Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2008/2009**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 6

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Bestimme für die parametrisierte Kurve

$$x = -3t^2 + 4t - 2 \text{ und } y = 2t^2 + 5t - 3$$

eine Kurvengleichung.

Die folgende Aufgabe erfordert eventuell den Einsatz eines Computers.

Aufgabe 2. (6 Punkte)

Bestimme für die Abbildung

$$\mathbb{A}^1_K \longrightarrow \mathbb{A}^2_K,\ t \longmapsto (t^2 + t^3, 2t^2 - t^4),$$

eine algebraische Gleichung der Bildkurve.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Wir betrachten die beiden Abbildungen

$$(s,t) \longmapsto (s^2, t^2, st) = (x,y,z) \text{ und } (s,t) \longmapsto (s, st^2, st) = (x,y,z)\,.$$

Zeige, dass das Bild der beiden Abbildungen die gleiche algebraische Gleichung F erfüllt. Untersuche die Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität (als Abbildung nach $V(F)$). Welche Abbildung liefert eine „bessere“ Beschreibung von $V(F)$?

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Beweise Lemma 6.9.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $F \in K[X,Y]$ ein irreduzibles Polynom. Die Nullstellenmenge $V(F)$ sei unendlich. Dann ist $V(F)$ eine irreduzible affin-algebraische Menge. Man gebe auch ein Beispiel, dass diese Aussage in drei Variablen falsch ist.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und $a \in K$ von null verschieden. Zeige, dass das Polynom

$$X^2 + Y^2 + a \in K[X, Y]$$

irreduzibel ist.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen. Begründe, ob

$$V(X^2 + Y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}}$$

irreduzibel ist oder nicht.

In den beiden folgenden Aufgaben werden die Begriffe *abgeschlossene Abbildung* und *offene Abbildung* verwendet.

Eine stetige Abbildung

$$f : X \longrightarrow Y$$

zwischen topologischen Räumen X und Y heißt *abgeschlossen*, wenn Bilder von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen sind.

Sie heißt *offen*, wenn Bilder von offenen Mengen wieder offen sind.

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Zeige, dass die Projektion

$$\mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathbb{A}^1_K \, , (x, y) \longrightarrow x,$$

nicht abgeschlossen in der Zariski-Topologie ist.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Zeige, dass die Projektion

$$\mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathbb{A}^1_K \, , (x, y) \longrightarrow x,$$

offen in der Zariski-Topologie ist.