Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Einführung in die mathematische Logik

Vorlesung 4

Semantik

Gelegentlich haben wir schon angedeutet, was die zuletzt eingeführten prädikatenlogischen Symbole, die wir rein formal als Zeichenreihen behandelt haben, eigentlich bedeuten sollen, was also ihr logisch-mathematischer Gehalt sein soll. Bei einer solchen Interpretation werden die Junktoren, die Quantoren und das Gleichheitszeichen stets in der gleichen Weise interpretiert, die Variablen, Konstanten, Relations- und Funktionssymbole aber unterschiedlich. Dazu erinnern wir an einige mathematische Begriffe. Wir setzen eine naive Mengenlehre und die natürlichen Zahlen „zum Zählen" (wie schon weiter oben) voraus. Wir erinnern an einige grundlegende mathematische Definitionen.

Definition 4.1. Es seien zwei Mengen L und M gegeben. Dann nennt man die Menge

$$L \times M = \{(x, y) | \, x \in L, \, y \in M\}$$

die *Produktmenge* der beiden Mengen.

Für uns ist insbesondere das n-fache Produkt einer Menge M mit sich selbst, also

$$M^n = M \times M \times \cdots \times M$$

(mit n Faktoren) wichtig.

Definition 4.2. Unter einer *n-stelligen Relation R* auf einer Menge M versteht man eine Teilmenge der n-fachen Produktmenge $M \times \cdots \times M$.

Definition 4.3. Seien L und M zwei Mengen. Eine *Abbildung* F von L nach M ist dadurch gegeben, dass jedem Element der Menge L genau ein Element der Menge M zugeordnet wird. Das zu $x \in L$ eindeutig bestimmte Element wird mit $F(x)$ bezeichnet. Die Abbildung drückt man als Ganzes häufig durch

$$F : L \longrightarrow M, \, x \longmapsto F(x),$$

aus.

Definition 4.4. Es sei M eine Menge. Unter einer *n-stelligen Funktion* auf M versteht man eine Abbildung

$$f : M \times \cdots \times M \longrightarrow M, \, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n),$$

vom n-fachen Produkt von M mit sich selbst nach M.

Eine n-stellige Funktion kann auch als eine $(n+1)$-stellige Relation aufgefasst werden, bei der es zu jedem n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ genau ein x_{n+1} gibt derart, dass $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ zur Relation gehört. Dieses x_{n+1} ist dann der Funktionswert der zugehörigen Funktion an der Stelle $(x_1, \ldots, x_n)$.

Interpretationen

Definition 4.5. Es sei S das Symbolalphabet einer Sprache erster Stufe. Unter einer *S-Struktur* versteht man eine Menge M mit den folgenden Festlegungen.

(1) Für jede Konstante $c \in C$ ist ein Element $c^M \in M$ festgelegt.
(2) Zu jedem n-stelligen Funktionssymbol f (aus S) ist eine n-stellige Funktion
$$f^M : M^n \longrightarrow M$$
festgelegt.
(3) Zu jedem n-stelligen Relationssymbol R (aus S) ist eine n-stellige Relation
$$R^M \subseteq M^n$$
festgelegt.

Unter einer *S-(Variablen)belegung* in M versteht man eine Festlegung x^M für jede Variable $x \in \mathrm{Var}(S)$.

Unter einer *S-Interpretation* versteht man eine S-Struktur zusammen mit einer S-Belegung.

Die Menge M heißt auch *Grundmenge* der S-Struktur bzw. der S-Interpretation. Die Festlegung für die Konstanten und die Variablen ist einfach eine Abbildung von C bzw. von der Variablenmenge in die Menge M. Statt c^M, x^M, F^M, R^M schreibt man auch $I(c), I(x), F^I, R^I$, wobei I eine Interpretation bezeichnet. Die Strukturen sind übliche Gegenstände der Mathematik.

Beispiel 4.6. Es sei S ein Alphabet, das außer einer Variablenmenge V aus einem einzigen einstelligen Funktionssymbol F bestehe (die Konstantenmenge und die Relationssymbolmengen seien also leer). Eine S-Struktur besteht dann aus einer Menge M zusammen mit einer Abbildung
$$f = F^M : M \longrightarrow M,\ a \longmapsto f(a).$$
Beispiele sind $M = \mathbb{N}$ mit der Nachfolgerfunktion, $M = \mathbb{R}$ mit dem Quadrieren $x \mapsto x^2$ oder der Sinusfunktion oder der Exponentialfunktion, oder eine beliebige Menge mit der Identität, u.s.w.

Beispiel 4.7. Es sei S ein Alphabet, das außer einer Variablenmenge V aus einem einzigen zweistelligen Funktionssymbol F bestehe (die Konstantenmenge und die Relationssymbolmengen seien also leer). Eine S-Struktur besteht dann aus einer Menge M zusammen mit einer Abbildung

$$f = F^M : M \times M \longrightarrow M,\ (a,b) \longmapsto f(a,b).$$

Eine solche Abbildung nennt man auch eine Verknüpfung auf M

sie ordnet (einem geordneten Paar aus) zwei Elementen der Menge ein weiteres Element der Menge zu. Die Addition oder die Multiplikation auf den natürlichen Zahlen sind jeweils eine solche Verknüpfung.

Beispiel 4.8. Es sei S ein Alphabet, das außer einer Variablenmenge V aus einem einzigen einstelligen Relationssymbol R bestehe (die Konstantenmenge und die Funktionssymbolmengen seien also leer). Eine S-Struktur besteht dann aus einer Menge M zusammen mit einer fixierten Teilmenge $U \subseteq M$. Beispiele sind $M = \mathbb{N}$ mit der Teilmenge der Primzahlen, oder der Teilmenge der Quadratzahlen, oder $M = \mathbb{R}$ mit der Teilmenge der positiven Zahlen, oder der Teilmenge der rationalen Zahlen, u.s.w.

Interpretation von Termen

Mit einer solchen Interpretation wird das Symbolalphabet, das neben den Junktoren, Quantoren, dem Gleichheitszeichen und den Klammern das Alphabet der Sprache bildet, interpretiert. Man möchte aber die gesamte Sprache in M, ausgehend von der Interpretation dieser Symbole, interpretieren. Der erste Schritt dazu ist die Interpretation der Terme. Die Wohldefiniertheit der folgenden Festlegung ergibt sich durch einen Beweis über den Aufbau der Terme.

Definition 4.9. Zu einem Symbolalphabet S erster Stufe und einer S-Interpretation in einer Menge M wird induktiv über den Aufbau der Terme für jeden S-Term t eine Interpretation $I(t)$ in M definiert.

(1) Für jede Konstante c und jede Variable x ist die Terminterpretation durch die Interpretation bzw. die Belegung direkt gegeben, also $I(c) = c^M$ und $I(x) = x^M$.
(2) Wenn $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind mit Interpretationen $I(t_1), \ldots, I(t_n)$ und wenn f ein n-stelliges Funktionsymbol ist, so wird der Term $ft_1 \cdots t_n$ als $f^M(I(t_1), \ldots, I(t_n))$ interpretiert.

Damit werden alle Terme in der Grundmenge M interpretiert. In vielen Situationen bleibt die Grundmenge und die Interpretation der Konstanten und der Relations- und Funktionssymbole gleich, während man die Variablenbelegung ändern möchte. Insbesondere möchte man Interpretationen für eine einzelne Variable abändern.

Definition 4.10. Es sei ein Symbolalphabet S erster Stufe und eine S-Interpretation I in einer Menge M gegeben. Es sei x eine Variable und

$m \in M$ ein Element der Grundmenge. Dann versteht man unter $I\frac{m}{x}$ diejenige Interpretation von S in M, die strukturgleich zu I ist und für deren Variablenbelegung gilt

$$\left(I\frac{m}{x}\right)(y) = \begin{cases} I(y), & \text{falls } y \neq x \\ m, & \text{falls } y = x\,. \end{cases}$$

Interpretation von Ausdrücken

Nachdem wir alle Terme bei einer gegebenen S-Interpretation interpretieren können, wenden wir uns nun den Ausdrücken zu. Es ist das Ziel, jedem S-Ausdruck eine Aussage (unter Bezug auf die Grundmenge M und die Interpretation des Symbolalphabets) zuzuordnen, die wahr oder falsch ist.

Definition 4.11. Zu einem Symbolalphabet S erster Stufe und einer S-Interpretation I in einer Menge M werden die S-Ausdrücke folgendermaßen (induktiv über den Aufbau der Ausdrücke) interpretiert und als gültig (oder ungültig) charakterisiert (die Gültigkeit einer Aussage p unter der Interpretation wird dabei als $I \vDash p$ geschrieben). Es seien $s, t, t_1, \ldots, t_n$ Terme und p, q Ausdrücke.

(1) $I \vDash s = t$, wenn $I(s) = I(t)$.
(2) $I \vDash Rt_1 \ldots t_n$, wenn $(I(t_1), \ldots, I(t_n)) \in R^M$.
(3) $I \vDash \neg p$, wenn nicht $I \vDash p$ gilt.
(4) $I \vDash p \wedge q$, wenn $I \vDash p$ und $I \vDash q$ gilt.
(5) $I \vDash p \rightarrow q$, wenn die Gültigkeit $I \vDash p$ die Gültigkeit $I \vDash q$ impliziert.
(6) $I \vDash \exists xp$, wenn es ein $m \in M$ gibt mit $I\frac{m}{x} \vDash p$.
(7) $I \vDash \forall xp$, wenn für alle $m \in M$ die Beziehung $I\frac{m}{x} \vDash p$ gilt.

Dabei ist, wie bei jeder Definition, „wenn" als „genau dann, wenn" zu lesen. Auf der linken Seite stehen die formalen Ausdrücke zusammen mit der Erklärung, ob sie in der Interpretation gelten, und auf der rechten Seite steht eine logisch-mathematische Bedingung. Diese ist im Sinne des üblichen Gebrauchs in der Mathematik zu verstehen.

Da bei dieser Zuordnung alle möglichen Konstruktionsweisen für Ausdrücke auftauchen, ergibt sich eine Erklärung für jeden Ausdruck durch deren induktiven Aufbau. Für jeden Ausdruck p gilt in einer Interpretation I entweder $I \vDash p$ oder nicht, wobei die Nichtgültigkeit zur Gültigkeit von $I \vDash \neg p$ äquivalent ist. Eine Interpretation liefert also insbesondere eine *vollständige Aufteilung* der S-Ausdrücke in wahre und falsche Ausdrücke.

Beispiele

Beispiel 4.12. Es sei S ein Alphabet, das außer einer Variablenmenge V aus einem einzigen einstelligen Funktionssymbol F bestehe (die Konstantenmenge und die Relationssymbolmengen seien also leer), so dass eine S-Struktur aus einer Menge M zusammen mit einer Abbildung

$$f = F^M : M \longrightarrow M,\, a \longmapsto f(a)$$

besteht. In einer solchen Interpretation wird jeder S-Ausdruck interpretiert. Der Ausdruck

$$p = \forall x(\exists y Fy = x)$$

besagt die Surjektivität von F. D.h. in einer S-Interpretation gilt

$$I \vDash p$$

genau dann, wenn die durch die Interpretation festgelegte Abbildung F^I surjektiv ist. Der Ausdruck

$$q = \forall x \forall y(Fx = Fy \to x = y)$$

besagt die Injektivität von F. D.h. in einer S-Interpretation gilt

$$I \vDash q$$

genau dann, wenn die durch die Interpretation festgelegte Abbildung F^I injektiv ist.

Beispiel 4.13. Es sei S das Symbolalphabet für einen angeordneten Körper, d.h. es gebe eine zweielementige Konstantenmenge $C = \{0, 1\}$, eine zweielementige Menge für die 2-stelligen Funktionssymbole $\{+, \cdot\}$ und eine einelementige Menge $\{\geq\}$ für ein zweistelliges Relationssymbol. Wir betrachten die Interpretation I_1 mit der Grundmenge $\mathbb{Q}$ und die Interpretation I_2 mit der Grundmenge $\mathbb{R}$, wobei Konstanten, Funktionssymbole und Relationssymbol in natürlicher Weise interpretiert werden (und die Variablenbelegung irgendwie festgelegt sei).

Der S-Ausdruck $1 + 1 \geq 1$ (also der Ausdruck $\geq +111$ in vorgestellter Notation) wird unter den Interpretationen als $1_\mathbb{Q} + 1_\mathbb{Q} \geq 1_\mathbb{Q}$ bzw. als $1_\mathbb{R} + 1_\mathbb{R} \geq 1_\mathbb{R}$ interpretiert und daher gelten $I_1 \vDash 1 + 1 \geq 1$ und $I_2 \vDash 1 + 1 \geq 1$. Dagegen ist der Ausdruck $\forall x(x \geq 0 \to \exists y(x = y \cdot y))$ unter I_1 falsch und unter I_2 richtig, also

$$I_1 \vDash \neg(\forall x(x \geq 0 \to \exists y(x = y \cdot y))) \text{ und } I_2 \vDash \forall x(x \geq 0 \to \exists y(x = y \cdot y))\,.$$

Das vorstehende Beispiel zeigt, dass die Gültigkeit von Ausdrücken unter einer bestimmten Interpretation von Eigenschaften der Grundmenge abhängt und durch eine mathematische Argumentation erwiesen oder zurückgewiesen werden muss. Diese kann beliebig kompliziert sein. Insbesondere bedeutet die Modellbeziehung nicht, dass man für jeden Ausdruck entscheiden kann, ob er in einer Interpretation wahr oder falsch ist.

Gültigkeit von Ausdrucksmengen

Für die Gültigkeitsbeziehung $I \vDash p$ sagt man auch, dass die Interpretation I ein *Modell* für den Ausdruck p ist oder den Ausdruck p erfüllt. Für eine Menge Γ von Ausdrücken schreibt man $I \vDash \Gamma$, wenn in I jeder Ausdruck aus Γ gilt. Man sagt, dass I ein *Modell* für Γ ist. Eine Struktur heißt ein *Modell*, wenn jede Variablenbelegung zu dieser Struktur eine Interpretation liefert, die ein Modell ist.

Diese Sprechweise wird insbesondere für Axiomensysteme Γ verwendet, die eine mathematisch wichtige Struktur festlegen. Die erfüllenden Modelle heißen dann so, wie der Definitionsname in der Definition lautet, die dieses Axiomensystem verwendet. Die Modelle sind im mathematischen Sprachgebrauch Beispiele für die Struktur, die durch die Definition festgelegt wird.

Betrachten wir beispielsweise die Definition einer Gruppe.

Definition 4.14. Eine Menge G mit einem ausgezeichneten Element $e \in G$ und mit einer Verknüpfung

$$G \times G \longrightarrow G,\ (g,h) \longmapsto g * h,$$

heißt *Gruppe*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(1) Die Verknüpfung ist *assoziativ*, d.h. für alle $f, g, h \in G$ gilt
$$(f * g) * h = f * (g * h)\,.$$
(2) Das Element e ist ein *neutrales Element*, d.h. für alle $g \in G$ gilt
$$g * e = g = e * g\,.$$
(3) Zu jedem $g \in G$ gibt es ein *inverses Element*, d.h. es gibt ein $h \in G$ mit
$$h * g = g * h = e\,.$$

In formal-prädikatenlogischer Formulierung besteht das Alphabet (neben den Variablen) aus einer Konstanten e und aus einem zweistelligen Funktionssymbol μ. Die in der Gruppendefinition auftretenden Axiome (die Gruppenaxiome, also die drei auftretenden Bedingungen) kann man mit diesen Symbolen einfach schreiben als

(1)
$$\forall x (\forall y (\forall z\, \mu x \mu y z = \mu \mu x y z))\,.$$
(2)
$$\forall x (\mu x e = x \wedge \mu e x = x)\,.$$
(3)
$$\forall x \exists y (\mu x y = e \wedge \mu y x = e)\,.$$

Nennen wir diese drei Ausdrücke Γ. Dann ist eine Gruppe eine Menge mit einer Interpretation I für e und für μ, d.h. es muss ein ausgezeichnetes Element e^G (häufig schreibt man e_G) geben und eine zweistellige Funktion (eine Verknüpfung), derart, dass $I \vDash \Gamma$ gilt.