Algèbre
Chapitre 8

Espaces préhilbertiens complexes

I] Généralités

1) Idée : E $\mathbb{C}$ev, étendre la notion de ps.

$\mathbb{R}^n$ $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$ $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$

$\mathbb{C}^n$

Définition Soit E $\mathbb{C}$ev $f : E^2 \to \mathbb{C}$

ODA f ps / E si

f est sesquilinéaire :
(1) f linéaire à droite ie $\forall x \in E$ $f(x, \cdot) \in E^*$
(2) f semi linéaire à gauche ie $\forall y \in E, \forall x, x' \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}$
$f(x + \lambda x', y) = f(x, y) + \overline{\lambda} f(x', y)$

(3) f hermitienne : $\forall (x, y) \in E^2$
$f(x, y) = \overline{f(y, x)}$

(4) f définie et positive
(5) $\forall x \in E$, $f(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$
$f(x, x) \geq 0$

On dit alors (E, f) est préhilbertien cpx.
Si de plus il est de df, il est hermitien.

Rem Ecr $(1) + (3) = (1) + (2) + (3)$
$(4) + (5) = (6)$ $\forall x \in E$ $x \neq 0 \Rightarrow f(x, x) > 0$

2) Norme préhilbertienne

Th Soit (E, f) un espace PHC. alors $\forall (x, y) \in E^2$
$|f(x, y)| \leq \sqrt{f(x, x)\ f(y, y)}$ (inégalité de Cy-Sch)
avec égalité ssi (x, y) liée.

Prop/Def $\begin{vmatrix} x \mapsto \sqrt{f(x,x)} = \|x\| \\ E \to \mathbb{R}^+ \end{vmatrix}$ est 1 norme sur E, dite ass au ps f ou norme préhilbertien.

Démo $\forall (x,y) \in E^2$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $P(\lambda) = f(x+\lambda y, x+\lambda y) \geq 0$

$$P(\lambda) = f(x,x) + \lambda f(x,y) + \bar\lambda f(y,x) + \lambda\bar\lambda f(y,y)$$

$$P(\lambda) = a|\lambda|^2 + \underbrace{2\,\mathrm{Re}(b\lambda)}_{b\lambda + \bar b \bar\lambda} + c$$

1er cas si $a > 0$

$$P(\lambda) = a\left(\lambda + \frac{\bar b}{a}\right)\left(\bar\lambda + \frac{b}{a}\right) + \overbrace{c - \frac{|b|^2}{a}}^{\text{mq} \geq 0}$$

$$P\left(-\frac{\bar b}{a}\right) = \frac{ac - |b|^2}{a} \geq 0 \Rightarrow ac \geq |b|^2$$

$$\sqrt{ac} \geq |b| \quad \square$$

2e cas si $a = 0$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad (b + \bar b)\lambda + c \geq 0 \Rightarrow b + \bar b = 0$

$\lambda = i\mu$ $\quad (b - \bar b)\mu + c \geq 0 \Rightarrow b - \bar b = 0$

$(\forall \mu \in \mathbb{R})$ $\quad \Rightarrow b = \bar b = 0 \quad \Rightarrow b = 0$

Cas d'égalité $\boxed{CS}$ si (x,y) liée $x = ky$ par exemple

$$|f(x,y)| = |k| f(y,y)$$

$$f(x,x) = |k|^2 f(y,y) \quad \text{égalité}$$

$\boxed{CN}$ on sup l'égalité, on reprend les 2 cas

- $a > 0$ $\quad P\left(-\frac{\bar\lambda}{a}\right) = 0$ $\quad f$ déf pos $\Rightarrow x - \frac{\bar\lambda}{a} y = 0$
  (x,y) liée

- $a = 0 = f(y,y)$ $\quad f$ PS $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow (x,y)$ liée $\square$

Démo prop • $\forall x \in E$, $\|x\| \geq 0$

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

• $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\|\lambda x\| = \sqrt{|\lambda|^2 f(x,x)} = |\lambda|\,\|x\|$

• inég tr $\quad \|x+y\|^2 = f(x,x) + \underbrace{f(x,y) + f(y,x)}_{2\,\mathrm{Re}\, f(x,y)} + f(y,y)$

or $\mathrm{Re} f(x,y) \leq |f(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

$\Rightarrow \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ et on conclut

3) Formulaire $\quad E$ Cev $\quad$ / ps $(\cdot|\cdot)$

▶ Cauchy Schwarz $\quad (E,(\cdot|\cdot))$ PHC $\quad$, $\|\cdot\|$ norme PH

$\forall (x,y)\in E^2, \quad |(x|y)| \leq \|x\|\cdot\|y\|$

▶ Polarisation

P1 $\quad \forall (x,y)\in E^2 \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x|y) + \|y\|^2$

démo $\quad \|x+y\|^2 = (x|x) + (y|y) + (x|y) + (y|x)$

$\overline{(y|x)}$ ...

P2 $\quad$ On a aussi $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(x|y) + \|y\|^2$ d'où

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$ $\quad$ identité du //

P3 $\quad$ (identité de polarisation) $\quad \forall (x,y)\in E^2$

$$(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2 + i\|y+ix\|^2 - i\|y-ix\|^2\right)$$

$$\left(\text{ou } (x|y) = \frac{1}{4}\sum_{\omega\in U_4} \omega\|y+\omega x\|^2\right)$$

démo $\quad \|y+x\|^2 - \|y-x\|^2 = 4\operatorname{Re}(x|y)$

$\|y+ix\|^2 - \|y-ix\|^2 = 4\operatorname{Re}(ix|y)$ $\quad$, $(ix|y) = -i(x|y)$

si $(x|y) = \alpha + i\beta$, $(ix|y) = -i(\alpha+i\beta) = \beta - i\alpha$ $\quad \operatorname{Re}(ix|y) = \beta = \operatorname{Im}(x|y)$

Rem $\quad$ identité de la médiane $\quad z = \frac{x+y}{2}$ ...

4) Orthogonalité $\quad (E,(\cdot|\cdot))$ PHC

Def $\quad x,y\in E$ orthogonaux si $(x|y)=0$ $\quad$ noté $x\perp y$

Prop : Th de Pythagore $\quad$ Si $x\perp y$ alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

réciproque fausse en général : égalité $\Rightarrow \operatorname{Re}(x|y) = 0$

Def $\quad A\subset E$, $A^\circ = A^\perp = \{x\in E / \forall a\in A, (a|x) = 0\} = \bigcap_{a\in A}\{a\}^\circ$

Prop $\quad A^\circ$ sev de E

Prop $E^\circ = \{0\}$; $\{0\}^\circ = E$

$A \subset B \Rightarrow A^\circ \supset B^\circ$

$(\mathrm{Vect}\, A)^\circ = A^\circ$

$(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

démo • A° sev de E : $\{a\}^\circ = \ker(x \mapsto (a|x))$

• $A \subset B$, $x \in B^\circ \Rightarrow \forall b \in B, (a|x) = 0$ $A \subset B$ vrai $\forall a \in A$, $x \in A^\circ$

• $A \subset \mathrm{Vect}\, A \Rightarrow (\mathrm{Vect}\, A)^\circ \subset A^\circ$

$x \in A^\circ$ et $y \in \mathrm{Vect}\, A$, $\exists \begin{vmatrix} a_1, \dots, a_n \in A \\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \end{vmatrix} y = \sum \lambda_j a_j$

$(x|y) = \sum \lambda_j \underbrace{(x|a_j)}_{0} = 0$ donc $x \in (\mathrm{Vect} A)^\circ$

• $x \in (A \cup B)^\circ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \forall a \in A, (x|a) = 0 \\ \forall b \in B, (x|b) = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow x \in A^\circ \cap B^\circ$

Def $(E, (\cdot|\cdot))$ PHC

• $B = (e_i)_{i \in I} \in E^I$ est <u>OG</u> si $\forall (i,j) \in I^2$, $i \neq j \Rightarrow e_i \perp e_j$

• $x \in E$ <u>unitaire</u> si $\|x\| = 1$

• B <u>orthonormale</u> si $\forall (i,j) \in I^2$, $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$

Prop Si $(e_1, \dots, e_n)$ OG alors $\|\sum e_i\|^2 = \sum \|e_i\|^2$ (pythagore)

Une famille OG de vecteurs non nuls est libre.

démo $(e_1, \dots, e_n)$ F OG

$\sum x_j e_j = 0$, $(e_i|0) = x_i \underbrace{\|e_i\|^2}_{>0} \Rightarrow x_i = 0$ ...

5) <u>Procédé de Schmidt, Espaces hermitiens</u>

Prop $(E, (\cdot|\cdot))$ PHC $B = (b_1, \dots, b_n)$ famille libre de E

Soit $V = \mathrm{Vect}\, B$. Alors il existe 1 FON $C = (c_1, \dots, c_n)$ base de V telle que $T = \mathrm{Pass}(B, C)$ tri sup

C étant unique si on suppose de plus $T_{jj} > 0$ $\forall j \in [\![1,n]\!]$

démo • On part de b_1, $c_1 = \lambda b_1$ tq c_1 unitaire

$\lambda \in \mathbb{C}$ tq $|\lambda| = \frac{1}{\|b_1\|}$ λ unique, $\lambda > 0$, $\lambda = \frac{1}{\|b_1\|}$

• On suppose construit $(c_1, \dots, c_p)$, c_{p+1} ?

$$c_{p+1} = b_{p+1} + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j b_j = b_{p+1} + \sum \mu_j c_j$$

μ_j tq $(c_j | c_{p+1}) = 0 = (c_j | b_{p+1}) + \mu_j$
$j \leq p$ $\Rightarrow \mu_j = -(c_j | b_{p+1})$ puis on normalise

Algo :

Pour $p := 1$ à n faire

$c_p := b_p - \sum_{j=1}^{p-1} (c_j | b_p) c_j$

$c_p := \frac{c_p}{\|c_p\|}$

$\boxed{\text{Csq}}$

$\boxed{\text{Th}_1}$ Dans un espace hermitien il existe des BON.

démo $\dim E = n \geqslant 1$, $\exists B$ base, on la schmidte ...

Prop (Th de la BON incomplète)

E hermitien de dim $n \geq 1$ $(c_1, —, c_p)$ FON, elle peut être complétée en $(c_1, —, c_n)$ BON de E

$C = (c_1, —, c_p)$ TBI $\to (c_1, —, c_p, b_{p+1}, —, b_n)$ base on schmidte : aucun effet sur $c_1, —, c_p$ et ça roule.

$\boxed{\text{Prop}}$ E hermitien de dim n, F sev de E alors
$E = F \oplus F^\circ$ et $(F^\circ)^\circ = F$.

Démo $p = \dim F$ $p = 0$ ou $p = n$ évident
$(F^\circ = E \quad F^\circ = \{0\})$

$1 \leq p \leq n-1$ $(e_1, —, e_p)$ BON de F complétée en $(e_1, —, e_n)$ BON de E

$x \in E$ $x = \sum^n x_j e_j$ $(e_j | x) = x_j$

$x \in F^\circ \iff \forall j \in [1, p]$ $(e_j | x) = 0$ $\iff x \in \text{Vect}(e_{p+1}, —, e_n)$

ie $F = \text{Vect}(e_1, —, e_p)$; $F^\circ = \text{Vect}(e_{p+1}, —, e_n)$

$\Rightarrow E = F \oplus F^\circ$

donc $\dim F^\circ = \dim E - \dim F$; mq $F \subset F^{\circ\circ}$

si $x \in F, y \in F^\circ \Rightarrow x \perp y \Rightarrow x \in (F^\circ)^\circ$

$\underline{\dim F^{\circ\circ}} = \dim E - \dim F^\circ = \underline{\dim F} \Rightarrow F = F^{\circ\circ}$

6) Bilan des propriétés dans 1 hermitien

E $\mathbb{C}$evdf $n \geq 1$, muni d'1 ps

• Existence de BON

$C = (c_1, \dots, c_n)$ BON $\forall x \in E$, $x = \sum_{j=1}^n x_j c_j$ où $x_j = (c_j|x)$

Dans 1 BON : $\forall x, y \in E^2$ $x = \sum x_j c_j$ $y = \sum y_j c_j$

$\boxed{(x|y) = \sum \overline{x_j} y_j = {}^t\overline{X} Y}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $Y = \dots$

$\boxed{\|x\|^2 = \sum |x_j|^2 = {}^t\overline{X} X}$

•• Supplémentaire OG F sev de E alors

$E = F \oplus F^\circ$

projection OG/F $p_F : x = x_F + x_{F^\circ} \mapsto x_F$

$\operatorname{Im} p_F = F$, $\operatorname{Ker} p_F = F^\circ$

si on connait BON de F $(c_1, \dots, c_r)$

$x \in E$, $p_F(x) = \sum^r x_j c_j$ $x - p_F(x) \in F^\circ$

$(c_j | x - p_F(x)) = (c_j|x) - x_j = 0$

$$p_F(x) = \sum^r (c_j|x) c_j$$

∴ Dualité représentation des FL ?

E^* $\mathbb{C}$evdf $\dim E^* = n = \dim E$

Prop E hermitien, alors $\phi \left| \begin{array}{l} a \mapsto \varphi_a (x \mapsto (a|x)) \\ E \to E^* \end{array} \right.$ est

une bijection, semi linéaire.

Démo Meth 1 (analytique) $C = (c_1, \dots, c_n)$ BON de E

$\psi \in E^*$ $x \in E$ $x = \sum x_j c_j$ $\psi(x) = \sum \psi(c_j) x_j$

On cherche $a \in E$ tq $\psi(x) = (a|x)$ a existe, unique :

$a = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j$ où $a_j = \overline{\varphi(e_j)}$

$\forall \varphi \in E^* \; \exists! \, a \in E, \; \varphi = \varphi_a$ ie ϕ bijective semi lin

ie $\forall a, b \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\left| \begin{array}{l} \varphi_{a+\lambda b} = \varphi_a + \overline{\lambda} \varphi_b \\ \phi(a+\lambda b) = \phi(a) + \overline{\lambda} \phi(b) \end{array} \right.$

Méth 2 (algébrique)

E, E^* $\mathbb{C}$ ev donc $\mathbb{R}$ ev

(dim) n $2n$

:: Chgt de BON E hermitien, $\dim E = n \geq 1$

$\mathcal{B}$ BON connue, $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ critère $\mathcal{C}$ BON ?

on utilise $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ $\mathcal{C}$ BON $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ FON

ie $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$ $\langle c_i, c_j \rangle = \delta_{ij}$

$c_j = \sum_{k=1}^{n} p_{kj} b_k$ $\hookrightarrow$ $\sum_{k=1}^{n} \overline{p_{ki}} \, p_{kj} = \delta_{ij}$

$({}^t\overline{P} P)_{ij} = \delta_{ij}$

Prop $\mathcal{C}$ BON $\Leftrightarrow$ ${}^t\overline{P} P = I_n$

si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ / ${}^t\overline{P} P = I_n$, P est unitaire.

Prop $U(n) = \{ P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / {}^t\overline{P} P = I_n \}$ alors $U(n)$ sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.

Rem si $P \in U(n)$ $|\det P|^2 = 1$, $|\det P| = 1$

$Sp_{\mathbb{C}}(P) \subset \mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} / |z| = 1 \}$

$\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(P)$ X vep ass $PX = \lambda X$

${}^t\overline{X} X = \|X\|^2 = {}^t\overline{X} \, {}^t\overline{P} P X = \|PX\|^2$ $\Rightarrow |\lambda|^2 = 1$

Rem $O(n) \subset U(n)$ $O(n) = U(n) \cap GL_n(\mathbb{R})$

HP : - étude des ops d'1 espace hermitien

- notion d'adjoint

Déf • adjoint E hermitien $u \in \mathcal{L}(E)$ ps $(\cdot|\cdot)$

$u^* \in \mathcal{L}(E)$ tq $\forall (x,y) \in E^2 \quad (u(x)|y) = (x|u^*(y))$

Prop Si B BON de E, $M = M_B(u)$ alors $M_B(u^*) = {}^t\overline{M}$

Déf u hermitien ou autoadjoint : $u^* = u$

u unitaire si $u^* \circ u = id_E$

u normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$

Th E hermitien, $u \in \mathcal{L}(E)$ normal.

Alors u dgz et il existe 1 BON de E propre pr u

et $E = \bigoplus^{\perp}_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

démo : normal $\Rightarrow$ u^* stabilise les sep de u ...

et traduction matricielle :

Prop $M \in M_n(\mathbb{C})$ / ${}^t\overline{M}M = M\,{}^t\overline{M}$ alors $\exists P \in U(n)$ tq

${}^t\overline{P} M P = D$, D diagonale

II Projection OG sur un sevdf

résultat analogue à celui vu ds les PHR :

Th E PHC, F sevdf

(1) $\forall x \in E, \exists! y \in F / x - y \in F^\circ$

Soit $p_F : \begin{array}{l} x \mapsto y \\ E \to E \end{array}$; $p_F \in \mathcal{L}(E)$, $p_F^2 = p_F$

$\operatorname{Im} p_F = F$, $\operatorname{Ker} p_F = F^\circ$

(2) Si $(e_1, \ldots, e_r)$ BON de F, alors

$\forall x \in E, \ p_F(x) = \sum_{j=1}^{r} (e_j|x)\, e_j$

(3) $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\circ$, p_F est la PO sur F

(4) $\forall x \in E$, $d(x,F) = \inf\{\|x-a\|, a \in F\}$ est atteinte

uniquement pour $a = p_F(x)$ et $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\circ}(x)\|^2$

$d^2(x,F) = \|x - p_F(x)\|^2 = \|p_{F^\circ}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$

<u>démo</u> idem PMR !

(1) <u>existence</u> : par (2) $C = (e_1, \dots, e_r)$ BON de F

$\underbrace{y = \sum_{j=1}^{r} (e_j|x) e_j}_{(e_j|y) = (e_j|x)} \in F$ tq $(e_j | x - y) = 0 \quad \forall j \in [\![1, r]\!]$

$\Rightarrow x - y \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)^\circ = F^\circ$

<u>unicité</u> $y_1, y_2 \in F \quad x - y_1 \in F^\circ \quad x - y_2 \in F^\circ$

$\Rightarrow y_1 - y_2 \in F \cap F^\circ = \{0\}$

<u>$p_F \in \mathcal{L}(E)$</u> grâce à (2)

<u>idempotent</u> $x \in E, y = p_F(x) \qquad \{0\} = y - y \in F^\circ$

par unicité $p_F(y) = y$

<u>$\mathrm{Im}\, p_F = F$</u> $\quad \mathrm{Im}\, p_F \subseteq F$ cv $\supseteq$ suppos $y \in F$, $p_F(y) = y$..

<u>$\mathrm{Ker}\, p_F$</u> $\quad x \in \mathrm{Ker}\, p_F \Leftrightarrow x - 0 \in F^\circ \Leftrightarrow$ <u>$x \in F^\circ$</u>

(3) cf prop des projecteurs : $E = \underbrace{\mathrm{Im}\, p}_{\mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)} \oplus \mathrm{Ker}\, p$

(4) <u>méthode des moindres carrés</u>

$x \in E,\ x = y + z$ où $y = p_F(x) \in F$; $z = p_{F^\circ}(x) \in F^\circ$

$a \in F \quad x - a = \underbrace{(y - a)}_{\in F} + \underbrace{z}_{\in F^\circ}$ puis th pythagore !

$\varphi(a) = \|x - a\|^2 = \|y - a\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2$

égalité seulement pour $a = y = p_F(x)$

$\boxed{\text{csq}}$ $\boxed{\text{Rem 1}}$ F ~~sevdf~~ $\qquad E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\circ$

si F non df, $F \cap F^\circ = \{0\}$ mais $E \overset{?}{=} F \perp F^\circ$

$\boxed{\text{Ex}}$ $E = \ell^2(\mathbb{C}) = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \,/\, \sum |u_n|^2 \text{ CV}\}$ muni du

ps $\forall u, v \in \ell^2(\mathbb{C})\ (u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} \times v_n$

• <u>pref</u> $u, v \in \ell^2(\mathbb{C})$, $\sum \overline{u_n} v_n$ CVA

cf $(|u_n| - |v_n|)^2 \geq 0 \Rightarrow |u_n v_n| \leq \dfrac{|u_n|^2 + |v_n|^2}{2}$

•• <u>hermitienne</u> $(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n = \dots = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \overline{v_n}} = \overline{(v|u)}$

et lin à droite $\quad (u | v + \lambda w) = \dots = (u|v) + \lambda (u|w)$

$\forall u \in \ell^2(\mathbb{C}) \qquad (u|u) = \sum |u_n|^2 \geq 0$

$(u|u) = 0 \quad \ldots$

ccl $\quad \underline{\ell^2(\mathbb{C})\ \text{PHC}}$

Considérons $F = \text{vect}(e_k)_{k\in\mathbb{N}} \qquad e_k : n \longmapsto \delta_{k,n}$

$e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$

$u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;;\quad (e_n|u) = u_n$

$\underline{F^\circ = \{0\}} \quad \Rightarrow F + F^\circ = F \neq E \quad$ (cf support fini)

$\boxed{\text{Ex}}$ $\quad E = \mathcal{C}^0([0,1]/\mathbb{C}) \qquad \langle f, g\rangle = \int_0^1 \bar{f} g \quad$ ps $/E$

$F = \{ f \in E / f(0) = 0 \} \quad$ mq $F^\circ = \{0\}$

$f \in F^\circ \qquad g(t) = t\, f(t) \,;\ t \in [0,1] \quad g \in F$

$\langle f, g\rangle = \int_0^1 t\, |f(t)|^2 dt = 0 \Rightarrow \forall t \in [0,1],\ t\, |f(t)|^2 = 0$

$f(t) = 0$

f continue $\Rightarrow f = 0$

$\boxed{\text{Rem2}}$ $\boxed{\text{Prop}}$ $\quad F$ sev dim finie $\quad F^{\circ\circ} = F$

Démo $\quad F \subset F^{\circ\circ}$ cv

$t \in F^{\circ\circ} \quad t = s + w \quad s \in F \quad w \in F^\circ$

$\underbrace{(t|w)}_{0} = \underbrace{(s|w)}_{0} + (w|w) \quad \Rightarrow \|w\|^2 = 0 \qquad w = 0$

$t = s \in F$

$\Rightarrow F^{\circ\circ} \subset F$

$\boxed{\text{Rem 3}}$ $\quad$ Ineg de Bessel

$\boxed{\text{Prop}}$ $\quad (E, (\cdot|\cdot))$ PHC et $(e_1, \ldots, e_r)$ FON de E

Alors $\forall x \in E \quad \sum_{j=1}^{r} |(e_j|x)|^2 \leq \|x\|^2$

Démo $\quad F = \text{vect}(e_1, \ldots, e_r) \;;\ p_F(x) = \sum_{j=1}^{r} (e_j|x) e_j$

$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\circ}(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2 = \sum |(e_j|x)|^2 \qquad \square$

Appli $B=(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ FON

$\forall n \in \mathbb{N}$ $(e_0, \dots, e_n)$ $\forall x \in E$ $\sum_{j=1}^{n} |(e_j|x)|^2 \leq \|x\|^2$

$x_j = (e_j|x)$ $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$ et $N_2(u) \leq \|x\|^2$

Rem Cas d'égalité : identité de Parseval

$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(e_j|x)|^2 \iff x \in \overline{F}$? où $F = \mathrm{Vect}\, B$

Exemple

(1) $\inf \left\{ \int_{-1}^{1} | it^2 + t^3 - (at+b)|^2 \, dt \,/\, a, b \in \mathbb{C} \right\} = \alpha$?

Modèle $E = \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{C})$ ps $(f|g) = \int_{-1}^{1} \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$

$\|f\|^2 = \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, dt$

$F = \{ (t \mapsto at+b) \,/\, (a,b) \in \mathbb{C} \} = \mathrm{Pol}_1(\mathbb{C}) = \mathrm{Vect}(u, v)$ $\left| \begin{array}{l} u : t \mapsto 1 \\ v : t \mapsto t \end{array} \right.$

$\varphi : t \mapsto t^3 + it^2$

interprétation $\alpha = \inf \{ \|\varphi - f\|^2 / f \in F \} = d(\varphi, F)^2$

$\alpha = \|\varphi - p_F(\varphi)\|^2 = \|p_{F^\circ}(\varphi)\| = \|\varphi\|^2 - \|p_F(\varphi)\|$

$p_F(\varphi)$?

(u,v) BOG de F cf $(u|v) = 0$ $e_1 = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$e_2 : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{2/3}}$ cf impaire → intégrale nulle

$(e_1|\varphi) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} (\cancel{t^3} + it^2)\, dt = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3}$

$(e_2|\varphi) = \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{2/3}} (t^3 + \cancel{it^2})\, dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{5}$

$\Rightarrow p_F(\varphi) = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} e_1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2}{5} e_2$ $\|p_F(\varphi)\|^2 = \frac{104}{225}$

$\|\varphi\|^2 = \dots = \frac{24}{35}$ $\Rightarrow d^2(\varphi, F) = \frac{24}{35} - \frac{104}{225} = \frac{352}{1575}$