ALGEBRE
Chapitre 4

Calcul Matriciel

§0 Revoir le cours et exos de MPSI

→ Reprises et compléments (calc mat, det, SL)

1) Calcul matriciel

$\mathbb{K}$ cc, $n, p \in \mathbb{N}^*$

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathcal{F}([\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \mathbb{K})$

$A : (i,j) \longmapsto A[i,j] = a_{ij}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$

Interprétation fondamentale et calc mat

- E, F K-ev de dim $E = p$, dim $F = n$

$\mathcal{B}$ base de E, $\mathcal{C}$ base de F $\qquad u \in \mathcal{L}(E,F)$ déterminée par
$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_p)$ $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ $\qquad u(\mathcal{B})$ exprimée dans $\mathcal{C}$

on note $u(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_i$

On associe à u $\qquad \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} & u(b_j) & \\ & a_{ij} & \\ & \vdots & \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{matrix}$

Prop 1 Pour $\mathcal{B}$ base de E et $\mathcal{C}$ base de F données

$\mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme
$u \longmapsto \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C})$

Prop 2 E, F, G K-ev de dim p, n, r

$\mathcal{B}$ base de E, $\mathcal{C}$ base de F, $\mathcal{D}$ base de G

$u \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$v \in \mathcal{L}(F,G)$, $\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{K})$

Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$

NB $A = (a_{ij})$ dans $\mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij})$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$A, B \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ et :

$\forall (i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,p]\!] \quad (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

× associative et distributive / +

Prop 3 $(\mathcal{M}_n(K), +, \times, \cdot)$ K algèbre
E K-ev de dim n, $\mathcal{B}$ base de E
alors $u \longmapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ isomorphisme de K-algèbre
$\mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{M}_n(K)$

Prop 4 E K-ev de dim p ; $\mathcal{B}$ base de E
F K-ev de dim n ; $\mathcal{C}$ ——— F

$u \in \mathcal{L}(E,F)$ $\quad Mat(u; \mathcal{B}, \mathcal{C}) = A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$

soit $x \in E$, $X = Mat(x, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(K)$

où $x = \sum_{i=1}^{p} x_i b_i$

alors $y = u(x)$ $\quad Y = Mat(u(x), \mathcal{C})$

et $\boxed{Y = AX}$ (démo : rmq)

2) Chgts de bases, matrices semblables ou équivalentes

Def E K-ev de dim n, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de E

P : matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ $= P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

$P = Mat(id_E ; \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{|c|} \hline p_{ij} \\ \vdots \\ p_{nj} \\ \hline \end{array} \right)$

avec $b'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} b_i$

Prop 1 $x \in E$ $\quad X = M_{\mathcal{B}}(x)$ $\quad X' = M_{\mathcal{B}'}(x)$

alors $\underline{X = PX'}$

Exercice $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ deux bases de E $\quad P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{C})$
$\mathcal{B}^*, \mathcal{C}^*$ ——— E^* $\quad Q = Pass(\mathcal{B}^*, \mathcal{C}^*)$
Lien entre P, Q ?

Il s'agit de préciser le dgt de coordonnées. $x \in E$, $X \in Mat_{\mathcal{B}}(x)$, $X' \in Mat_{\mathcal{C}}(x)$

$\underline{X = PX'}$ $\quad$ NB : $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = Mat(id_E, \mathcal{C}, \mathcal{B})$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$; $P = (p_{ij})$ $\quad$ $i$ème ligne de $X = PX'$: $x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j$

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$; $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$; $\mathcal{B}^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$; $\mathcal{C}^* = (c_1^*, \dots, c_n^*)$

$\underline{x_i = b_i^*(x)}$ $\quad \left(x = \sum_{i=1}^{n} b_i^*(x) b_i \right) \Rightarrow b_i^*(x) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} c_j^*(x)$ $\quad$ idée : $Q' = Pass(\mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*) = Q^{-1}$

grâce à cette formule, je remplis la $i$ème colonne de $Q' \Rightarrow Q' = {}^t P = Q^{-1}$

Prop 2 E, F K-ev de dim finie | $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 2 bases de E, $P = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$
$\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ ——— F, $Q = \text{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$
$u \in \mathcal{L}(E,F)$, $M = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, $M' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$

Alors $M' = Q^{-1} \times M \times P$ (même rmq)

Prop 3 $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ bases de F
$\text{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{C}'') = \text{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \times \text{Pass}(\mathcal{C}', \mathcal{C}'')$
$(\mathcal{C}'' = \mathcal{C})$ $I_n = Q \cdot Q'$

Prop 4 E K-ev de dim finie $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de E
$u \in \mathcal{L}(E)$ $M = M_{\mathcal{B}}(u)$, $M' = M_{\mathcal{B}'}(u)$, $P = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$
alors $M' = P^{-1} M P$ (cas particulier de prop 2)

Def • $M, M' \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ sont dites équivalentes ($M \sim M'$) s'il existe $Q \in GL_n(K)$ et $P \in GL_p(K)$ / $M' = Q^{-1} M P$
• $M, M' \in \mathcal{M}_n(K)$ sont dites semblables s'il existe $P \in GL_n(K)$ tq $M' = P^{-1} M P$

Interprétation

Prop 1 E, F K-ev de dim p, n $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ bases de E, F
$u \in \mathcal{L}(E,F)$, $M = \text{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, $M' \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$
Alors : $M \sim M' \Leftrightarrow \exists\, \mathcal{B}'$ base de E et $\mathcal{C}'$ base de F tq $M' = \text{Mat}(u, \mathcal{B}', \mathcal{C}')$

dém $\Leftarrow$ $P = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ $Q = \text{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$
$M' = Q^{-1} M P \Rightarrow M' \sim M$

$\Rightarrow$ $\exists P \in GL_p(K)$ $\exists Q \in GL_n(K)$ $M' = Q^{-1} M P$
définir $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$ tq $P = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, $Q = \text{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$
$b'_j = \sum_{i=1}^{p} P_{ij} b_i$; $c'_j = \sum_{i=1}^{n} Q_{ij} c_i$

Prop 2 E k-ev de dim n, $\mathcal{B}$ base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$, $M_{\mathcal{B}}(u) = M$, $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ — alors :

M, M' semblables $\Leftrightarrow \exists \mathcal{B}'$ base de E / $M' = M_{\mathcal{B}'}(u)$

Démo $\Leftarrow$ clair

$\Rightarrow$ si $P \in GL_n(\mathbb{K})$ / $M' = P^{-1} M P$

définir $\mathcal{B}'$ base de E / $P = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$

NB utile dans la pratique :

ex $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ montrer A, D semblables

→ interprétation A $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ $(\equiv \mathbb{R}^3)$

soit $u : X \mapsto AX$ — base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$

Mq A, D semblables équivaut à trouver $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$

tq $M_{\mathcal{B}'}(u) = D$

$\mathcal{B}'$ tq $\begin{cases} u(e'_1) = 0 \\ u(e'_2) = e'_2 \\ u(e'_3) = 2e'_3 \end{cases}$

soit $e'_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow Ae'_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$

$\Rightarrow e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient

De même, $e'_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $Ae'_2 = e'_2 \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=x \\ x+y+z=y \\ x+y+z=z \end{cases} \Rightarrow e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

et $e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(e'_1, e'_2, e'_3) base de E et $M_{\mathcal{B}'}(u) = D$

$P = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\det P \neq 0$

$\mathcal{B}'$ base de E et par construction $M_{\mathcal{B}'}(u) = D$

$\Rightarrow A, D$ semblables

3) Critère d'équivalence

Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Déf $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ $F = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

$u \in \mathcal{L}(E,F)$ canoniquement associé ie $M = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ ($u : X \mapsto MX$)

avec $\mathcal{B}$ base can de E, $\mathcal{C}$ base can de F

On définit $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(u)$

Prop 1 $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ E, F $\mathbb{K}$-ev de dim p, n resp.

On suppose que $M = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ avec $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ bases de E, F

Alors $\mathrm{rg}\, M = \mathrm{rg}\, u$

Lemme $E' = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ $\mathcal{B}'$ base can de E' | $u' \in \mathcal{L}(E', F')$

$F' = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ $\mathcal{C}'$ ——— F' | $\mathrm{rg}\, M' = \mathrm{Mat}(u', \mathcal{B}', \mathcal{C}')$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ E' & \xrightarrow{u'} & F' \end{array} \qquad \varphi = \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}} \quad \psi = \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}'}$$

$x = \sum_{i=1}^{p} x_i b_i \mapsto \varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$

$\varphi \in \mathrm{Isom}(E, E')$, $\psi \in \mathrm{Isom}(F, F')$ (isomorphisme)

et $u = \psi^{-1} \circ u' \circ \varphi$

$\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\, u' = \mathrm{rg}\, M$ □

Théorème (réduction à la matrice canonique de rang r)

Soient E, F $\mathbb{K}$-ev $\begin{cases} \dim E = p \\ \dim F = n \end{cases}$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ de rang r

Alors $\exists$ base $\mathcal{B}$ de E et base $\mathcal{C}$ de F t.q.

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \} r \\ \\ \} n-r \end{matrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = J_{r,n,p}$$

$\qquad\qquad\qquad r \qquad\quad p$

Démo (traduction matricielle du TAR)

Analyse : $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_p)$ $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_p)$

TAR $\begin{cases} u(b_i) = c_i & 1 \le i \le r \\ u(b_i) = 0 & i > r \end{cases}$

Synthèse $\left(\begin{matrix}\text{Im } u \text{ de dim } r \\ \text{Ker } u\end{matrix}\right.$ $\longrightarrow p-r$

On part de $\ker u$: il existe 1 famille $(b_{r+1}, \dots, b_p)$ base de $\ker u$; libre de E complétable en $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_p)$ base de E

$H = \text{Vect}(b_1, \dots, b_r)$ supplé du noyau

Alors $(\underbrace{u(b_1)}_{c_1}, \dots, \underbrace{u(b_r)}_{c_r})$ base de $\text{Im } u$ (cf $\tilde{u} : H \to \text{Im}(u)$, $x \mapsto u(x)$ isomorphisme)

libre de F complétable en $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ base de F -

d'où $\text{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$

Prop 2 Soient $M, M' \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$

(1) $\text{rg } M = r \iff M \sim J_{r,n,p}$

(2) $M \sim M' \iff \text{rg } M = \text{rg } M'$

Démo (1) $\boxed{CN}$ ($\Rightarrow$) $\text{rg } M = r$ $u \in \mathcal{L}(K^p, K^n)$ canoniquement associée ; $\mathcal{B}$ base can de $K^p = E$, $\mathcal{C}$ base can de $K^n = F$, $\text{rg } u = r$

on applique **Th** | $\mathcal{B}'$ base de E, $\mathcal{C}'$ base de F | $\text{rg } M(u)_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = J_{r,n,p}$

$M \sim J_{r,n,p}$

($\Leftarrow$) $\underline{CS}$ $M \sim J_{r,n,p}$ il existe $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$ $\Rightarrow J_{r,n,p} = \text{Mat}(u, \mathcal{B}', \mathcal{C}')$

et $\text{rg } u = r$

on a $\begin{cases} u(b'_i) = c'_i & \text{si } 1 \le i \le r \\ u(b'_i) = 0 & \text{si } i > r \end{cases}$

$\text{Im } u = \text{Vect}(u(\mathcal{B}'))$ de dimension r de base $(c'_1, \dots, c'_r)$

(2) $\boxed{CN}$ $M \sim M' \Rightarrow$ | $M = \text{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ et $\text{rg } M = \text{rg } u = \text{rg } M'$
| $M' = \text{Mat}(u, \mathcal{B}', \mathcal{C}')$

$\underline{CS}$ $\text{rg } M = \text{rg } M' = r \Rightarrow \begin{cases} M \sim J_{r,n,p} \\ M' \sim J_{r,n,p} \end{cases}$

transitivité de $\sim$

$\Rightarrow M \sim M'$: $\begin{matrix} M = Q^{-1} J_{r,p} P \\ M' = R^{-1} J_{r,p} S \end{matrix}$ $\Rightarrow M' = (R^{-1}Q) \times M_p(P^{-1}S)$ □

Prop 3 $M \in M_{n,p}(K)$ alors $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} {}^tM$.

Démo $r = \operatorname{rg} M$ $\quad M \sim J_{r,n,p}$

ie $M = Q\ J_r\ P$ $\quad Q \in GL_n(K)$, $P \in GL_p(K)$

${}^tM = {}^tP \times J_r \times {}^tQ \Rightarrow {}^tM \sim J_r$ et $\operatorname{rg} {}^tM = r$ □

CSQ, BILAN

$M \in M_{n,p}(K)$

- $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}(u)$ où $M = \operatorname{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{E})$ | $u \in \mathcal{L}(E,F)$ | $\mathcal{B}$ base de E | $\mathcal{E}$ base de F

exemple $\tilde{u}$ canoniquement associée $\tilde{u} : X \mapsto MX$

$M_{p,1}(K) \to M_{n,1}(K) \to (e_1, \dots, e_n)$

$\to (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$

$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}(\tilde{u})$

- $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_p)$ cols de M $\quad C_j = M \varepsilon_j$
- $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} {}^tM = \operatorname{rg}(L_1, \dots, L_n)$ lignes de M
- $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} M' \iff M \sim M'$ (il suffit d'avoir trouvé M' simple (avec $\operatorname{rg} M'$ calculable !)
- Rang d'1 réduite de Gauss (= on applique le pivot de Gauss)

(1) : $M \sim J_{r,n,p} \iff \operatorname{rg} M = r$

(2) : $M' = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & 0 \end{array}\right)$ ou $M' = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ avec $A \in GL_r(K)$

alors $\operatorname{rg} M' = r$

lignes de M' $\quad \begin{matrix} L_1 \\ \vdots \\ L_r \\ \vdots \\ L_n \end{matrix} \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & 0 \end{array}\right) = M'$ $\quad L_i = (L'_i \mid 0 \cdots 0)$

L'_i ie vecteur ligne de A

$(L'_1, \dots, L'_r)$ libre $\Rightarrow (L_1, \dots, L_n)$ libre

$\Rightarrow \operatorname{rg} M' \geq r$ ou $\operatorname{rg}(C_1, \dots, C_p) = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_r) \Rightarrow \operatorname{rg} \leq r$

- $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{pmatrix}$ triangulaire sup (ou inf) de $M_r(K)$

$A \in GL_r(K) \iff \forall i \in [\![1, r]\!]\ \lambda_i \neq 0$

$\det A = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i$

Cor $M \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_r \end{pmatrix}$

λ_{r-1}, λ_r non nuls $\Rightarrow$ rg $M = r$.

4) Décomposition par blocs

Notation $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ $\quad A = (a_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$

matrices extraites $\quad I \subset [\![1,n]\!]$, $J \subset [\![1,p]\!]$

$A' = (a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$

(a) Décomposition en 4 blocs

$$A = \left(\begin{array}{c|c} U & V \\ \hline W & Z \end{array}\right) \begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow n-r \end{matrix}$$

$\qquad\qquad \overset{r}{\longleftrightarrow} \quad \overset{p-r}{\longleftrightarrow}$

$\qquad\qquad\qquad

⑤ Généralisation

pour la 1ère, vérifier la condition de compatibilité

⑥ Cas des diagonales par blocs

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_r \end{pmatrix} \qquad D_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$$

$$= \mathrm{diag}(D_1, \dots, D_r)$$

Ex $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 8 & 13 \end{array}\right)$ blocage possible pour inverser

Ex inversion par blocs $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array}\right)$ $A \in GL_p(\mathbb{K})$, $C \in GL_q(\mathbb{K})$

$(\det M = \det A \det C)$

soit $M^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A' & D' \\ \hline B' & C' \end{array}\right)$; $M M^{-1} = I_{p+q}$

$$\left(\begin{array}{c|c} AA' & AD' \\ \hline BA' + CB' & BD' + CC' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right)$$

$\Leftrightarrow$
- $AA' = I_p \Leftrightarrow A' = A^{-1}$
- $AD' = 0 \Leftrightarrow D' = 0$
- $BD' + CC' \underset{=I_q}{\Leftrightarrow} C' = C^{-1}$
- $BA' + CB' = 0 \Leftrightarrow B' = -C^{-1} B A^{-1}$

5) Trace

Déf Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$, on définit $\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Propriétés P1 $\mathrm{tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ déjà écrite ($\mathrm{tr}(A+\lambda B \dots)$)

Rem $\ker(\mathrm{tr})$ HP de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (moyen d'1 FL mais mille
q $\mathrm{tr}(\mathrm{diag}(1, 0, \dots, 0)) = 1 \neq 0$)

(P2) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Cq 2 matrices semblables ont la même trace

démo $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j}\sum_{i} b_{ji} a_{ij} = \mathrm{tr}(BA)$

si $B = P^{-1} A P$ avec $P \in GL_n(K)$

$\mathrm{tr}\, B = \mathrm{tr}\left(P^{-1}(AP)\right) = \mathrm{tr}\left((AP)P^{-1}\right) = \mathrm{tr}\, A$

Rem dans $\ker(\mathrm{tr})$, il y a les commutateurs $[A,B] = AB - BA$

Def/P3 Soit E K-ev de dim n, $u \in \mathcal{L}(E)$

$\forall$ base $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{tr}(M_{\mathcal{B}}(u))$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$

et définit $\mathrm{tr}\, u$ et $\mathrm{tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))^*$

$\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{tr}(v \circ u) = \mathrm{tr}(u \circ v)$

démo – autre base $P = P_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$

$M_{\mathcal{C}}(u) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(u) P \Rightarrow \mathrm{tr}\, M_{\mathcal{C}}(u) = \mathrm{tr}\, M_{\mathcal{B}}(u)$

– linéarité soit $\mathcal{B}$ base de E

$\mathrm{tr}(u + \lambda v) = \mathrm{tr}(M_{\mathcal{B}}(u + \lambda v)) = \mathrm{tr}(M_{\mathcal{B}}(u) + \lambda M_{\mathcal{B}}(v))$

$\mathrm{tr}(v \circ u) = \mathrm{tr}(M_{\mathcal{B}}(v \circ u)) = \mathrm{tr}(M_{\mathcal{B}}(v) \times M_{\mathcal{B}}(u))$ ...

Pty Si p projecteur de E K-ev, alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$

démo $E = \ker p \oplus \mathrm{Im}\, p$ $\mathcal{B}$ base de E adaptée

$M_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = r$

ex E K-ev p, q, r 3 proj de E CNS / $u = p + \sqrt{2}\, q + \sqrt{3}\, r$ soit proj de E

Si u projecteur $\mathrm{tr}\, u \in \mathbb{N}$

$\mathrm{tr}\, u = \mathrm{tr}\, p + \mathrm{tr}\, q\sqrt{2} + \mathrm{tr}\, r\sqrt{3}$ or $(ex\ 20), (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ $\mathbb{Q}$-libre

$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} \mathrm{tr}\, q = 0 \Rightarrow q = 0 \\ \mathrm{tr}\, r = 0 \Rightarrow r = 0 \end{array}\right.$

Cs $q = r = 0$, $u = p$ projecteur

ex $a, b, c \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tq $\begin{cases} a\circ b - b\circ a = c \\ a\circ c = c\circ a \\ b\circ c = c\circ b \end{cases}$

Montrer $c \notin GL(\mathbb{C}^n)$

Supposons c inversible donc $c^{-1}ab - c^{-1}ba = Id_{\mathbb{C}}$

$\Rightarrow tr(c^{-1}ab - c^{-1}ba) = n$

$tr(c^{-1}ab) = tr(bc^{-1}a) = tr(c^{-1}ba) \Rightarrow 0 = n$ absurde ☐

6) Déterminants rappel MPSI

$\mathbb{K}$ corps $n \geq 1$

Action du déterminant | sur $\mathbb{K}^n$ | sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ | sur $\mathcal{L}(E)$?

- $\leftrightarrow$ des formes multilinéaires alternées sur E (i.e. appli $f : E^n \to \mathbb{K}$ multilinéaire tq $\forall i$ et tous $x_1, \dots, x_{i-1}, y, \dots, x_n$ $f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_n) = 0$) est un $\mathbb{K}$-ev de dim 1

Étant donnée $\mathcal{B}$ base de E, $\det_{\mathcal{B}}$ l'unique tq $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$

si $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i$, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$

où $S_n = \mathcal{B}ij([\![1,n]\!], [\![1,n]\!])$, $\varepsilon(\sigma)$ signature de σ

- Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\mathcal{B}$ base can de $\mathbb{K}^n$ $\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_n)$ vect col de A

$$\det A = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Bilan des propr du det

- E $\mathbb{K}$-ev, $\dim E = n$ $\mathcal{B}$ base de E

$\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K}$ multilinéaire alternée, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $E = \mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ $\mathcal{B}$ base canonique

$\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_n)$ vect col de A

$\det A = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$

$\forall A, B \in M_n(K)$ $\det(AB) = \det A \times \det B$

2 matrices semblables ont le même det

$\therefore u \in \mathcal{L}(E)$ pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\det M_{\mathcal{B}}(u)$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$ $\Rightarrow$ définit $\det u$

$\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$ $\det(v \circ u) = \det v \times \det u$

Calcul matriciel

- multilinéarité par rapport aux colonnes
- $\det AB = \det A \det B$; $A, B \in M_n(K)$
- $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = \det {}^tA$

- **$\det$ par rapport à 1 ligne / 1 colonne**

$A = (a_{ij})$ $m_{ij} = \text{Mineur}_{i,j}(A)$ $\det$ de la matrice obtenue en supprimant la $i$ème ligne et $j$ème col de A

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} m_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} m_{kj}$$

(i-ième ligne) (j-ième ligne)

- **comatrice**

$\text{Com } A = (\alpha_{ij})$ où $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$

Prop $\forall A \in M_n(K)$ $A \times {}^t\text{Com } A = (\det A) I_n$

Cor $A \in GL_n(K)$ ie $\det A \neq 0$ alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\text{Com } A$$

Prop Ex des matrices triangulaires par blocs

Si $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ (ou $\begin{pmatrix} A & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$) avec $A \in M_n(K)$, $C \in M_r(K)$

alors $\det M = \det A \times \det C$

démo On vérifie que $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$

✓ ✓ ✓

$\det M = \det U \det V \det W$ où :

Prop $V \in M_N(K)$ triangulaire

$\det V = \prod_{i=1}^{N} v_{ii}$

$\Rightarrow \det V = 1$

$\det U = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ dev / dernière colonne

$= \det A$ idem $\det W = \det C$

Exemples de calculs de déterminants

Ex 1 Toeplitz $M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$ où $M_{ij} = \begin{cases} a \text{ si } i=j \\ b \text{ si } i \neq j \end{cases}$

$\det M = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ \vdots & a & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}$

$(L_1 \leftarrow \sum_{j=1}^{n} C_j)$ $\qquad (L_i \leftarrow L_i - L_1,\ i \in [\![2, n]\!])$

$= (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b)$

Ex 2 Vandermonde $a_1, \dots, a_n \in K$ $\quad n \geq 2$

$V_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$

- $n=2$ $\quad V_2(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)$ ✓
- $P_{n-1} \Rightarrow P_n$ $\qquad L_i \leftarrow L_i - a_1 L_{i-1}$ $(i \in [\![2, n]\!])$

$V_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ \vdots & a_2(a_2 - a_1) & \cdots & \\ 0 & a_2^{n-1}(a_2 - a_1) & \cdots & \end{vmatrix} = \prod_{j=2}^{n} (a_j - a_1) V_{n-1}(a_2, \dots, a_n)$

$\prod_{2 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$

7) Systèmes linéaires

→ MPSI

n eqn, p inconnues $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$

→ point de vue matriciel, vectoriel, avec AL

- $AX = B$ $\quad A = (a_{ij})$ $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$
- $\sum_{j=1}^{p} x_j C_j = B$
- $u : X \mapsto AX$ $\quad u(X) = B$

Cas fondamental $n = p$ et $A \in GL_n(K)$

⟹ unique solution du système de Cramer $X = A^{-1}B$

formule de Cramer

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \quad x_j = \frac{\det_{can}(C_1, \dots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \dots, C_n)}{\det A}$$

Cas général → compatibilité du système

$B \in \text{Vect}(C_1, \dots, C_p) \iff B \in \text{Im } u$

si oui X_0 sol part $u(X) = B = u(X_0)$

$S = \{X_0 + K \mid K \in \ker u\}$

$r = r_g\, u$, S espace affine de dimension $p - r$

Après l'éventuelle permutation des lignes et des numéros d'inconnues

$r = r_g\, A$ $\quad A = \left(\begin{array}{c|c} A' & \\ \hline & \end{array}\right)$ $\quad A' = (a_{ij})_{i,j \in [\![1,r]\!]^2} \in GL_r(K)$

$AX = B$ $\quad X = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} X' \text{ inc principales} \\ \hline \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} X'' \text{ inc auxiliaires} \end{array}\right)$

$AX = B \iff \begin{cases} AX' = B - A''X'' \longrightarrow \text{Cramer} \\ \longrightarrow \text{compatibilité} \end{cases}$

Mieux $AX = \beta$, x^{cp} à garder par $P \in GL_n(K)$

$PAX = P\beta$ $\quad PA = \left(\begin{array}{c|c} T & U \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad TX' = \beta_1$

$0 = \beta_2$

8) Opérations élémentaires sur les matrices – Cas général

→ MPSI

Travail sur $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ → x° à droite par matrice de $GL_p(K)$ → actions / colonnes

→ x° à gauche → $GL_n(K)$ → lignes

(a) Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$

$E_{ij} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{(k,l)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ = (matrice avec 1 en position (i,j))

$(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ base de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ $\qquad A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij} E_{ij}$$

P2 En général

$$E_{ij} \times E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$$

(b) Matrices de transvection / dilatation

$\Delta \to GL_n(K)$

Déf $i \neq j$, $i,j \in [\![1,n]\!]^2$ $\qquad T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ = (matrice avec λ en position (i,j))

matrice de transvection

$i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda \in K \setminus \{0\}$ $\qquad D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1) E_{ii} = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \lambda, 1, \dots, 1)$

matrice de dilatation

Prop 1 $T_{ij}(\lambda) \times A \equiv L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ $\qquad A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ de lignes $L_1, \dots, L_n$

$D_i(\lambda) \times A \equiv L_i \leftarrow \lambda L_i$

Dém $A = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} a_{kl} E_{kl}$ $\qquad T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$

$T_{ij}(\lambda) \times A = A + \lambda \sum_{k}\sum_{l} a_{kl} \underbrace{E_{ij} \times E_{kl}}_{\delta_{jk} E_{il}} = A + \lambda \sum_{l=1}^{p} a_{jl} E_{il}$

→ $i^{\text{ème}}$ ligne

$D_i(\lambda) \times A = A + (\lambda - 1) E_{ii} \times A$

dans L_i : $L_i + (\lambda - 1) L_i = \lambda L_i$

Prop 1 $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$; $T_{ij}(\lambda)$ dans $\mathcal{M}_p(K)$, $D_i(\lambda)$ dans $\mathcal{M}_p(K)$

$A \times T_{ij}(\lambda)$: on ajoute aux colonnes que A avait la $j^{\text{ème}}$: $C_j + \lambda C_i$

$A \times D_i(\lambda)$ ——————————— : λC_j

Opérations primaires sur les lignes / col

Def Opération élémentaire sur A = tout enchaînement d'opérations primaires du type $\begin{cases} L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \\ L_i \leftarrow \lambda L_i \end{cases}$ ou $\begin{cases} C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j \\ C_i \leftarrow \lambda C_i \end{cases}$

Ex
- $L_i \leftarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_k$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$; $\lambda_i \neq 0$
- $C_j \leftarrow \sum_{k=1}^{p} \mu_k C_k$ où $\mu_1, \dots, \mu_k \in K$, $\mu_j \neq 0$
- Échange de 2 lignes ou 2 colonnes

  L_i, L_j $i \neq j$ $\quad L_i \leftrightarrow L_j$

Op		$L_i \leftarrow L_i + L_j$	$L_j \leftarrow L_j - L_i$	$L_i \leftarrow L_i + L_j$	$L_j \leftarrow -L_j$
L_i	L_i	$L_i + L_j$	$L_i + L_j$	L_j	L_j
L_j	L_j	L_j	$-L_i$	$-L_i$	L_i

- Permutation de ligne en colonne

matrice de permutation :

$\sigma \in S_n \quad \Pi_\sigma = \begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}_{\sigma(j)} = (\delta_{i,\sigma(j)})$

interprétation $u_\sigma \in \mathcal{L}(K^n)$ canoniquement associé à $(e_1, \dots, e_n)$ base can ; $u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$

$\sigma \mapsto \Pi_\sigma$ $\quad S_n \to GL_n(K)$ morphisme de groupes injectif

$\boxed{\Pi_\sigma \times \Pi_{\sigma'} = \Pi_{\sigma\sigma'}}$

cf $u_\sigma(u_{\sigma'})(e_j) = u_\sigma(e_{\sigma'(j)}) = e_{\sigma\sigma'(j)}$

$A = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{kl} E_{k,l} \in M_{n,p}(K)$ $\quad M_\sigma = \sum_{\delta=1}^{n} E_{\sigma(j),j}$

$M_\sigma \times A = \sum_k \sum_l a_{kl} \underbrace{E_{\sigma(j),j} E_{kl}}_{\delta_{jk} E_{\sigma(j),l}} = \sum_{l=1}^{p} a_{jl} E_{\sigma(j),l}$

$L_{\sigma(j)}(M_\sigma A) = L_j(A)$

propriétés analogues pour les colonnes :
- échange de 2 colonnes
- permutation des colonnes

c) Théorème de Gauss

dans $M_n(K)$:

groupe $(GL_n(K), \times)$

* $T_{i,j}(\lambda) \in GL_n(K)$ $\quad i \neq j$ $\quad$ et $\det T_{ij}(\lambda) = 1$

$$\boxed{T_{ij}(\lambda) \times T_{ij}(\mu) = T_{ij}(\lambda+\mu)}$$

$\left(\text{car } (I_n + \lambda E_{ij})(I_n + \mu E_{ij}) = I_n + (\lambda+\mu) E_{ij} \quad (E_{ij} E_{ij} = 0) \right)$

$\lambda \longmapsto T_{ij}(\lambda)$ morphisme de groupes de $(K,+)$ vers $(\mathcal{T}_{ij}, \times)$
$K \longrightarrow \mathcal{T}_{ij}$

$$\mathcal{T} = \bigcup_{\substack{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \\ i \neq j}} \mathcal{T}_{ij} \subset GL_n(K)$$

* $D_i(\lambda) \in GL_n(K)$, $\det D_i(\lambda) = \lambda$

$$\boxed{D_i(\lambda) \times D_i(\mu) = D_i(\lambda\mu)}$$

$\lambda \longmapsto D_i(\lambda)$ morphisme de gpe $(K^*, \times) \to (\mathcal{D}_i, \times)$
$K^* \longrightarrow \mathcal{D}_i$

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i \subset GL_n(K)$$

Th $\mathcal{T} \cup \mathcal{D}$ engendre le groupe $GL_n(K)$: étant donné $A \in GL_n(K)$ il existe $T_1, \dots, T_r \in \mathcal{T} \cup \mathcal{D}$ tq $A = T_1 \times \dots \times T_r$

Toute matrice de $GL_n(K)$ est 1 produit fini de matrices de transvection / dilatation.

Déno préliminaire :

$A = P_1 \times \cdots \times P_r \iff P_r^{-1} \times \cdots \times P_1^{-1} \times A = I_n$

où $P_k \in \mathcal{T} \cup \mathcal{D}$

- soit $P_k = T_{ij}(\lambda) \longrightarrow P_k^{-1} = T_{ij}(-\lambda) \in \mathcal{T}$
- soit $P_k = D_i(\lambda) \longrightarrow P_k^{-1} = D_i(1/\lambda) \in \mathcal{D}$

Méthode algorithmique

→ multiplication A à gauche par des matrices de $\mathcal{T} \cup \mathcal{D}$,
on obtient I_n → opérer par opé élémentaires

Ecrire l'algorithme pour obtenir I_n à partir de A -
→ opé élém sur les lignes pour obtenir les col de I_n

Pour $j := 1$ à n, faire

(j^e étape : A mise à jour $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{\neq 0} & \\ & & \vdots & \\ & & \pi & \end{pmatrix}$ $\leftrightarrow$ $j-1$)

- Rech indice pivot (pivot) ind piv $\geq j$ (piv $\neq 0$)

$a_{i_0,j} \neq 0$ avec $i_0 \geq j$

i_0 : indice pivot ; $a_{i_0,j}$: pivot

(Si) indice pivot $\neq j$, échange $L_{i_0} \leftrightarrow L_j$

- Mise du pivot à 1, annulation des autres coef de j^e colonne $L_j \leftarrow \frac{L_j}{\text{pivot}}$

(Pour) $k := 1$ à n, si $k \neq j$, $L_k \leftarrow L_k - a_{k,j} L_j$

CSQ (méthodes variées du pivot de Gauss)

Appli $A \in GL_n(K)$, calcul de A^{-1} ?

$A = P_1 \times \cdots \times P_p$

$A^{-1} = P_r^{-1} \times \cdots \times P_1^{-1} \times \boxed{I_n}$ ASTUCE !

→ Une chaine d'op sur lignes transforme A en I_n et I_n en A^{-1}

Appli 2 Recherche de $\operatorname{rg} A$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$

$\operatorname{rg} A = r \iff A \sim J_{r,n,p}$

$\iff \exists P \in GL_n(K),\ \exists Q \in GL_p(K),\ PAQ = J_{rnp}$

"pivot total" ref — on peut transformer A en J_{rnp} par opé élem sur les lignes / col

"pivot partiel" ref — $A \sim A'$ réduite de Gauss $\operatorname{rg} A' = r = \operatorname{rg} A$

Appli 3 résolution de système $AX = B$

$A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ $X \in \mathcal{M}_{p,1}(K)$ inconnue $B \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ connue

Cas d'un système triangulaire de Cramer

$TZ = C$ $\quad T = \begin{pmatrix} t_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix}$ $\quad t_{ii} \neq 0$

$\sum_{j=i}^{n} t_{ij} z_j = c_i$

pour $k := n$ à 1 faire

$$z_k = \frac{1}{t_{kk}} \left(c_k - \sum_{j=k+1}^{n} t_{kj} z_k \right)$$

si $P \in GL_n(K)$ tq $PA = \begin{pmatrix} T & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ réduite de Gauss

$PAX = PB = B'$ $\quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} TX_1 + VX_2 = B'_1 \\ \boxed{0 = B'_2} \end{cases}$$

↑ condit° compatibilité

système de Cramer

$TX_1 = B'_1 - VX_2$