Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Arbeitsblatt 82

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 82.1. Schaue in einen Spiegel. Vertauscht die Spiegelung links und rechts, oben und unten, vorne und hinten? Durch welche lineare Abbildung wird eine Spiegelung beschrieben?

Aufgabe 82.2. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass auf der Menge der (geordneten) Basen die Orientierungsgleichheit eine Äquivalenzrelation ist, die bei $V \neq 0$ aus genau zwei Äquivalenzklassen besteht.

Aufgabe 82.3. Sei $V \neq 0$ ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$. Zeige, dass wenn man einen Vektor v_i durch sein Negatives $-v_i$ ersetzt, dass dann die neue Basis die entgegengesetzte Orientierung repräsentiert.

Aufgabe 82.4. Es seien V und W zwei endlichdimensionale orientierte reelle Vektorräume und sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine bijektive lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann orientierungstreu ist, wenn es eine die Orientierung auf V repräsentierende Basis $v_1, \ldots, v_n$ gibt, deren Bildvektoren $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ die Orientierung auf W repräsentieren.

Aufgabe 82.5. Bestimme, ob die beiden Basen des $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

Aufgabe 82.6. Es sei X ein topologischer Raum, der nur aus endlich vielen Elementen bestehe. Zeige, dass X kompakt ist.

Aufgabe 82.7. Es sei X ein topologischer Raum und es seien $Y_1, \ldots, Y_n \subseteq X$ kompakte Teilmengen. Zeige, dass auch die Vereinigung $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$ kompakt ist.

Aufgabe 82.8. Es sei X ein kompakter Raum und es sei $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge, die die induzierte Topologie trage. Zeige, dass Y ebenfalls kompakt ist.

Aufgabe 82.9. Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht überdeckungskompakt ist.

Aufgabe 82.10. Wir betrachten die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und versehen sie mit der diskreten Metrik. Zeige, dass $\mathbb{N}$ abgeschlossen und beschränkt, aber nicht überdeckungskompakt ist.

Aufgabe 82.11. Es sei X ein kompakter metrischer Raum. Zeige, dass X vollständig ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 82.12. (5 Punkte)

Wir betrachten die Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^3$ und die dadurch induzierte Basis

$$\mathfrak{v} = v_1 \wedge v_2,\ v_1 \wedge v_3,\ v_2 \wedge v_3$$

von $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$. Bestimme die Übergangsmatrizen (in beide Richtungen) zwischen der Basis $\mathfrak{v}$ und der Standardbasis $e_1 \wedge e_2,\ e_1 \wedge e_3,\ e_2 \wedge e_3$.

Aufgabe 82.13. (4 Punkte)

Bestimme, ob die beiden Basen des $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

Aufgabe 82.14. (6 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Zeige, dass es auf V, aufgefasst als reellen Vektorraum, eine natürliche Orientierung gibt

Aufgabe 82.15. (4 Punkte)

Zeige, dass die 1-Sphäre S^1 eine orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 82.16. (4 Punkte)

Es sei X ein Hausdorffraum und es sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, die die induzierte Topologie trage. Es sei Y kompakt. Zeige, dass Y abgeschlossen in X ist.

Aufgabe 82.17. (4 Punkte)

Es seien X und Y topologische Räume und es sei

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Es sei X kompakt. Zeige, dass das Bild $\varphi(X) \subseteq Y$ ebenfalls kompakt ist.

Abbildungsverzeichnis