Géométrie
Chapitre 3

Courbes et Surfaces

I) Plan tangent à 1 surface

1) Surface paramétrée

$E = \mathbb{R}^3$ (plus gal^t, $\mathbb{R}$ev dim 3 euclidien) orienté et muni ps can (base can = BOND)

$S \subset E$ paramétrée par (U, f) nappe paramétrée
où U ouv de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^1(U, E)$
$S = f(U)$ support de la nappe

Déf Soit (U, f) une nappe paramétrée, U ouv de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^3)$. Alors $M = f(u, v)$ régulier si $df(u,v)$ de rang 2 ie $(D_1 f(u,v), D_2 f(u,v))$ libre
Dans ce cas le plan tangent à $S = f(U)$ en M est le plan affine passant par M de direction vect$(D_1 f(u,v), D_2 f(u,v))$

$$\Pi_M = \{ M + x D_1 f(u,v) + y D_2 f(u,v) \; / \; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

de vecteur normal $N_M = D_1 f(u,v) \wedge D_2 f(u,v)$.
la normale à S en M est la droite affine passant par M dirigée par N_M.

SCE, justification pt voisin de M sur S

$A = (u, v)$, $H = (h, k)$

$$f(u+h, v+k) = f(u,v) + h D_1 f(u,v) + k D_2 f(u,v) + o(\|H\|)$$

$L = df(u,v) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, E)$

• M régulier si $df(u,v)$ de rang 2 ie $(D_1 f(u,v), D_2 f(u,v))$ libre

$\iff D_1 f(u,v) \wedge D_2 f(u,v) \neq 0$ (NB : donne un plus N_M)

<u>Traductions pratiques</u> $\mathcal{R}$ ROND de E $\mathcal{R} = (O, i, j, k)$

$M = f(u,v)$: coord ds $\mathcal{R}$: $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))_{\mathcal{R}}$

ie $M = O + x_{u,v}\, i + y_{u,v}\, j + z_{u,v}\, k$

$D_1 f(u,v) = \dfrac{\partial M}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \text{---}$

$D_2 f(u,v) = \text{--}$

$N_M = \dfrac{\partial M}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial M}{\partial v} = \alpha_{u,v}\, i + \beta_{u,v}\, j + \gamma_{u,v}\, k$

<u>eqn de Π ds $\mathcal{R}$</u> : $P \in \Pi_M \iff \left(MP, \dfrac{\partial M}{\partial u}, \dfrac{\partial M}{\partial v}\right)$ liée

$\iff MP \cdot N_M = 0$

$\alpha_{u,v}(X - x_{u,v}) + \beta_{u,v}(Y - y_{u,v}) + \gamma_{u,v}(Z - z_{u,v}) = 0$

<u>Ex</u> $E = \mathbb{R}^3$, ps can, base can BOND, $\mathcal{R}$ ROND can

$f(u,v) = (u+v, uv, u^2+v^2)$ $\quad * M = f(1,1) = (2,1,2)$

M régulier / S ? $\dfrac{\partial f}{\partial u} = (1, v, 2u)$ en $(1,1)$: $(1,1,2)$

$\dfrac{\partial f}{\partial v} = (1, u, 2v)$ en $(1,1)$: $(1,1,2)$

d'où M non régulier, pas de plan tangent

$** M = f(0,1) = (1,0,1)$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial u}(0,1) = (1,0,2)$

$\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,1) = (1,1,0)$

$N_M = \dfrac{\partial f}{\partial u}(0,1) \wedge \dfrac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \begin{vmatrix} i & 1 & 1 \\ j & 0 & 1 \\ k & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, +2, 1) \neq 0$

$\Rightarrow M$ régulier et eqn de Π_M ds $\mathcal{R}$: $-2(X-1) + 2(Y-0) - 1(Z-1) = 0$

<u>Cas particuliers</u>

1) <u>Nappe cartésienne</u>

→ paramétrage de S au moyen de 2 coord du point ds R ROND
x, y

R ROND $\quad R = (O, i, j, k) \qquad M = O + x i + y j + z k$

$z = \varphi(x,y)$ où $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$, U ouvert de $\mathbb{R}^2$, S d'eqn $z = \varphi(x,y)$, param par :

$M = f(x,y) = O + x i + y j + \varphi(x,y) k$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = i + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} k \; ; \; \dfrac{\partial f}{\partial y} = j + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} k$ toujours indépendants

⇒ Une nappe cartésienne est régulière, tous ses points sont réguliers.

(Monge) $p = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \qquad q = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)$

$$N_M = \begin{vmatrix} i & 1 & 0 \\ j & 0 & 1 \\ k & p & q \end{vmatrix} = -(pi - qj) + k$$

eqn de Π_M ds R : $M : (x, y, z)_R$ avec $z = \varphi(x,y)$

$$-[p(X-x) + q(Y-y)] + [Z - z] = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Z - z = p(X-x) + q(Y-y)}}$$

Prop S nappe cartésienne d'eqn $z = \varphi(x,y)$ ds R ROND, l'eqn du PT à S en $M_0 : (x_0, y_0, z_0)_R$ est

$$Z - z_0 = p(X - x_0) + q(Y - y_0) \quad \text{avec} \begin{cases} z_0 = \varphi(x_0, y_0) \\ p = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \\ q = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Ex $E = \mathbb{R}^3$ $\quad S$ d'eqn ds repère can R $\quad z = x^2 + y^2$

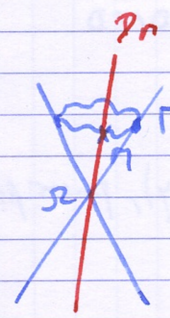
$M = (1,1,2)$ eqn du plan tgt à S en M

NB : S paraboloïde de révolution d'axe Oz

eqn du PT à S en M : $Z - 2 = 2[(X-1) + (Y-1)]$

$\Rightarrow \underline{Z = 2X + 2Y - 2} \qquad \left(p = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(1,1) = 2 \;,\; q = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1) = 2\right)$

2] Cas des nappes coniques, cyl ou de révolution



- **Cône** S de sommet Ω et 1 directrice Γ rencontrant toutes les génératrices de S en dehors de S

$M \in \Gamma$, $M \neq \Omega$, D_M droite affine passant par M & S

$S = \bigcup_{M\in\Gamma} D_M$ d'où un paramétrage de S :

Γ courbe paramétrée par φ $\Gamma = \{\varphi(t),\ t\in I\}$ $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, E)$

(I int de $\mathbb{R}$) ; $D_M = \{\Omega + \lambda(M-\Omega) \,/\, \lambda\in\mathbb{R}\}$ génératrice de S

d'où $f(\lambda,t) = \Omega + \lambda(\varphi(t) - \Omega)$ $(\lambda,t)\in \mathbb{R}\times I = U$

$f\in\mathcal{C}^1(U,E)$ $(\lambda_0,t_0)\in U$

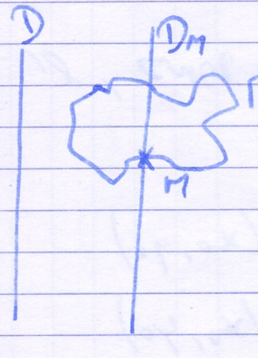
$\frac{\partial f}{\partial\lambda}(\lambda_0,t_0) = \varphi(t_0)$ $\frac{\partial f}{\partial t}(\lambda_0,t_0)=\lambda_0\varphi'(t_0)$

d'où Π_{M_0} si M_0 régulier.

NB 1 Ω non régulier cf $\lambda_0 = 0$

NB 2 $\lambda_0 \neq 0$ N_{M_0} colinéaire à $\varphi(t_0)\wedge\varphi'(t_0)$ indep de λ_0

le plan tgt à S est constant le long d'1 génératrice



- •• **cylindre** de direction $D = \mathbb{R}u$ ($u\in E$, $u\neq 0$) de directrice Γ rencontrant toutes les génératrices

$M\in\Gamma$, on note $D_M = \mathcal{D}(M,u)$; $S = \bigcup_{M\in\Gamma} D_M$

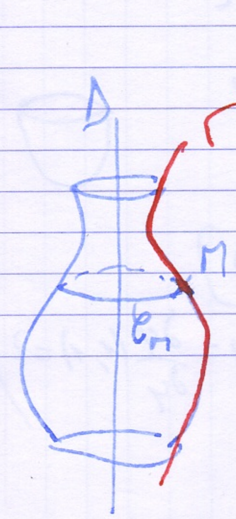
si $\Gamma = \{\varphi(t),\ t\in I\}$ où $\varphi\in\mathcal{C}^1(I,E)$, I int de $\mathbb{R}$

$D_M = \{\varphi(t)+\lambda u \,/\, \lambda\in\mathbb{R}\}$ $f(\lambda,t) = \varphi(t)+\lambda u$

$(\lambda,t)\in\mathbb{R}\times I = U$ $f\in\mathcal{C}^1(U,E)$

$M_0 = f(\lambda_0,t_0)$ $\frac{\partial f}{\partial\lambda}(\lambda_0,t_0)=u$ $\frac{\partial f}{\partial t}(\lambda_0,t_0)=\varphi'(t_0)$

N_{M_0} indep de λ_0



- ∴ S de révolution, R repère ON tq Δ axe de révolution = Oz

$S = \bigcup_{M\in\Gamma} \mathcal{C}_M$ Γ "demi" méridienne $M\in\Gamma$, $\mathcal{C}_M$ cercle passant par M, d'axe Δ

$\mathcal{C}_M = \{ Rot_{\Delta,\theta}(M) / \theta \in [0, 2\pi] \}$

si Γ demi-méridienne dans le plan xOz $M \in \Gamma$, $PM = x\,i$

$u_\theta = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j$ avec $Rot_{\Delta,\theta}(i) = u_\theta$

$Rot_{\Delta,\theta}(M) = P + x u_\theta$ $M : (x, 0, z)$

$S = \bigcup_{M\in\Gamma} \mathcal{C}_M$, si Γ paramétrée par φ

$M \in \Gamma$, $M = O + x(t)\, i + z(t)\, k = \varphi(t)$ $|x(t)| = d(M, Oz)$

S paramétrée par f $f(t, \theta) = O + x(t)\, u_\theta + z(t)\, k$

Exemple | $E = \mathbb{R}^3$, prenons S d'équation cartésienne $z^2 = x^2 + y^2$

S cône de révolution, axe Oz, sommet O.

$x = r\cos\theta$ $r \in \mathbb{R}$ $z^2 = r^2$
$y = r\sin\theta$ $\theta \in [-\pi, \pi]$ $\boxed{z = r}$

$f(r,\theta) = r(u_\theta + k)$ $(r,\theta) \in \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) = u_\theta + k$, $\frac{\partial f}{\partial \theta} = r v_\theta$ indép si $r \neq 0$

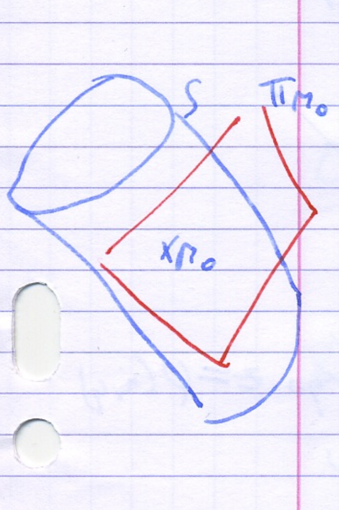
$N_M = r[k - u_\theta]$

2) Position locale de S nappe cartésienne par rapport à son plan tangent en M

R RONd de E S d'équation dans R $z = \varphi(x,y)$

où $\varphi \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, U ouvert de $\mathbb{R}^2$

$M_0 \in S$, $M_0 : (x_0, y_0, z_0)_R$ $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$ $(x_0, y_0) \in U$



Π_{M_0} d'équation $Z - z_0 = p(X - x_0) + q(Y - y_0)$ où $p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)$

$q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$

$\Pi_{M_0}^+$ $Z - z_0 \geq [p(X - x_0) + q(Y - y_0)]$

$\Pi_{M_0}^-$ $Z - z_0 \leq$ ______

M voisin de M_0, $M : (x, y, z)$ $\left| \begin{array}{l} (x,y) \in U \text{ voisin de } (x_0, y_0) \\ z = \varphi(x,y) \end{array} \right.$

Päivää ot kiitos

Luojani, Luoksesi, Anna minun tulla siksi miksi, Lapseni minua Rolle

$M \in \Pi_{M_0}^+$ ou $M \in \Pi_{M_0}^-$? → étude du signe de

$\Delta(M) = \varphi(x,y) - z_0 - [p(x-x_0) + q(y-y_0)] = g(x,y)$

$g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ $\quad g(x_0,y_0) = 0 \quad$ (x_0,y_0) pt critique pour g :

$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = p - p = 0 \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = q - q = 0$

cf étude : g a un extremum relatif en (x_0,y_0)

possible en supposant $\varphi \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ et th de l'extremum

(Monge) $\quad r = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x_0,y_0) \quad s = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \quad t = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x_0,y_0)$

si $rt - s^2 \neq 0$

• si $rt - s^2 > 0$ $\quad g$ admet un extremum relatif (strict)

en M_0, max qd $r < 0$ (ou $t < 0$)

min qd $r > 0$

ie il existe $V \in \mathcal{V}(x_0,y_0)$ $\quad \forall (x,y) \in V, M : (x, y, \varphi(x,y))$

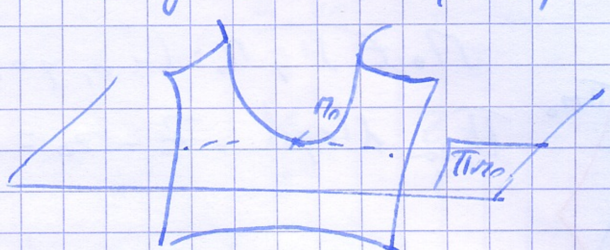
$\Delta(M) \leq 0$ (resp ≥ 0) ie S localement non traversée

par Π_{M_0}, disposition en ballon

•• si $rt - s^2 < 0$ $\quad g$ n'a pas d'extremum relatif en (x_0,y_0)

S traverse Π_{M_0} au voisinage de M_0, disposition en

selle ou en col :



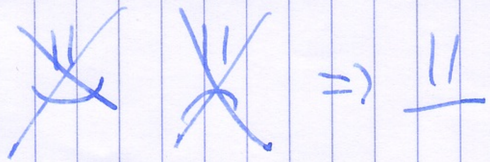
En résumé $\boxed{\text{Prop}}$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ $\quad U$ ouv de $\mathbb{R}^2$, et S d'éqn $z = \varphi(x,y)$

$M = (x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = \varphi(x_0,y_0)$, $(x_0,y_0) \in U$

!!?

xD



XP

- $rt - s^2 > 0$, M_0 point ballon, S ne traverse pas Π_{M_0}
- $rt - s^2 < 0$, M_0 point col/selle, S traverse Π_{M_0}

3) Surface donnée par 1 eqn cart

$E = \mathbb{R}^3$, R rep cart de E, S d'eqn ds R :

$F(x, y, z) = 0$ où $F \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$, V ouv de $\mathbb{R}^3$

ie $S = \{ M : (x, y, z)_R \mid (x, y, z),\ F(x, y, z) = 0 \}$

ex/ $\mathbb{R}^3$, rep can, S d'eqn $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

Rem : $S_+ : z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$

$S_- : z = -\sqrt{}$

Nécessite en général l'usage du th des fcts implicites (cf Poly)

cas particulier n° 1

Th | Soit $F \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$ où V ouv de $\mathbb{R}^3$

Soit $(a, b, c) \in V$ tq $F(a, b, c) = 0$. On suppose que $\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$, alors il existe U ouv de $\mathbb{R}^2$ contenant (a, b) et I ouv de $\mathbb{R}$ contenant c, et $\varphi \in \mathcal{C}^1(U, I)$ tels que

$$\forall (x, y, z) \in U \times I,\ F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = \varphi(x, y)$$

ie eqn en z : $F(x, y, z) = 0$ a une unique sol $z = \varphi(x, y)$

en particulier $c = \varphi(a, b)$

$\forall (x, y) \in U,\ F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ (permet le calcul des DP)

Csq on peut localement paramétrer $S \cap W$, $W \in \mathcal{V}_{M_0}$ par x, y, d'où :

Prop/Def | V ouv de $\mathbb{R}^3$, $F \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$, S d'eqn ds le repère R de $E = \mathbb{R}^3$: $F(x, y, z) = 0$, soit $M_0 : (a, b, c)$

avec $(a,b,c)\in V$ tq $F(a,b,c)=0$ et $dF(a,b,c)\neq 0$

M est dit dit régulier et le PT à S en M_0 d'eqn ds R :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)(X-a)+\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)(Y-b)+\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)(Z-c)=0$$

de vecteur normal $N_{M_0}=\text{grad}\,F(a,b,c)$

<u>Justification</u> hyp : $dF(a,b,c)\neq 0$ il $\exists$ une DP $\neq 0$

par exemple $\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)\neq 0$

th précédent : $S\cap W$ d'eqn $z=\varphi(x,y)$, paramétrée

par $f(x,y)=O+xi+yj+\varphi(x,y)k$

Π_{M_0} d'eqn $Z-c=p(X-a)+q(X-b)$

où $p=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a,b,c)$, $q=\frac{\partial\varphi}{\partial y}(a,b,c)$

$\forall(x,y)\in U$, $F(x,y,\varphi(x,y))=0$ DP % x cheq !

$$1\times\frac{\partial F}{\partial x}(-)+0+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\frac{\partial F}{\partial z}(-)=0$$

$x=a$, $y=b$

$$p=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)},\quad q=\frac{-\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)}{\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)}$$ $\square$

<u>Exemples</u>

<u>Ex 1</u> <u>Surfaces quadriques</u>

R RON, S d'eqn réduite $(E): \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}-1=0$

$$\text{grad}\,F(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{2x_0}{\alpha^2},\frac{2y_0}{\beta^2},\frac{2z_0}{\gamma^2}\right)$$

d'où l'eqn de Π_{M_0} : $\frac{Xx_0}{\alpha^2}+\frac{Yy_0}{\beta^2}+\frac{Zz_0}{\gamma^2}=1$

idem (H_1), (H_2), (PE), (PH)

ex PH : d'eqn ds R RON $\underbrace{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2pz=0}_{F(x,y,z)}$

$F \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $\mathrm{grad}\, F(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{2x_0}{a^2}, -\frac{2y_0}{b^2}, -2p\right) \neq 0$

eqn de Π_{M_0} : $\frac{X x_0}{a^2} - \frac{Y y_0}{b^2} = p(Z + z_0)$

Bilan PT à S défini ds les 2 cas :

PAS GRADIENT (1) Surface paramétrée $M = f(u,v)$ (§1)

$z = \varphi(x,y)$ cas part surface cart (§2)

GRADIENT (2) Surface donnée par eqn cart (§3)
$F(x,y,z) = 0$

4) Courbes tracées sur une surface

S surface de E, Γ courbe tracée sur S $\Gamma \subset S$

1er cas S surface paramétrée (U, f) U ouv $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^1(U, E)$

Γ support d'une courbe paramétrée (I, φ)

I int de $\mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, E)$. On a donc

$(\Gamma \subset U)$ $\forall t \in I$, $\varphi(t) \in S$

$\exists (u,v) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, $\begin{cases} \forall t \in I, & (u(t), v(t)) \in U \\ \varphi(t) = f(u(t), v(t)) \end{cases}$

en $M_0 = \varphi(t_0)$ régulier la tan à Γ en M_0 contenue ds Π_{M_0}

Prop ∀ courbe régulière Γ tracée sur S surface régulière, la tan en M_0 à Γ est contenue ds Π_{M_0} plan tangent à S en M_0.

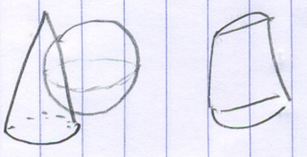
Justification 2 cas

① S paramétrée : $S = f(U)$, $f \in \mathcal{C}^1(U, E)$ U ouv de $\mathbb{R}^2$

$\Gamma = \varphi(I)$, I int de $\mathbb{R}$

$\forall t \in I$, $\varphi(t) \in S \Rightarrow \exists (u(t), v(t)) \in U$, $\varphi(t) = f(u(t), v(t))$

$\varphi \in \mathcal{C}^1(I, E) \Rightarrow u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$



en $M_0 = \varphi(t_0)$ régulier, la tangente à Γ en M_0 est dirigée par $\varphi'(t_0)$

et $\varphi'(t) = u'(t) \frac{\partial f}{\partial u}(u(t), v(t)) + v'(t) \frac{\partial f}{\partial v}(u(t), v(t))$

$\Rightarrow \varphi'(t_0)$ CL de $D_1 f(u_0, v_0)$ et $D_2 f(u_0, v_0)$

$\Rightarrow \varphi'(t_0) \in \Pi_{M_0}$

$P \in \mathcal{T}_{M_0}$: $P = \underbrace{\varphi(t_0)}_{M_0} + \lambda \varphi'(t_0) = M_0 + \lambda[u'(t_0) D_1 f(u_0, v_0) + v'(t_0) D_2 \dots]$

$\Rightarrow P \in \Pi_{M_0}$

(2) S donnée par son eqn cart ds un repère $R(O, i, j, k)$

$F(x,y,z) = 0$ $\quad F \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$, V ouv de $\mathbb{R}^3$

$M \in S \iff \begin{cases} (x,y,z) \in V \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases}$

$\Gamma \subset S$. $\Gamma = \varphi(I)$ I int de $\mathbb{R}$

$\forall t \in I, \varphi(t) \in S \Rightarrow \exists (x(t), y(t), z(t)) \in V, \varphi(t) : (x,y,z)_R$

$\Rightarrow \varphi(t) = O + x(t)\, i + y(t)\, j + z(t)\, k$

en $t_0 \in I$, en $M_0 = \varphi(t_0)$ régulier, la tan à Γ en M_0 dirigée par $\varphi'(t_0)$

eqn de Π_{M_0} ds R : $(X - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (Y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(-) + \dots = 0$

$\forall t \in I$, $F(x,y,z) = 0$, dérivation % à t :

$x'(t)\frac{\partial F}{\partial x}(-) + y'(t)\frac{\partial F}{\partial y}(-) + z'(t)\frac{\partial F}{\partial z}(-) = 0$

en t_0 : $x'(t_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \text{—} = 0$

$\Rightarrow \varphi'(t_0) \in \Pi_{M_0}$ (on R RON, $\varphi'(t_0) \cdot \text{grad}\, F(x_0, y_0, z_0) = 0$)

Csq cas où $\Gamma = S_1 \cap S_2$ $\quad S_1, S_2$ surfaces régulières de E

$M_0 \in \Gamma$ régulier, $\mathcal{T}_{M_0} \subset P_1, P_2$ $\quad P_i$ plan tgt à S_i en M_0

Bon cas : $P_1 \neq P_2$, $\mathcal{T}_{M_0} \subset P_1 \cap P_2 \Rightarrow$ droite affine

et $\mathcal{T}_{M_0} = P_1 \cap P_2$

Prop Si $\Gamma = S_1 \cap S_2$ et $M_0 \in \Gamma$ régulier sur les deux surfaces S_1 et S_2
Si les plans tangents P_1 et P_2 en M_0 resp à S_1 et S_2 sont $\neq$,
alors la tan à Γ en M_0 est la droite $P_1 \cap P_2$.

Ex $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ d'eqn ds R RON car :

$$\begin{aligned} S_1 &: \begin{cases} x^2+y^2+z^2-x-y-z=0 \end{cases} \\ S_2 &: \begin{cases} x^2+y^2-2z=0 \end{cases} \end{aligned} \qquad M_0=(1,1,1)$$

S_i d'eqn $F_i(x,y,z)=0$

$\text{grad}\, F_1(x,y,z) = (2x-1, 2y-1, 2z-1)$

$\text{grad}\, F_2(\text{—}) = (2x, 2y, -2)$

P_1 de VN : $N_1 = \text{grad}\, F_1(1,1,1) = (1, \boxed{1,1})$ } indep

P_2 de VN : $N_2 = \text{grad}\, F_2(1,1,1) = (2, \boxed{2,-2})$

mineur non nul ↓ ou produit vect.

$N_1 \wedge N_2 = (-4, 4, 0) \neq 0 \rightarrow$ dirige $\mathcal{T}_{M_0}$

$\mathcal{T}_{M_0}$ par :

– représentation paramétrique

$P \in \mathcal{T}_{M_0} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ P = M_0 + \lambda(N_1 \wedge N_2)$ $\quad (1,1,1) \in P_1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

– eqn cart ds R $\quad \begin{cases} z=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ $\quad$ ou $P_1 \cap P_2 : \begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

Rem 1 S_1 sphère centre $(1/2, 1/2, 1/2)$, rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$

S_2 paraboloïde de révolution d'axe Oz

Rem 2 S_1, S_2 2 surfaces données par les équations ds R

$\Gamma = S_1 \cap S_2$ $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ (S) on peut chercher un paramétrage de Γ grâce à l'une ds 2 coord x, y ou z

$\longrightarrow$ explicite ... mais ça dépend de F_1 et F_2

→ usage du Th F I

$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z))$ $\quad F \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^2)$

$$J_F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(\longrightarrow) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(\longrightarrow) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(\longrightarrow) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(\longrightarrow) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(\longrightarrow) \end{pmatrix}$$

supposée de rang 2 si $A \in \Gamma$.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(A) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(A) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(A) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(A) \end{vmatrix} \neq 0$$

le Th F I donne : il existe un intervalle I ouvert voisinage de A, et $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ tq $(x,y,z) \in V \cap W_A$

(S) équiv à $\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$ ie localement au vois de A,

$\Gamma \cap W_A$ paramétrée par $\left| \begin{array}{l} x \mapsto (x, \varphi(x), \psi(x)) \\ I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$

I) Courbes planes (tangente)

$E = \mathbb{R}^2$ ou espace euclidien de dim 2, ps can, $\mathcal{R}$ RON can

Γ courbe plane de E ; 2 points de vue :

① Γ donnée par 1 paramétrage : Γ support d'1 AP

(I, φ) I int de $\mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, E)$, $\Gamma = \varphi(I)$

en $M_0 = \varphi(t_0)$ régulier, $\mathcal{T}_{M_0}$ est la droite affine passant par M_0 dirigée par $\varphi'(t_0)$. $\mathcal{T}_{M_0} = \{M_0 + \lambda \varphi'(t_0) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{R}$ RON, $\varphi(t) = O + x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ où $x, y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$

eqn de N_{M_0} ds $\mathcal{R}$: $x'(t_0)(X - x_0) + y'(t_0)(Y - y_0) = 0$

$P \in \mathcal{T}_{M_0} \iff (\overrightarrow{M_0P}, \varphi'(t_0))$ liée $\iff \begin{vmatrix} X - x_0 & x'(t_0) \\ Y - y_0 & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0$

$\iff y'(t_0)(X - x_0) - x'(t_0)(Y - y_0) = 0$

② Γ donnée par son éqn ds R RON $F(x,y)=0$, $F\in\mathcal{C}^1(V,\mathbb{R})$

où V ouv de $\mathbb{R}^2$ ie $M:(x,y)_R$,

$M\in\Gamma \Leftrightarrow (x,y)\in V$ et $F(x,y)=0$

Ex $\mathbb{R}^2$, $\Gamma: x^4+e^{x^2-y^2}+4xy-\cos x=0$, $A=(0,0)\in\Gamma$

chercher à paramétrer localement Γ au vois de $A\in\Gamma$

* explicitement
* th FI

Def/Prop Soit $F\in\mathcal{C}^1(V,\mathbb{R})$ où V ouv de $\mathbb{R}^2$ et Γ d'éqn ds R : $F(x,y)=0$. On suppose $A(a,b)\in V$, $A\in\Gamma$ ie $F(a,b)=0$ et régulier (ou non singulier) ie $dF(a,b)\neq 0$ ou grad $F(a,b)\neq 0$

Dans ce cas on peut localement paramétrer Γ grâce à x ou y et la tan à Γ en A d'éqn ds R :

$(X-a)\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)+(Y-b)\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)=0$ de VN grad $F(a,b)$

Justif usage du Th FI sous la forme : $F\in\mathcal{C}^1(V,\mathbb{R})$ où V ouv de $\mathbb{R}^2$, $(a,b)\in V$ tq $F(a,b)=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$

Alors $\exists$ I,J int de $\mathbb{R}$ ouverts, $a\in I$, $b\in J$, $\varphi\in\mathcal{C}^1(I,J)$ /

$\forall (x,y)\in I\times J$, $F(x,y)=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x)$

($W_A = I\times J$) $R=(O,\vec{i},\vec{j})$ $\Gamma\cap W_A$ représentation de $x \xrightarrow{f} O+x\vec{i}+\varphi(x)\vec{j}$

$f'(a)=\vec{i}+\varphi'(a)\vec{j}$, éqn de T_A à Γ ds R : $Y-b=\varphi'(a)(X-a)$

$\varphi(a)=b$ $\varphi'(a)$? or $\forall x\in I$, $F(x,\varphi(x))=0$, dérivation.

$1.\frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))+\varphi'(x)\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))=0$

$x=a$; $\varphi'(a)=\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)}$, multiplier par $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$

et paf chez capitaine des pics.

Γ //

Rem $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$ sinon tgte verticale, on échange x et y

ex $\Gamma : x^4 + e^{x^2-y^2} - \cos x - y = 0$ $\quad A = (0,0) \in \Gamma$

grad $F(x,y) = \left(4x^3 + 2x e^{x^2-y^2} + \sin x, -2y e^{x^2-y^2} - 1\right)$

en $(0,0)$: $(0,1) \neq 0$ $\quad \mathcal{T}_A : y = 0$

étude plus approfondie (courbure ...) en A

TFI selon classe C^k de F, classe C^k de φ