Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 12

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Zeige unter Verwendung des Satzes von Dirichlet, dass eine Primzahl q modulo unendlich vieler Primzahlen p ein quadratischer Rest ist, aber auch modulo unendlich vieler Primzahlen ein nichtquadratischer Rest.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei $\varphi(n)$ die Eulersche Funktion. Zeige, dass die Folge

$$\frac{\varphi(n)}{n},\ n \in \mathbb{N},$$

sowohl in 1 als auch in 0 einen Häufungspunkt besitzt.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Beweise die Aussage des Korollars, dass

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0$$

ist, mit Hilfe des Divergenzsatzes für die Produktdarstellung der Riemannschen ζ-Funktion.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Bestimme anhand des Beweises der Abschätzungen von Tschebyschow einen expliziten Wert für c mit $\pi(x) \geq c\frac{x}{\ln(x)}$.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Zeige unter Verwendung der Abschätzungen von Tschebyschow, dass es (zumindest für x hinreichend groß) mehr Primzahlen zwischen x und x^2 als zwischen 1 und x gibt.

Aufgabe 6. (1 Punkt)

Was besagt die Artinsche Vermutung über primitive Reste?

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Betrachte die Quadratrestgruppe

$$\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^{\times 2}\ ,$$

wobei $\mathbb{Q}^{\times 2}$ die Untergruppe der Quadrate bezeichne. Zeige, dass es zu jeder Restklasse $x \in \mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^{\times 2}$ einen Repräsentanten aus $\mathbb{Z}$ gibt.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Finde die kleinste Primzahl p derart, dass es in $\mathbb{Z}/(p)$ ein Element a gibt, das weder primitiv noch ein Quadrat noch $= -1$ ist.

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Berechne mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und seiner Ergänzungssätze das Legendre-Symbol

$$\left(\frac{1489}{2437}\right) .$$