E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}(u)$

$v \in \mathcal{C}_u$, $\mathcal{B}$ base adaptée à la somme directe

$M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_p \end{pmatrix}$ où $D_i \in M_{m_i}(\mathbb{K})$

$m_i = \dim E_{\lambda_i}(u)$

ⓑ Matrices

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\mathcal{C}_A = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,/\, AB = BA\}$

$\mathcal{C}_A$ ss-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contenant $\mathbb{K}[A] = \{P(A) / P \in \mathbb{K}[X]\}$

$\longrightarrow$ réduire A $A = PA'P^{-1}$ avec A' simple
$P \in GL_n(\mathbb{K})$

$\mathcal{C}_A \Longleftrightarrow \mathcal{C}_{A'}$

Bon cas : A dgz $\mathcal{C}_A = \mathbb{K}(A)$?

NB $\dim \mathbb{K}[A] = d^\circ \pi_A$

4) Racines

ⓐ $u \in \mathcal{L}(E)$

- $v \in \mathcal{L}(E)$ tq $v^2 = u$
  tq $v^p = u$
  ($P \in \mathbb{K}[X]$) tq $P(v) = u$

rem fondamentale : $v \circ u = u \circ v \Leftarrow v$ sol

ⓑ $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $B^2 = A$, $B^p = A$, $P(B) = A$

rem fondamentale : $AB = BA$, $B \in \mathcal{C}_A$

Rem vap de B en fct des vap de A

Prop $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $P \in \mathbb{C}[X]$

Alors $Sp_{\mathbb{C}} P(B) = \{P(\lambda) / \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(B)\}$

NB Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Rem cas particuliers, grâce à det ou nilpotence

ex • $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tq $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

$(\det B)^2 = -1 \Longrightarrow$ impossible ds $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

• $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

B diag cf $BA = AB$ $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$B^2 = A \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = -1 \\ \beta^2 = 1 \end{cases}$ sol : $B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

5) Suites vérifiant 1 relation de récurrence linéaire

a) vectorielles

$E = \mathcal{M}_{n,1}(K) \equiv K^n$

$(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ tq $\forall k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = A X_k$

où $A \in \mathcal{M}_n(K)$ donnée $\Leftrightarrow X_k = A^k X_0$

Ex $\begin{cases} u_{k+1} = 2u_k + v_k + w_k \\ v_{k+1} = u_k + 2v_k + w_k \\ w_{k+1} = u_k + v_k + 2w_k \end{cases}$ $X_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$Sp\,A = \{4, 1\}$ $rg(A - I) = 1$ $\dim E_1 = 2$

somme ligne constante — double of trace

A dgz

$\Pi_A = (X-4)(X-1)$ DE de X^k par Π_A

$X^k = Q_k \Pi_A + (a_k X + b_k) \Rightarrow \begin{cases} 4^k = 4a_k + b_k \\ 1 = a_k + b_k \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_k = \dfrac{4^k - 1}{3} \\ b_k = \dfrac{4 - 4^k}{3} \end{cases}$ et $A^k = a_k A + b_k I$

$X_k = A^k X_0$, $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow X_k = a_k A X_0 + b_k X_0 = \dots$

b) Scalaires

$u \in K^{\mathbb{N}}$ vérifiant 1 relat° de rec linéaire d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$:

$\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{k+p} = \alpha_0 u_k + \alpha_1 u_{k+1} + \dots + \alpha_{p-1} u_{k+p-1}$

$\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}$ données

$$\mathcal{S} = \left\{ u \in K^{\mathbb{N}} \,/\, \forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+p} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u_{k+i} \right\}$$

$\boxed{p = 1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $u_{k+1} = \alpha u_k$ suite géom raison α

$\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = \alpha^k u_0$

$\boxed{p = 2} \longrightarrow$ MPSI

qq résultats généraux :

$\boxed{P_1}$ $\mathcal{S}$ Kev de dim p (isomorphe à $\mathcal{M}_{p,1}(K) = E$: $u \mapsto \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{p-1} \end{pmatrix}$, $\mathcal{S} \to E$)

$\boxed{P_2}$ $\mathcal{T}$ isomorphe à S par $u \mapsto \begin{pmatrix} u_k \\ \vdots \\ u_{k+p-1} \end{pmatrix}$

où $S = \{ (X_k) \in E^{\mathbb{N}} \ / \ \forall k \in \mathbb{N},\ X_{k+1} = A X_k \}$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ \alpha_0 & \cdots & & \alpha_{p-1} \end{pmatrix}$

$u \in \mathcal{T}$ $\quad X_k = \begin{pmatrix} u_k \\ \vdots \\ u_{k+p-1} \end{pmatrix}$

$\Updownarrow$

$\forall k \in \mathbb{N} \quad X_{k+1} = A X_k \qquad X_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ \vdots \\ u_{k+p-1} \end{pmatrix}$

$\boxed{ex}$ <u>suite de Fibonacci</u> $\quad \begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$

$X_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} \quad X_{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ relation de dépendance

$X_n = A^n X_0 \ \ldots$

<u>Bon</u> cas : A dgz, décompo spectrale $\to A^k$ et X_k

$\boxed{P3}$ recherche des suites géom de $\mathcal{T}$

$(r^k) \in \mathcal{T} \iff r^p = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i r^i \quad (*)$ $\quad$ éqn caractéristique associée à $\mathcal{T}$

En effet, $(r^k) \in \mathcal{T} \iff \forall k \in \mathbb{N},\ r^{p+k} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i r^{i+k}$

$\implies k = 0 \quad (*)$

$\impliedby \times r^k \quad (*)$

<u>Rem</u> $\chi_A(\lambda) = (-1)^p \left[\lambda^p - \sum_0^{p-1} \alpha_i \lambda^i \right]$ $\quad$ cf ${}^tA$ compagnon

$\boxed{P4}$ si $(*)$ possède p racines distinctes ds K $r_1, \ldots, r_p$

alors $\mathcal{T} = \left\{ \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j r_j^k \right)_{k \in \mathbb{N}} \ / \ \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K \right\}$

on a p suites géom <u>indépendantes</u>

si $\forall k \quad \sum_{j=1}^{p} \lambda_j r_j^k = 0$

$k = 0, \dots, p-1 \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & \cdots & r_p \\ \vdots & & \vdots \\ r_1^{p-1} & \cdots & r_p^{p-1} \end{pmatrix}}_{V} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = 0$ $\qquad$ V de Vandermonde inversible

$\boxed{\text{Rem}}$ résultat général

$\tau : (u_n) \longmapsto (u_{n+1})$

$\quad K^{\mathbb{N}} \longrightarrow K^{\mathbb{N}}$ $\qquad$ soit $F = K^{\mathbb{N}}$

$\mathrm{Ker}\,(\tau - \alpha\, id_F) = \left\{ \lambda (\alpha^k)_{k\in\mathbb{N}} \;/\; \lambda \in K \right\}$

$\tau^i : (u_n) \mapsto (u_{n+i})$

$\mathcal{S} = \left\{ u \in F \;/\; \forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+p} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{k+i} \right\}$

$\mathcal{S} = \mathrm{Ker}\, f$ où $f : u \longmapsto \left(u_{k+p} - \sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{k+i}\right)$

$f = \tau^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i \tau^i = P(\tau)$

TDN $\quad$ si P scindé ds $K[X]$, $P = \prod_{j=1}^{r} (X - r_j)^{m_j}$

$P_j = (X - r_j)^{m_j}$, $P_j \wedge P_i = 1$ si $j \neq i$

$\mathcal{S} = \mathrm{Ker}\, P(\tau) = \mathrm{Ker}\, P_1(\tau) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\, P_r(\tau)$

on montre

$\mathrm{Ker}\, P_j(\tau) = \left\{ \left(\left(\sum_{i=0}^{m_j - 1} w_{i,j} k^i \right) r_j^k \right)_{k\in\mathbb{N}} \;/\; w_{0,j}, \dots, w_{m_j-1,j} \in K \right\}$

Rappel $\quad$ cas $p = 2$ (MPSI) $\qquad K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $a, b \in K$

$\mathcal{S} = \left\{ u \in K^{\mathbb{N}} \;/\; \forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+2} = a u_{k+1} + b u_k \right\}$

- $\mathcal{S}$ est Kev de dim 2 $\left(\begin{matrix} u \longmapsto (u_0, u_1) \text{ isomorphisme} \\ \mathcal{S} \longrightarrow K^2 \end{matrix} \right)$

•• $(r^k) \in \mathcal{S} \iff r^2 = ar + b \quad (*)$ $\qquad$ 3 cas :

① $(*)$ possède 2 racines distinctes $r_1, r_2 \in K$ ($\Delta \neq 0$ si $K = \mathbb{C}$, $\Delta > 0$ si $K = \mathbb{R}$)

$\mathcal{S} = \left\{ (\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \;/\; (\lambda, \mu) \in K^2 \right\}$

② $K = \mathbb{R}$, $\Delta < 0 \longrightarrow$ 2 racines $r_1, \bar{r_1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\quad r_1 = \rho e^{i\theta}$

$\mathcal{S} = \left\{ \left(\rho^n (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}} \;/\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

① $\Delta > 0$ 1 racine r_1 $\mathcal{S} = \{(\lambda + \mu\, n) r_1^n \,/\, (\mu, \lambda) \in K^2\}$

7) Conclusion

→ Réductions HP Jordan / Dunford-Jordan

utilisation des sev caractéristiques :

E kevdf, $u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u scindé ds $K[X]$

$\mathrm{Sp}\, u = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ $\chi_u = \prod_{j=1}^{p} (\lambda_j - X)^{m_j} \in \mathrm{Ann}(u)$

TDN $E = \bigoplus_{j=1}^{p} \underbrace{\ker\left(p - \lambda_j\, id_E\right)^{m_j}}_{u \text{ stable}}$

ds 1 base adaptée $M_B(u) = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_p \end{pmatrix}$

D_j n'a que 1 seule vap λ_j

soit $\tilde{u}_j \in \mathcal{L}(\ker_{\lambda_j}(u))$ induit par u

$\tilde{u}_j = \lambda_j\, id + \nu_j$ ν_j nilpotent

$\Longrightarrow u = \underset{\text{dgz}}{d} + \underset{\text{nilpotent}}{n}$ $dn = nd$

Th) $u \in \mathcal{L}(E)$, E kevdf, χ_u scindé ds $K[X]$

u se décompose sous la forme (unique) :

$u = d + n$ avec $\begin{cases} d & \text{dgz} \\ n & \text{nilpotent} \\ dn = nd \end{cases}$

Th$_1$) $A \in M_n(\mathbb{C})$ décomposable en $A = D + N$

Dunford-Jordan

où D dgz, N nilp, $DN = ND$

Th$_2$) $u \in \mathcal{L}(E)$, E kevdf, χ_u scindé ds $K[X]$

Jordan

Alors il existe une base B de E tq $M_B(u) = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_r \end{pmatrix}$

où chaque D_i est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$

ie $M_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$