Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Arbeitsblatt 55

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 55.1. Welche linearen Vektorfelder

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ v \longmapsto Mv,$$

sind Gradientenfelder? Wie sehen die Potentialfunktionen dazu aus?

AUFGABE 55.2. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige folgende Eigenschaften.

1. Der Nullraum $0 \subseteq V$ ist φ-invariant.
2. V ist φ-invariant.
3. Eigenräume sind φ-invariant.
4. Seien $U_1, U_2 \subseteq V$ φ-invariante Unterräume. Dann sind auch $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ φ-invariant.
5. Sei $U \subseteq V$ ein φ-invarianter Unterraum. Dann sind auch der Bildraum $\varphi(U)$ und der Urbildraum $\varphi^{-1}(U)$ φ-invariant.

AUFGABE 55.3. Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum über einem Körper K. Es sei

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine Fahne in V. Zeige, dass es eine bijektive lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

gibt derart, dass diese Fahne eine φ-invariante Fahne wird.

AUFGABE 55.4. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $v \in V$. Zeige, dass der kleinste φ-invariante Unterraum von V, der v enthält, gleich

$$\langle \varphi^n(v),\ n \in \mathbb{N} \rangle$$

ist.

Aufgabe 55.5. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die durch

$$U = \{v \in V \mid \text{ es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \varphi^n(v) = 0\}$$

definierte Teilmenge von V ein φ-invarianter Unterraum ist.

Aufgabe 55.6. Definiere: eine *lineare Differentialgleichung höherer Ordnung* (*homogen/inhomogen*; mit *konstanten Koeffizienten*). Zeige, dass eine solche lineare Differentialgleichung höherer Ordnung zu einem entsprechenden linearen Differentialgleichungssystem wie in Lemma 54.8 äquivalent ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 55.7. (4 Punkte)

Entscheide, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 8 \\ 6 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ trigonalisierbar ist.

Aufgabe 55.8. (4 Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine eigentliche Isometrie. Es sei vorausgesetzt, dass f trigonalisierbar ist. Zeige, dass dann f sogar diagonalisierbar ist.

Aufgabe 55.9. (4 Punkte)

Es sei M eine reelle 2×2-Matrix, die über $\mathbb{R}$ nicht trigonalisierbar ist. Zeige, dass M über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 55.10. (4 Punkte)

Eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

werde bzgl. der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Finde eine Basis, bzgl. der φ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 55.11. (4 Punkte)

Löse die Differentialgleichung

$$y'' = -ay$$

(mit $a > 0$) und der Anfangsbedingung $y(0) = x$ und $y'(0) = v$.

Die für $t \in \mathbb{R}$, $-1 < t < 1$, und ein $n \in \mathbb{N}$ definierte lineare Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2t}{1-t^2}y' + \frac{n(n+1)}{1-t^2}y = 0$$

heißt *Legendresche Differentialgleichung* zum Parameter n.

Aufgabe 55.12. (4 Punkte)

Zeige, dass das n-te *Legendre-Polynom*

$$\frac{1}{2^n(n!)}((t^2-1)^n)^{(n)}$$

eine Lösung der Legendreschen Differentialgleichung zum Parameter n ist.