Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 6

Aufwärmaufgaben.

Aufgabe 1. Skizziere ein Inklusionsdiagramm für sämtiche Teilmengen einer dreielementigen Menge.

Aufgabe 2. Skizziere ein Teilerdiagramm für die Zahlen $25, 30, 36$ sowie all ihrer positiven Teiler.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe. Betrachte die Relation $\sim$ auf G, die durch

$$x \sim y \text{ genau dann, wenn } x = y \text{ oder } x = y^{-1}$$

erklärt ist. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

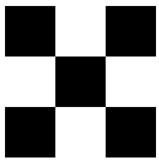
Aufgabe 4. (2 Punkte)

Es sei M eine Menge mit n Elementen. Bestimme die Anzahl der Relationen auf M, die

(1) reflexiv
(2) symmetrisch
(3) reflexiv und symmetrisch

sind.

Aufgabe 5. (2 Punkte)
Betrachte die Schachfiguren Turm, Läufer, Pferd und Esel zusammen mit ihren erlaubten Zügen auf einem 8×8-Schachbrett. Ein Esel darf dabei pro Zug einen Doppelschritt nach vorne, nach hinten, nach rechts oder nach links machen. Jede dieser Figuren definiert eine Äquivalenzrelation auf den 64 Feldern, indem zwei Felder als äquivalent angesehen werden, wenn das eine Feld von dem anderen Feld aus mit dieser Figur in endlich vielen Zügen erreichbar ist. Beschreibe für jede dieser Schachfiguren die zugehörige Äquivalenzrelation und ihre Äquivalenzklassen. Wie sieht es auf einem 3×3-Schachbrett aus?



AUFGABE 6. (2 Punkte)

Sei G eine Gruppe und betrachte die Relation R auf G, wobei xRy bedeutet, dass es einen inneren Automorphismus κ_g gibt mit $x = \kappa_g(y)$. Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Die Äquivalenzklassen zu dieser Äquivalenzrelation bekommen einen eigenen Namen:

Zu einer Gruppe G nennt man die Äquivalenzklassen zur Äquivalenzrelation, bei der zwei Elemente als äquivalent (oder *konjugiert*) gelten, wenn sie durch einen inneren Automorphismus ineinander überführt werden können, die *Konjugationsklassen*.

AUFGABE 7. (3 Punkte)

Bestimme die Konjugationsklassen der Würfelgruppe.

AUFGABE 8. (2 Punkte)

Es sei S_3 die Gruppe der bijektiven Abbildungen der Menge $\{1, 2, 3\}$ in sich selbst. Bestimme die Konjugationsklassen dieser Gruppe.

AUFGABE 9. (3 Punkte)

Es sei $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ die Menge der reellen invertierbaren $n \times n$-Matrizen. Zeige, dass für konjugierte Matrizen M und N die folgenden Eigenschaften bzw. Invarianten übereinstimmen: die Determinante, die Eigenwerte, die Dimension der Eigenräume zu einem Eigenwert, die Diagonalisierbarkeit, die Trigonalisierbarkeit.

AUFGABE 10. (2 Punkte)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Betrachte die Relation R auf U, wobei xRy bedeutet, dass es eine stetige Abbildung

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \gamma(t)\,,$$

gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf U ist.

Abbildungsverzeichnis