Géométrie — Étude des arcs paramétrés

Chapitre 2

1) Étude pratique des courbes polaires

Étude locale, BI — MPSI plus infos
équa polaire

2) Étude métrique, courbure plane

• AP $f : I \to E$

I int de $\mathbb{R}$, E euclidien de dim n ($n=2$ ou 3 en pratique)

$(\cdot|\cdot)$ ps, $\|\cdot\|_2$ norme euclidienne

Def $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$, $a, b \in I$, $a \leq b$, $\gamma = ([a,b], f)$

On suppose l'arc régulier ie $\forall t \in I$, $f'(t) \neq 0$

• longueur de γ : $L_\gamma = \int_a^b \|f'(t)\|_2 \, dt$

• abscisse curviligne : $S \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ tq $S' = \|f'\|_2$

ie S primitive de $\|f'\|_2$

de la forme $S : t \mapsto \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\| \, du + C$ $\quad t_0 \in I, C \in \mathbb{R}$

Prop I int de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$

Soit (I, f) 1 arc de classe C^1 régulier et S une abscisse curviligne, alors S est un C^1-difféomorphisme de I / $J = S(I)$, et $g = f \circ S^{-1}$ est un paramétrage admissible de cet arc

$\forall t \in I$, $g(S(t)) = f(t)$, $s = S(t) \in J$, $g(s) = f(t)$

normal ie $\forall s \in J$ $\|g'(s)\| = 1$

Démo $\forall t \in I$, $S'(t) = \|f'(t)\| > 0$

S' continue, S C^1/I — C^1 difféomorphisme de I sur image $S(I) = J$

(NB $\Gamma = f(I) = g(J)$)

$\forall t \in I$, $g(S(t)) = f(t)$, $S'(t) g'(S(t)) = f'(t)$: $S'(t) \|g'(s)\| = \|f'(t)\| \Rightarrow \|g'(s)\| = 1$

__Crq__ $M = f(t)$, $f'(t) \neq 0$

$g'(s) = T_{(t)} = \dfrac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$: vecteur unitaire tangent

$$T(t) = \frac{f'(t)}{s'(t)}$$

② __Courbure plane__

E plan euclidien orienté, arc (I, f) de classe $\mathcal{C}^2$ singulier régulier pour tout t, $(f'(t), f''(t)) \neq (0, 0)$

soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ RONDirect où $(\vec{i}, \vec{j})$ BONDirect

$f(t) = O + x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

$$T(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} = \frac{x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}}{s'(t)} \quad \text{où } s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

On note $u_\theta = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

$\forall t \in I$, il existe $\alpha(t) \in \mathbb{R}$, $T(t) = u_{\alpha(t)}$

On justifie $\alpha \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ (cf Th de relèvement)

$\boxed{\text{Définition}}$ La courbure en $M = f(t)$ est définie par

$$C(t) = \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} = \frac{d\alpha}{ds}$$

__Th relèvement__ I int de $\mathbb{R}$ $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$

Soit $f \in C^p(I, \mathbb{U})$ avec $p \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$

- Alors $\exists\, \theta \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$ tq $\forall t \in I$, $f(t) = e^{i\theta(t)}$

•• Pour 2 telles fct θ_1, θ_2, $\exists k \in \mathbb{Z}$ / $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$

__démo__ • Analyse-Synthèse

- si θ existe $\forall t \in I$ $f'(t) = i\theta'(t) f(t)$

$$\theta'(t) = \frac{f'(t)}{i f(t)}$$

- synthèse $a \in I$, $f(a) \in \mathbb{U}$ $\exists b \in \mathbb{R}$, $f(a) = e^{ib}$

On définit $\left|\begin{array}{l}\theta(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{f'(t)}{i f(t)}\,dt + b \\ x \in I\end{array}\right.$

Alors $\dfrac{f'}{f}$ continue (ou C^{p-1}) sur I, θ C^1 (ou C^p) / I

si $g(x) = e^{i\theta(x)}$ $g(a) = e^{ib} = f(a)$, $g'(x) = f'(x)$. $\forall x \in I$

donc $g = f$ avec $\theta \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$

•• 2 candidats θ_1, θ_2 tq $\forall t \in \mathbb{R}$ $e^{i\theta_1(t)} = e^{i\theta_2(t)}$

$\Rightarrow \theta_1' = \theta_2'$ donc $\theta_1 - \theta_2$ constante sur I à valeurs ds $2\pi\mathbb{Z}$

donc $\theta_1 = \theta_2 \; [2\pi]$ $\square$

Csq : si $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$ E plan vect euclidien orienté

R ROND (O, i, j)

$\forall t \in I$, $f(t) = O + x(t)\, i + y(t)\, j$

$f'(t) = x'(t)\, i + y'(t)\, j$

$$T_f(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} = \frac{x'(t)\, i + y'(t)\, j}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} = z(t)$$

$z \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{U})$ donc (th !) il existe $\alpha \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$

tq $\forall t \in I$, $T(t) = u_{\alpha(t)} = \cos\alpha(t)\, i + \sin\alpha(t)\, j$

$\boxed{\text{Def}}$ Arc birégulier de E $(I, f) = \gamma$ où $f \in \mathcal{C}^2(I, E)$, I int de $\mathbb{R}$

pour $t \in I$, courbure en $M = f(t)$,

$T(t)$ vecteur unitaire tangent et $\alpha(t) = (\widehat{i, T_t})$

(s abscisse curviligne) $$C_t = \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} = \frac{d\alpha}{ds}$$

$\boxed{\text{Ex}}$ Cycloïde (R rep can de $\mathbb{R}$ ROND)

$x(t) = t - \sin t$ $\quad y(t) = \cos t$ $\quad t \in]0, 2\pi[$

$x'(t) = 1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$

$y'(t) = \sin t = 2 \sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$

$\|f'(t)\| = 2\sin\frac{t}{2} = s'(t)$

$T(t) = \left(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}\right)$ $\quad \alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$

$$C_t = \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} = \frac{-1}{4\sin\frac{t}{2}}$$

$\boxed{\text{Rem}}$ $\tan\alpha_t$ si défini, vaut $\frac{y'}{x'}$ $\to$ détermine à π près α_t seulement mais α_t' fait sauter ça.

Déf Base de Frenet, centre de courbure en $M = f(t)$ (birégulier)

à partir de T_t vecteur unitaire tangent

N_t vecteur unitaire, directement $\perp$ à T_t

$F_t = (T_t, N_t)$ BON <u>directe</u> base de Frenet en M

repère local de Frenet en M : (M_t, T_t, N_t)

Rayon de courbure en $M_t = f(t)$ est $R_t = \dfrac{1}{C_t}$ où C_t courbure en M_t

Centre $\Omega_t = M_t + R_t N_t$

$\left(\text{ie } \overrightarrow{\Omega_t M_t} = R_t \overrightarrow{N_t}\right)$

Déf La développée d'1 courbe plane birégulière est l'ensemble de ses centres de courbure.

Formules utiles mêmes notations, paramétrage normal (J, g) $M = f(t) = g(s)$, $t \in I$, $s \in J$, $s = S(t)$

- Vecteur unitaire tangent

$$T_t = \frac{f'(t)}{s'(t)} = \frac{dM}{ds} = g'(s)$$

$$T_t = \frac{x'(t)}{s'(t)} i + \frac{y'(t)}{s'(t)} j = \cos(\alpha_t) i + \sin(\alpha_t) j$$

$$T_t = X_t\, i + Y_t\, j, \quad N_t = -Y_t\, i + X_t\, j \quad \text{cf } [T_t, N_t] = 1$$

- - Courbure, centre de courbure

(1) grâce à α_t tq $T_t = u_{\alpha_t}$ $\longrightarrow$ $C_t = \dfrac{\alpha'_t}{s'_t}$

(2) Formules de Frenet

$\forall t \in I$, $M_t = f(t) = g(s) = g(S(t))$ et $s = S(t)$

en dérivant $f'(t) = s'(t) \underbrace{g'(s)}_{T_t}$

$$f''(t) = [S'(t)]^2 g''(S(t)) + S''(t) g'(S(t))$$

$$C_t = \frac{\alpha'_t}{S'_t} = \frac{d\alpha}{ds} \qquad T_t = u_{\alpha(t)} \quad N_t = \frac{dT_t}{d\alpha_t}$$

$$g''(s) = \frac{dT_t}{ds_t} = \frac{dT_t}{d\alpha_t}\frac{d\alpha_t}{ds_t}$$

première formule de Frenet $\boxed{\dfrac{dT_t}{ds} = C_t \cdot N_t}$

$\forall t \in I, \|N_t\|^2 = 1 = (N_t | N_t)$ en dérivant : $2\left(\frac{dN}{ds} \middle| N\right) = 0$

ie $\frac{dN}{ds} \perp N$, colinéaire à T

il existe β_t $\frac{dN_t}{ds} = \beta_t T_t$ $\beta_t = \left(\frac{dN}{ds} \middle| T_t\right)$

$N \perp T$ $(N_t | T_t) = 0$ en dérivant $\left(\frac{dN}{ds} \middle| T\right) + \underbrace{\left(N_t \middle| \frac{dT}{ds}\right)}_{C_t} = 0$

$\rightarrow \beta_t = -C_t$ dernière

deuxième formule de Frenet $\boxed{\frac{dN_t}{ds} = -C_t T_t}$

ie $\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C_t \\ -C_t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix}$

$f'(t) = S'(t)\, g'(S(t))$ $f''(t) = [S'(t)]^2 g''(S(t)) + S''(t)\, g'(S(t))$

$g'(s) = T$ $g''(s) = \frac{dT}{ds} = C_t N_t$

produit mixte : $[f'(t), f''(t)] = S'(t)^3 . C_t \underbrace{[T_t, N_t]}_{1}$

d'où courbure : $\boxed{C_t = \frac{[f'(t), f''(t)]}{[S'(t)]^3}}$

$\boxed{NB}$ permet le calcul analytique

$f(t) = O + x\,i + y\,j$; $f'(t) = x'i + y'j$; $f''(t) = x''i + j\,y''$

$$C_t = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

Centre de courbure ? $R_t = \frac{1}{C_t}$

$T_t = \frac{x'_t}{S'_t}\, i + \frac{y'_t}{S'_t}\, j$ $N_t = \frac{-y'_t}{S'_t}\, i + \frac{x'_t}{S'_t}\, j$

$\Omega = O + X_t\, i + Y_t\, j = M_t + R_t N_t$

donc $\begin{cases} X_t = x_t - \dfrac{y'_t (x'^2_t + y'^2_t)^{3/2}}{x'_t y''_t - x''_t y'_t} \\ Y_t = y_t + \dfrac{x'_t (x'^2_t + y'^2_t)^{3/2}}{x'_t y''_t - x''_t y'_t} \end{cases}$

∴ Cas d'1 courbe donnée par son équ polaire $r = \rho(\theta)$

Traduction $R = (O, i, j)$ ROND de référence

on utilise $u_\theta = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j$ $\quad v_\theta = u'_\theta = -\sin\theta\, i + \cos\theta\, j$

Ici θ paramètre, $\theta \in I$ $\quad f(\theta) = O + \rho(\theta) u_\theta$

$$f'(\theta) = \rho'(\theta) u_\theta + \rho(\theta) v_\theta$$

$$s'(\theta) = \|f'(\theta)\| = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} > 0$$

$$T_\theta = \frac{f'(\theta)}{s'(\theta)} = \frac{\rho'(\theta)}{s'(\theta)} u_\theta + \frac{\rho(\theta)}{s'(\theta)} v_\theta$$

Usage éventuel de $V(\theta) = (\widehat{u_\theta, T_\theta})$ $\quad \cos V_\theta = \frac{\rho'_\theta}{s'_\theta}$, $\sin V_\theta = \frac{\rho_\theta}{s'_\theta}$

(si possible $\tan V_\theta = \frac{\rho_\theta}{\rho'_\theta}$)

Relation avec $\theta, \alpha_\theta, V_\theta$ $\quad \begin{cases} \alpha_\theta = (\widehat{i, T_\theta}) \\ V_\theta = (\widehat{u_\theta, T_\theta}) \end{cases}$ $\quad \theta = (\widehat{i, u_\theta})$

$$\boxed{\alpha_\theta = \theta + V_\theta \ (2\pi)}$$

$C_\theta = \frac{d\alpha_\theta}{ds_\theta} = \frac{\alpha'_\theta}{s'_\theta}$ $\quad \alpha'_\theta = 1 + V'_\theta$, de plus $C_\theta = \frac{[f'_\theta, f''_\theta]}{s'^3_\theta}$

$$f''(\theta) = \rho''(\theta) u_\theta + 2\rho'_\theta v_\theta - \rho_\theta u_\theta$$

$$[f'_\theta, f''_\theta] = \begin{vmatrix} \rho'_\theta & \rho''_\theta - \rho_\theta \\ \rho_\theta & 2\rho'_\theta \end{vmatrix} \Rightarrow C_\theta = \frac{\rho_\theta^2 + 2\rho'^2 - \rho_\theta \rho''_\theta}{(\rho'^2_\theta + \rho_\theta^2)^{3/2}}$$

Rem | Bon usage des paramétrages

$\to$ Ne pas hésiter à composer par 1 C^p-difféomorp

$t, s, \alpha, R, C, \theta, V \ldots$

En particulier : utile pour des recherches de "courbes telque" condition différentielle, courbes conditionnés, équation intrinsèque

Exemples

(1) cycloïde !

(2) astroïde $a > 0$ $\quad x_t = a\cos^3 t$ $\quad y_t = a\sin^3 t$

Construction, courbure en tout pt biréguliers, développée

f C^∞, f 2π périodique $\quad x$ paire, y impaire

$\to$ sym / Ox

$f(\pi - t) = -f(t)$
$x(\pi/2 - t) = y(t)$
$y(\pi/2 - t) = x(t)$

au final, étude sur $[0, \pi/4]$

t	0		$\pi/4$
x	a	$\searrow$	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$
y	0	$\nearrow$	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$

$x'(t) = -a\,3 \sin t \cos^2 t$

$y'(t) = 3a \cos t \sin^2 t$

$f(0)$ stationnaire

$x(t) = a\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^3 = a\left(1 - \frac{3t^2}{2}\right) + o(t^2)$

$y(t) = a\left(t + o(t^2)\right)^3 = a t^3 + o(t^3)$

TY : $f(t) = f(0) + t f'(0) + \frac{t^2}{2} f''(0) + \frac{t^3}{6} f'''(0) + o(t^3)$

unicité dl_3 $\quad f''(0) = \left(\frac{3a}{2}, 0\right) \neq 0 \quad p = 2$

$f'''(0) = (0, 6a) \neq 0 \quad q = 3$

$\longrightarrow$ rebroussement 1ère espèce

<u>Courbure</u> en $M = f(t)$ birégulier $t \in]0, \pi/2[$

$f'(t) = -3a \sin t \cos^2 t\, i + 3a \cos t \sin^2 t\, j$

$= \underbrace{3a \sin t \cos t}_{} \underbrace{(-\cos t\, i + \sin t\, j)}_{T_t \text{ unitaire}}$

$s'(t) = \|f'(t)\| > 0$

$T_t = \cos\alpha\, i + \sin\alpha\, i \qquad \alpha = \pi - t$!

$\Longrightarrow C_t = \frac{-1}{3a \sin t \cos t}$

... la développée est une astroïde

(3) Cardioïde $r = a(1+\cos\theta)$ tracé, courbure

$$C_\theta = \frac{3/2}{2a\cos\frac{\theta}{2}}$$

(4) spirale logarithmique $r = e^\theta$

$$f(\theta) = O + e^\theta u_\theta \qquad f'(\theta) = e^\theta(u_\theta + v_\theta)$$

$$\rho(\theta + 2\pi) = e^{2\pi}\rho(\theta) \qquad \rho \nearrow, \xrightarrow[-\infty]{} 0, \xrightarrow[+\infty]{} \infty$$

$$f'(\theta) = \sqrt{2}\, e^\theta \left(\frac{u_\theta + v_\theta}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} e^\theta u_{\theta+\frac{\pi}{4}} \qquad T_\theta = u_{\theta+\frac{\pi}{4}}$$

$$V_\theta = \frac{\pi}{4} \qquad \alpha_\theta = \frac{\pi}{4} + \theta \ (2\pi)$$

$$C_\theta = \frac{1}{s'(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{2}e^\theta} \qquad R_\theta = \sqrt{2}\, e^\theta$$

$$s(\theta) = \sqrt{2}\, e^\theta, \quad s_\lambda(\theta) = \sqrt{2}\, e^\theta + \lambda, \quad \text{si } \lambda = 0 \ (s \xrightarrow[-\infty]{} 0)$$

$$\boxed{R = \sqrt{2}\, s}$$

Pb réciproque : Courbe birégulière en tt point, $R = k s$ (où $k > 0$ fixé) R rayon courbure

$$\Rightarrow \frac{ds}{d\alpha} = k s \quad \text{choix de } \alpha \text{ comme paramètre}$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in J, \ s(\alpha) = \lambda e^{k\alpha}$$

ND s abscisse curviligne strict $\nearrow$ $s'(\alpha) = \|f'(\alpha)\| > 0$

$\longrightarrow$ nec^t $\lambda > 0$

R ROND (O, i, j) $\quad \alpha = (\widehat{i, T})$ $\quad \alpha$ paramètre

$$\forall \alpha \in J, \quad f(\alpha) = O + x_\alpha i + y_\alpha j$$

$$f'(\alpha) = x'_\alpha i + y'_\alpha j$$

$$s'(\alpha) = \sqrt{x_\alpha'^2 + y_\alpha'^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{x'_\alpha}{s'_\alpha} \longrightarrow x'_\alpha = k\lambda e^{k\alpha}\cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{y'_\alpha}{s'_\alpha} \longrightarrow y'_\alpha = k\lambda e^{k\alpha}\sin\alpha$$

$$\forall \alpha \in J, \ z_\alpha = x_\alpha + i y_\alpha \qquad z'_\alpha = k\lambda e^{\alpha(k+i)}$$

$$z_\alpha = \frac{k}{k+i}\lambda e^{\alpha(k+i)} + (a+ib) = \frac{k(k-i)}{k^2+1}\lambda e^{\alpha(k+i)} + (a+ib)$$

$$z_\alpha = r e^{i\varphi} \lambda e^{\alpha(k+i)} + \underline{\qquad}$$

$$z_\alpha = r\lambda e^{a\alpha} e^{i(\alpha+\varphi)} + \_\_\_\_$$

$$\begin{cases} x_\alpha = r\lambda e^{a\alpha} \cos(\alpha+\varphi) + a \\ y_\alpha = \_\_\_\_ \sin(\alpha+\varphi) + b \end{cases}$$ posons $\theta = \alpha + \varphi$

$$e^{a\alpha} = e^{a\theta} e^{-a\varphi} \quad (\mu = r\lambda e^{-a\varphi})$$

en translatant l'origine : Γ d'éqn polaire $\rho(\theta) = \mu e^{a\theta}$

III) Rappel sur l'étude locale et les BI d'1 courbe plane

1) E Rev ndf n $(n = 2, 3 \ldots)$ $\quad I$ int de $\mathbb{R}$

$f \in \mathcal{C}^k(I, E)$ $\quad \Gamma = \{f(t) / t \in I\}$ support de l'arc

soit $M_0 = f(t_0) \in \Gamma$

On suppose $A = \{ i \in \mathbb{N}^* / i \leq k, f^{(i)}(t_0) \neq 0 \} \neq \emptyset$

$$p = \min A$$

$$f^{(p)}(t_0) \neq 0 \quad , \quad f^{(i)}(t_0) = 0 \text{ si } i < p$$

Formule de Taylor Young pour f à l'ordre p en $t_0 \in I$

$$f(t) = f(t_0) + \sum_{i=1}^{p} \frac{(t-t_0)^i}{i!} f^{(i)}(t_0) + \underbrace{(t-t_0)^p \varepsilon(t)}$$

$$= f(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} f^{(p)}(t_0) + o((t-t_0)^p)$$

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{(t-t_0)^p} \xrightarrow[t \to t_0]{} \frac{f^{(p)}(t_0)}{p!}$$

Def La tg à Γ en $M_0 = f(t_0)$ est alors la droite affine passant par M_0 dirigée par $f^{(p)}(t_0)$

où $p = \min \{ i \in \mathbb{N}^* / i \leq k, f^{(i)}(t_0) \neq 0 \}$

(si $p = 1$, point régulier)

$$\mathcal{T}_{M_0} = \mathcal{D}(M_0, f^{(p)}(t_0)) = \{ M_0 + \lambda f^{(p)}(t_0) / \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Rem Cas d'1 cbe plane

R repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$f(t) = O + x_t \vec{i} + y_t \vec{j}$

$M_0 = f(t_0)$ régulier

eqn de la tangente en M_0 (régulier) ds R ?

dirigée par $f'(t_0) = x'(t_0)\,i + y'(t_0)\,j$

$P \in \mathcal{T}_{M_0} \iff (\overrightarrow{M_0P}, f'(t_0))$ liée

$$\iff \begin{vmatrix} X - x_{t_0} & x'_{t_0} \\ Y - y_{t_0} & y'_{t_0} \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff y'_{t_0}(X - x_{t_0}) - x'_{t_0}(Y - y_{t_0}) = 0$$

De plus si E euclidien on définit la normale à Γ en M_0 perpendiculaire à la tangente en M_0, droite affine passant par M_0 de vecteur normal $f'(t_0)$

R RON, eqn de N_{M_0} : $x'_{t_0}(X - x_{t_0}) + y'_{t_0}(Y - y_{t_0}) = 0$

Amélioration

$B = \{ j \in \mathbb{N} \,/\, p \leq j \leq k \,;\, (f^{(p)}(t_0), f^{(j)}(t_0))$ libre $\}$ (p comme supra)

On suppose $B \neq \emptyset$, $q = \min B$

donc $(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ libre, et si $n = 2$ base de E

$(M_0, f^{(p)}(M_0), f^{(q)}(M_0))$ repère local en M_0

formule TY ordre q :

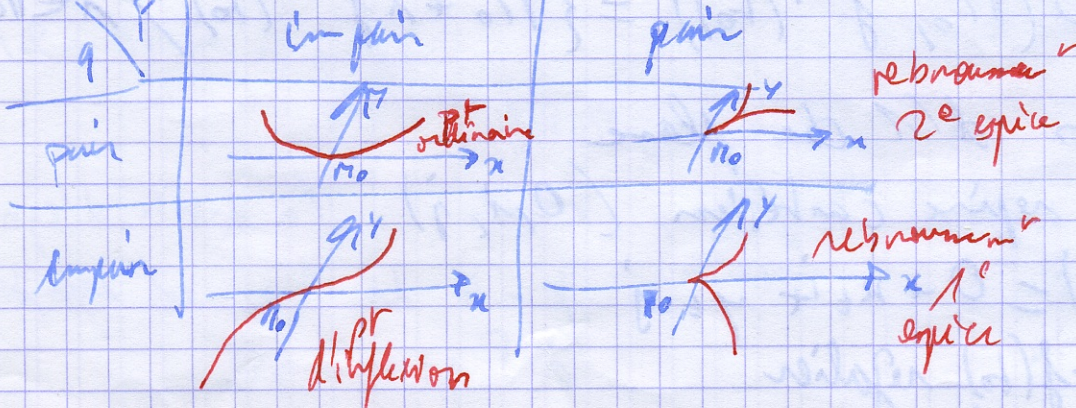
$$t \in I, \quad f(t) = f(t_0) + \sum_{i=1}^{q} \frac{(t-t_0)^i}{i!} + (t-t_0)^q \varepsilon(q)$$

$$= f(t_0) + X(t) \cdot f^{(p)}(t_0) + Y(t)\, f^{(q)}(t_0) \quad \text{où}$$

$$X(t) \underset{t \to t_0}{\sim} \frac{(t-t_0)^p}{p!} \qquad Y(t) \underset{t \to t_0}{\sim} \frac{(t-t_0)^q}{q!}$$

Préciser l'étude locale : position locale de $M = f(t)$ pour t voisin de t_0

D'où 4 types de points (si p, q existent)



Rem $n=3$ (courbes gauches)

p, q insuffisants : on définit v ...

2) Etude des Bi des courbes planes

E plan (euclidien)

(I, F) $\quad \Gamma = F(I)$

$t_0 \in \bar{I}$ $\quad \|f(t)\| \xrightarrow[t \to t_0]{} +\infty$

(resp $t \to t_0^+$, $t \to t_0^-$)

R repère cartésien de E, $f(t) = O + x_t \vec{i} + y_t \vec{j}$

D dte d'eqn ds R $\quad y = ax + b$ tq $\lim\limits_{t \to t_0} (y_t - (ax_t + b)) = 0$

nec^t $\begin{cases} a = \lim\limits_{t \to t_0} \left(\dfrac{y_t}{x_t}\right) \\ b = \lim\limits_{t \to t_0} (y_t - a x_t) \end{cases}$

Si $\begin{cases} |x_t| \to +\infty & |y_t| \to +\infty \\ \text{et } \dfrac{y_t}{x_t} \to 0 & \left(\text{resp } \dfrac{y_t}{x_t} \to \pm\infty\right) \end{cases}$

$\longrightarrow$ BP Ox (resp Oy)

Cas d'1 eqn polaire $\quad r = \rho(\theta)$

où $|\rho(\theta)| = \|f(\theta)\| \xrightarrow[\theta \to \theta_0]{} +\infty$ $\quad$ avec θ_0 fini

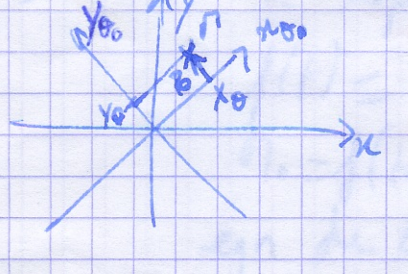
$R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ RON $\quad \begin{cases} x_\theta = \rho_\theta \cos\theta \\ y_\theta = \rho_\theta \sin\theta \end{cases}$

Cas d'1 droite asymptote : on utilise le repère (tourné d'angle θ_0) $\quad R_{\theta_0} = (O, u_{\theta_0}, v_{\theta_0})$

$f(\theta) = O + \rho_\theta u_\theta = \rho_\theta \, Rot_\theta(\vec{i}) = \rho_\theta \, Rot_{\theta_0}(u_{\theta - \theta_0})$

$f(\theta) = O + X_\theta u_{\theta_0} + Y_\theta v_{\theta_0}$ $\quad$ alors $\begin{cases} X_\theta = \rho_\theta \cos(\theta - \theta_0) \\ Y_\theta = \rho_\theta \sin(\theta - \theta_0) \end{cases}$

$|Y_\theta| \xrightarrow[\theta \to \theta_0]{} +\infty$ $\quad |Y_\theta| = \|M_\theta P_\theta\|$



Si $Y_\theta \xrightarrow[\substack{\theta \to \theta_0 \\ (\text{resp } \theta_0^+, \theta_0^-)}]{} b$, $b \in \mathbb{R}$, la droite d'eqn $Y = b$ ds R_{θ_0} est asymptote à Γ qd $\theta \to \theta_0$.

Exemple $\mathbb{R}^2$ euclidien can, base can = OND

Γ d'éqn polaire $r = 1 + \tan\theta = \rho(\theta)$

ρ 2π pério, π pério $\quad I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$f(\theta) = \rho(\theta)\, u_\theta \qquad f(\theta+\pi) = \rho(\theta) \underbrace{u_{\theta+\pi}}_{-u_\theta} = -f(\theta)$

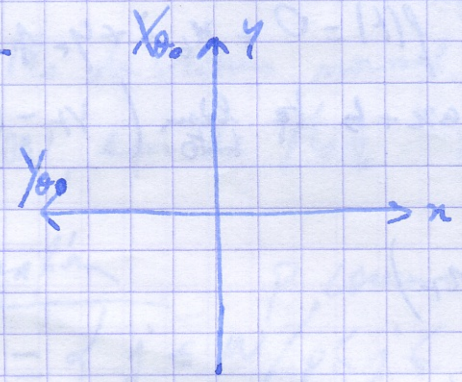
$\longrightarrow$ sym % O

tan ↗ /I, ρ aussi

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$
ρ	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

R_{θ_0} :



$$\begin{aligned} Y_\theta &= \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0) \\ &= (1+\tan\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\cos\theta\,(1+\tan\theta) \\ &= -\cos\theta - \sin\theta \xrightarrow[\theta \to \pi/2]{} 1 \end{aligned}$$

La dte d'éqn $Y = 1$ ds $R_{\pi/2}$ est asymptote