Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 29

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 29.1. Es sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion auf einem reellen Intervall. Die Funktion habe in den Punkten $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, lokale Maxima. Zeige, dass die Funktion zwischen x_1 und x_2 mindestens ein lokales Minimum besitzt.

Aufgabe 29.2. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Zeige, dass der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ebenfalls R ist.

Aufgabe 29.3. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto z^2 \cdot \exp(z^3 - 4z).$$

Aufgabe 29.4. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Aufgabe 29.5. Eine Währungsgemeinschaft habe eine Inflation von jährlich 2%. Nach welchem Zeitraum (in Jahren und Tagen) haben sich die Preise verdoppelt?

Aufgabe 29.6. Untersuche die Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto (\sin x)^n,$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. An welchen Punkten existiert die Grenzfunktion, an welchen ist sie stetig, an welchen differenzierbar? Wie verhält sich die abgeleitete Funktionenfolge, also $g_n(x) = f_n'(x)$?

Aufgabe 29.7. Bestimme für die folgenden Funktionen, ob der Funktionslimes existiert und welchen Wert er gegebenenfalls annimmt.

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$,
(2) $\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2}{x}$,
(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2}$,
(4) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x}$.

Aufgabe 29.8. Bestimme für die folgenden Funktionen, ob der Funktionslimes für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \to 0$, existiert und welchen Wert er gegebenenfalls annimmt.

(1) $\sin \frac{1}{x}$,
(2) $x \cdot \sin \frac{1}{x}$,
(3) $\frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x}$.

Aufgabe 29.9. Berechne bis auf drei Nachkommastellen den Wert von e^i.

Aufgabe 29.10. Bestimme die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion unter Verwendung von Satz 29.1.

Aufgabe 29.11. Bestimme die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion unter Verwendung von Satz 25.11 (4).

Aufgabe 29.12. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sin(\cos z).$$

Aufgabe 29.13. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto (\sin z)(\cos z).$$

Aufgabe 29.14. Bestimme für $n \in \mathbb{N}$ die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto (\sin z)^n.$$

Aufgabe 29.15. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$D \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Was ist die Definitionsmenge D des *Tangens*?

Aufgabe 29.16. Zeige, dass die reelle Sinusfunktion eine bijektive, streng wachsende Funktion

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert, und dass die reelle Kosinusfunktion eine bijektive streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert.

Aufgrund von Korollar 29.10 ist die reelle Sinusfunktion und die reelle Kosinusfunktion bijektiv auf gewissen Intervallen. Die Umkehrfunktionen heißen folgendermaßen.

Die Umkehrfunktion der reellen Sinusfunktion ist

$$[-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ x \longmapsto \arcsin x\,,$$

und heißt *Arcus-Sinus.*

Die Umkehrfunktion der reellen Kosinusfunktion ist

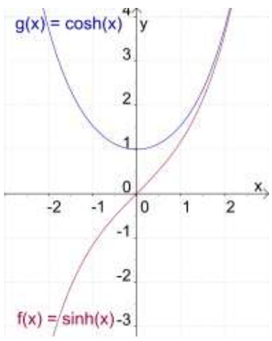
$$[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi],\ x \longmapsto \arccos x\,,$$

und heißt *Arcus-Kosinus.*

Aufgabe 29.17. Bestimme die Ableitungen von Arcus-Sinus und Arcus-Kosinus.

Die für $z \in \mathbb{C}$ durch
$$\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$
definierte Funktion heißt *Sinus hyperbolicus*.

Die für $z \in \mathbb{C}$ durch
$$\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$
definierte Funktion heißt *Kosinus hyperbolicus*.



Der Verlauf der Hyperbelfunktionen im Reellen.

Aufgabe 29.18. Zeige die folgenden Eigenschaften von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus (dabei ist $z \in \mathbb{C}$.)

(1)
$$\cosh z + \sinh z = e^z$$
(2)
$$\cosh z - \sinh z = e^{-z}$$
(3)
$$(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1\,.$$
(4)
$$\cosh iz = \cos z \;\text{ und }\; \sinh iz = i \cdot \sin z\,.$$

Aufgabe 29.19. Bestimme die Ableitungen von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 29.20. (4 Punkte)

Es sei
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Polynomfunktion vom Grad $d \geq 1$. Es sei m die Anzahl der lokalen Maxima von f und n die Anzahl der lokalen Minima von f. Zeige, dass bei d ungerade $m = n$ und bei d gerade $|m - n| = 1$ ist.

Aufgabe 29.21. (2 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^x.$$

Aufgabe 29.22. (4 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}_+$ und

$$f : B(P, b) \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass es eine stetige Fortsetzung

$$\tilde{f} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

von f gibt.

Aufgabe 29.23. (4 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \in]0, 1], \\ 0 \text{ für } x = 0, \end{cases}$$

stetig ist und unendlich viele Nullstellen besitzt.

Aufgabe 29.24. (4 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \in]0, 1], \\ 0 \text{ für } x = 0, \end{cases}$$

unendlich viele isolierte lokale Maxima und unendlich viele isolierte lokale Minima besitzt.

Aufgabe 29.25. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

die unendlich viele Nullstellen und unendlich viele isolierte lokale Maxima besitzt, deren Funktionswert ≥ 1 ist.

Aufgabe 29.26. (7 Punkte)

Zeige, dass es keine stetige Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

gibt, die unendlich viele Nullstellen besitzt derart, dass zwischen je zwei Nullstellen ein lokales Maximum existiert, dessen Funktionswert ≥ 1 ist.

Abbildungsverzeichnis