Prof. Dr. H. Brenner Osnabrï¿½ck SS 2012

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 29

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 29.1. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass eine ebene projektive Kurve mit jeder projektiven Geraden in der projektiven Ebene einen nichtleeren Durchschnitt hat.

Aufgabe 29.2.*

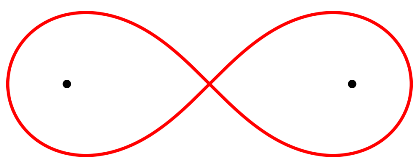
Sei $K = \mathbb{Z}/(5)$ und betrachte die beiden affinen ebenen algebraischen Kurven

$$C = V(X^2 + Y^2 - 1) \text{ und } D = V(X^3 - 2Y^2 + 3) .$$

Bestimme den Durchschnitt $C \cap D$. Bestimme ferner die unendlich fernen Punkte der beiden Kurven (also die zusätzlichen Punkte auf dem projektiven Abschluss $\bar{C}$ bzw. $\bar{D}$). Wenn man K durch einen algebraisch abgeschlossenen Körper $K \subset L$ ersetzt, wie viele Punkte besitzt dann der Durchschnitt $\bar{C} \cap \bar{D}$ und wie viele davon liegen auf der unendlich fernen Geraden?

Aufgabe 29.3.*

Sei K ein Körper. Zeige, dass sämtliche lokale Ringe der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_K$ isomorph zueinander sind. Man gebe eine möglichst einfache Beschreibung dieses Ringes.



Die Lemniskate von Bernoulli

Aufgabe 29.4. Bestimme für die durch $V((X^2 + Y^2)^2 - X^2 + Y^2)$ gegebene Lemniskate von Bernoulli die Singularitäten sowie die unendlich fernen Punkte in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Berechne in all diesen Punkten die Multiplizität und die Tangenten.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 29.5. (3 Punkte)

Seien $m+1$ homogene Polynome $F_0, \ldots, F_m$ in $n+1$ Variablen gegeben, die alle den gleichen Grad d besitzen. Zeige, dass es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{P}^n_K$ gibt, auf der die Polynome einen Morphismus

$$\mathbb{P}^n_K \supseteq U \longrightarrow \mathbb{P}^m_K$$

definieren.

Aufgabe 29.6. (3 Punkte)

Sei $P = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{P}^n_K$ ein Punkt im projektiven Raum. Zeige, dass die Projektion des $\mathbb{P}^n_K$ auf $\mathbb{P}^{n-1}_K$ mit Zentrum P durch die Matrix

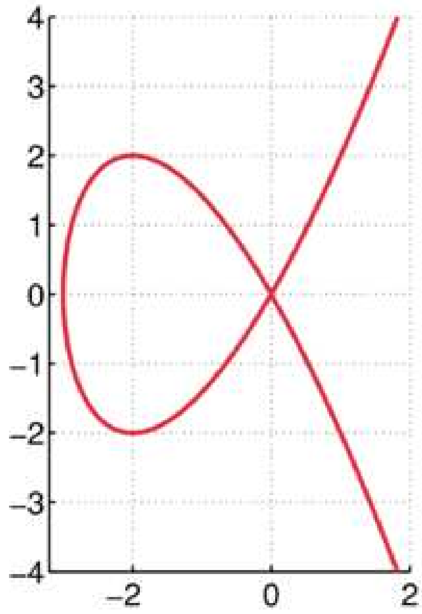
$$\begin{pmatrix} -a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, also durch die Abbildung

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 29.7. (3 Punkte)

Bestimme für die durch $V(X^3 + 3X^2 - Y^2)$ gegebene *Tschirnhausen Kubik* die Singularitäten unter Berücksichtigung der unendlich fernen Punkte. Bestimme die Tangenten in den Singularitäten und in den unendlich fernen Punkten.



Die Tschirnhausen Kubik

Aufgabe 29.8. (3 Punkte)

Bestimme für das durch $V(X^3 + Y^3 - 3XY)$ definierte Kartesische Blatt die unendlich fernen Punkte in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ und berechne die Multiplizität und die Tangenten in diesen Punkten.

Aufgabe 29.9. (5 Punkte)

Man gebe für die projektive Lemniskate von Bernoulli

$$V_+((X^2 + Y^2)^2 - Z^2X^2 + Z^2Y^2) \subset \mathbb{P}^2_K$$

einen surjektiven Morphismus auf eine projektive Quadrik an. Wie viele Punkte der Lemniskate werden dabei auf einen Punkt der Quadrik abgebildet?