

## Mathematik I

### Klausur

Dauer: 120 Minuten + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und auf jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: .....

Matrikelnummer: .....

Ich erkläre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer per Aushang oder im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift: .....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\Sigma$
mögl. Pkt.:	4	2	3	3	3	3	5	6	7	4	6	4	6	8	64
erhalt. Pkt.:															

Note:

## AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

- (1) Ein *angeordneter* Körper  $K$  (dabei muss weder Körper noch Ordnung definiert werden).
- (2) Eine *Cauchy-Folge* in  $\mathbb{R}$ .
- (3) Die *komplexe Konjugation*.
- (4) Die *Stetigkeit* einer Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

- (5) Die *lineare Unabhängigkeit* von Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  in einem  $K$ -Vektorraum  $V$ .
- (6) Eine *lineare Abbildung*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

zwischen zwei  $K$ -Vektorräumen  $V$  und  $W$ .

- (7) Die *geometrische Reihe*.
- (8) Das *Taylor-Polynom* vom Grad  $n$  zu einer  $n$ -mal differenzierbaren Funktion

$$f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

in einem Punkt  $a \in \mathbb{K}$ .

## Lösung

- (1) Ein Körper  $K$  heißt *angeordnet*, wenn es eine totale Ordnung „ $\geq$ “ auf  $K$  gibt, die die beiden Eigenschaften
  - (a) Aus  $a \geq b$  folgt  $a + c \geq b + c$  (für beliebige  $a, b, c \in K$ )
  - (b) Aus  $a \geq 0$  und  $b \geq 0$  folgt  $ab \geq 0$  (für beliebige  $a, b \in K$ )
 erfüllt.
- (2) Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.  
 Zu jedem  $\epsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$ , gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  derart, dass für alle  $n, m \geq n_0$  die Beziehung

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

gilt.

- (3) Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z = a + bi \longmapsto \bar{z} = a - bi,$$

heißt *komplexe Konjugation*.

(4) Eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt stetig, wenn es für jedes  $x \in \mathbb{R}$  und für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass

$$\varphi(U(x, \delta)) \subseteq U(\varphi(x), \epsilon)$$

gilt.

(5) Die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  heißen *linear unabhängig*, wenn eine Gleichung

$$\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$$

nur bei  $a_i = 0$  für alle  $i$  möglich ist.

(6) Eine Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

(a)  $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$  für alle  $u, v \in V$ .

(b)  $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$  für alle  $\lambda \in K$  und  $v \in V$ .

(7) Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

die *geometrische Reihe* in  $z$ .

(8) Das Taylor-Polynom von  $f$  in  $a$  vom Grad  $n$  ist

$$T_{a,n}(f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k .$$

4

AUFGABE 2. (2 Punkte)

Bestimme, welche der beiden rationalen Zahlen  $p$  und  $q$  größer ist:

$$p = \frac{573}{-1234} \text{ und } q = \frac{-2007}{4322} .$$

Lösung

Multiplikation liefert

$$573 \cdot 4322 = 2476506 \text{ und } 1234 \cdot 2007 = 2476638 .$$

Daher ist

$$\frac{573}{1234} \leq \frac{2007}{4322}$$

und damit ist

$$p = \frac{573}{-1234} = \frac{-573}{1234} \geq \frac{-2007}{4322} = q .$$

## AUFGABE 3. (3 Punkte)

Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Zahl

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

ein Vielfaches von 43 ist.

## Lösung

Für  $n = 0$  ist

$$6^2 + 7 = 43$$

ein Vielfaches von 43. Sei nun die Aussage für  $n$  bewiesen und betrachten wir den Ausdruck für  $n + 1$ . Dieser ist

$$\begin{aligned} 6^{n+1+2} + 7^{2(n+1)+1} &= 6 \cdot 6^{n+2} + 7^2 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 6 \cdot 6^{n+2} + (6 + 43)7^{2n+1} \\ &= 6(6^{n+2} + 7^{2n+1}) + 43 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 6 \cdot 43 \cdot s + 43 \cdot 7^{2n+1}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde. Daher ist diese Zahl ein Vielfaches von 43.

## AUFGABE 4. (3 Punkte)

Es sei  $K$  ein angeordneter Körper. Zeige, ausgehend von den Axiomen für einen angeordneten Körper, dass

$$1 > 0$$

gilt.

## Lösung

Es gibt nur die drei sich ausschließenden Möglichkeiten

$$1 > 0 \text{ oder } 1 = 0 \text{ oder } 1 < 0.$$

Aufgrund der Körperaxiome ist  $1 \neq 0$ . Wir müssen also nur noch die Möglichkeit  $1 < 0$  zum Widerspruch führen. Nehmen wir  $1 < 0$  an. Aufgrund der Verträglichkeit mit der Addition kann man beidseitig  $-1$  addieren und erhält

$$0 < -1.$$

Aufgrund der Verträglichkeit mit der Multiplikation mit positiven Elementen kann man diese Abschätzung mit  $-1$  multiplizieren und erhält

$$0 = 0(-1) < (-1)(-1) = 1,$$

also ist zugleich  $1 > 0$ , ein Widerspruch.

AUFGABE 5. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n}, n \in \mathbb{N}_+.$$

Lösung

Für reelles  $x$  ist immer  $-1 \leq \sin x \leq 1$ . Somit ist

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_+$ . Da die Folge  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}_+}$  gegen 0 konvergiert und dies auch für die negative Folge  $(-\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}_+}$  gilt, muss aufgrund des Quetschkriteriums auch die Folge  $(\frac{\sin n}{n})_{n \in \mathbb{N}_+}$  gegen 0 konvergieren.

## AUFGABE 6. (3 Punkte)

Bestimme, für welche  $x \in \mathbb{C}$  die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2 + x & -x \\ -x^3 + 2x^2 + 5x - 1 & x^2 - x \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

## Lösung

Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante  $\neq 0$  ist.

Die Determinante der Matrix ist

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} x^2 + x & -x \\ -x^3 + 2x^2 + 5x - 1 & x^2 - x \end{pmatrix} &= (x^2 + x)(x^2 - x) + x(-x^3 + 2x^2 + 5x - 1) \\ &= x^4 - x^2 - x^4 + 2x^3 + 5x^2 - x \\ &= 2x^3 + 4x^2 - x \\ &= x(2x^2 + 4x - 1). \end{aligned}$$

Dies ist gleich 0 bei  $x_1 = 0$  oder bei  $2x^2 + 4x - 1 = 0$ . Diese quadratische Gleichung ist äquivalent zu  $x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 0$  bzw. zu

$$(x + 1)^2 - 1 - \frac{1}{2} = 0.$$

Also ist

$$x + 1 = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

und damit

$$x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \text{ und } x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}} - 1.$$

Die einzigen komplexen Zahlen, bei denen die Matrix nicht invertierbar ist, sind also

$$0, \sqrt{\frac{3}{2}} - 1, -\sqrt{\frac{3}{2}} - 1.$$



## AUFGABE 7. (5 Punkte)

Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, v \longmapsto Mv.$$

## Lösung

Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \chi_M &= \det \begin{pmatrix} x-2 & 0 & -5 \\ 0 & x+1 & 0 \\ -8 & 0 & x-5 \end{pmatrix} \\ &= (x-2)(x+1)(x-5) - 40(x+1) \\ &= (x+1)((x-2)(x-5) - 40) \\ &= (x+1)(x^2 - 7x - 30). \end{aligned}$$

Dies ergibt zunächst den Eigenwert  $-1$ . Durch quadratisches Ergänzen (oder direkt) sieht man für den quadratischen Term die Nullstellen  $-3$  und  $10$ , die die weiteren Eigenwerte sind. Da es drei verschiedene Eigenwerte gibt ist klar, dass zu jedem Eigenwert der Eigenraum eindimensional ist.

Eigenraum zu  $-1$ . Man muss die Lösungsmenge von

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Eine Lösung ist offenbar der Spaltenvektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , so dass der

Eigenraum zu  $-1$  gleich  $\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist.

Eigenraum zu  $-3$ . Man muss die Lösungsmenge von

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Eine Lösung ist offenbar der Spaltenvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ , so dass der

Eigenraum zu  $-3$  gleich  $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  ist.

Eigenraum zu  $10$ . Man muss die Lösungsmenge von

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -5 \\ 0 & 11 & 0 \\ -8 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Eine Lösung ist offenbar der Spaltenvektor  $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ , so dass der

Eigenraum zu  $10$  gleich  $\lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$  ist.

AUFGABE 8. (6 (1+2+3) Punkte)

- a) Formuliere den Satz von Cayley-Hamilton für eine  $n \times n$ -Matrix.  
 b) Bestätige durch Nachrechnen den Satz von Cayley-Hamilton für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

- c) Beweise den Satz von Cayley-Hamilton für eine beliebige  $2 \times 2$ -Matrix.

Lösung

- a) Der Satz von Cayley-Hamilton besagt Folgendes. Es sei  $M$  eine  $n \times n$ -Matrix mit dem charakteristischen Polynom  $\chi_M$ . Wenn man dann  $M$  in  $\chi_M$  einsetzt, so ergibt sich

$$\chi_M(M) = 0.$$

- b) Das charakteristische Polynom der Matrix  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$  ist

$$\chi_M = \det \begin{pmatrix} x-2 & -1 \\ -3 & x+4 \end{pmatrix} = (x-2)(x+4) - 3 = x^2 + 2x - 11.$$

Um darin  $M$  einzusetzen berechnen wir zuerst

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -6 & 19 \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\chi_M = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -6 & 19 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} - 11 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+4-11 & -2+2 \\ -6+6 & 19-8-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- c) Wir setzen die  $2 \times 2$ -Matrix als

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

an. Das charakteristische Polynom davon ist

$$\chi_M = \det \begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{pmatrix} = (x-a)(x-d) - bc = x^2 - (a+d)x + ad - bc.$$

Das Quadrat von  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + cd & cb + d^2 \end{pmatrix}.$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + cd & cb + d^2 \end{pmatrix} - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + cd & cb + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(a+d)a & -(a+d)b \\ -(a+d)c & -(a+d)d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} a^2 + bc - (a+d)a + ad - bc & ab + bd - (a+d)b \\ ca + cd - (a+d)c & cb + d^2 - (a+d)d + ad - bc \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## AUFGABE 9. (7 Punkte)

Es sei  $V$  ein Vektorraum und

$$v_1, \dots, v_n$$

eine Familie von Vektoren in  $V$ . Zeige, dass die Familie genau dann eine Basis von  $V$  bildet, wenn es sich um ein minimales Erzeugendensystem handelt (d.h. sobald man einen Vektor  $v_i$  weglässt, liegt kein Erzeugendensystem mehr vor).

## Lösung

Die Familie sei zunächst eine Basis. Dann ist sie insbesondere ein Erzeugendensystem. Nehmen wir einen Vektor, sagen wir  $v_1$ , aus der Familie heraus. Wir müssen zeigen, dass dann die verbleibende Familie, also  $v_2, \dots, v_n$  kein Erzeugendensystem mehr ist. Wenn sie ein Erzeugendensystem wäre, so wäre insbesondere  $v_1$  als Linearkombination der Vektoren darstellbar, d.h. man hätte

$$v_1 = \sum_{i=2}^n \lambda_i v_i.$$

Dann ist aber

$$v_1 - \sum_{i=2}^n \lambda_i v_i$$

eine nichttriviale Darstellung der 0, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Familie.

Sei nun die Familie ein minimales Erzeugendensystem. Um zu zeigen, dass eine Basis vorliegt, muss also lediglich gezeigt werden, dass die Familie linear unabhängig ist. Nehmen wir an, sie sei nicht linear unabhängig. Dann gibt es eine Darstellung

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0,$$

wobei mindestens ein Koeffizient  $a_i \neq 0$  ist. Wir behaupten, dass dann auch die um  $v_i$  reduzierte Familie noch ein Erzeugendensystem ist im Widerspruch zur Minimalität. Dazu sei  $v \in V$  ein beliebiger Vektor, den man als

$$v = b_1 v_1 + \dots + b_i v_i + \dots + b_n v_n$$

schreiben kann. Wir können  $v_i$  schreiben als

$$v_i = -\frac{a_1}{a_i} v_1 - \dots - \frac{a_{i-1}}{a_i} v_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i} v_{i+1} - \dots - \frac{a_n}{a_i} v_n.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} v &= b_1 v_1 + \dots + b_i v_i + \dots + b_n v_n \\ &= b_1 v_1 + \dots + b_i \left( -\frac{a_1}{a_i} v_1 - \dots - \frac{a_{i-1}}{a_i} v_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i} v_{i+1} - \dots - \frac{a_n}{a_i} v_n \right) + \dots + b_n v_n, \end{aligned}$$

woraus ablesbar ist, dass man  $v$  auch als Linearkombination der  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$  darstellen kann.

AUFGABE 10. (4 Punkte)

Sei  $V$  der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 4$  mit der Basis

$$x^i, 0 \leq i \leq 4.$$

Erstelle für die Ableitungsabbildung

$$\varphi : V \longrightarrow V, P \longmapsto P',$$

die beschreibende Matrix bzgl. dieser Basis.

Bestimme den Kern und das Bild dieser Abbildung sowie deren Dimensionen.

Lösung

Die Ableitung schickt die Basiselemente auf

$$x^0 = 1 \mapsto 0, x^1 \mapsto 1, x^2 \mapsto 2x, x^3 \mapsto 3x^2, x^4 \mapsto 4x^3.$$

Daraus sind direkt die Koeffizienten der Bildvektoren bzgl. der Basis abzulesen. In der beschreibenden Matrix stehen in den Spalten die Koeffizienten der Bildvektoren. Daher lautet die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Bild dieser Abbildung besteht aus allen Polynomen vom Grad  $\leq 3$ . Dieser Untervektorraum besitzt die Basis  $x^0, x^1, x^2, x^3$  und hat demnach die Dimension 4.

Der Kern besteht aus den konstanten Polynomen mit der Basis  $x^0$ , dieser Unterraum ist also eindimensional.

## AUFGABE 11. (6 (4+2) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}.$$

- a) Zeige, dass  $f$  eine stetige Bijektion zwischen  $\mathbb{R}_+$  und  $\mathbb{R}$  definiert.  
 b) Bestimme das Urbild  $u$  von 0 unter  $f$  sowie  $f'(u)$  und  $(f^{-1})'(0)$ . Fertige eine grobe Skizze für die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  an.

## Lösung

Die Funktion  $f$  ist differenzierbar und die Ableitung ist

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Für  $x > 0$  sind diese beiden Summanden positiv, so dass die Ableitung stets positiv ist und  $f$  daher streng wachsend ist. Daher ist die Abbildung injektiv. Die Funktion ist stetig, da sie differenzierbar ist. Daher genügt es für die Surjektivität, aufgrund des Zwischenwertsatzes, nachzuweisen, dass beliebig große und beliebig kleine Werte angenommen werden.

Für  $0 < x < 1$  ist  $1 - \frac{1}{x} < 0$  und daher

$$f(x) \leq \ln x.$$

Da der Logarithmus für  $x \rightarrow 0$  beliebig kleine Werte annimmt, gilt das auch für  $f$ .

Für  $x > 1$  ist  $1 - \frac{1}{x} > 0$  und daher

$$f(x) \geq \ln x.$$

Da der Logarithmus für  $x \rightarrow \infty$  beliebig große Werte annimmt, gilt das auch für  $f$ .

- b) Durch Einsetzen ergibt sich  $f(1) = 0$ , also ist  $u = 1$  das Urbild von 0. Aufgrund der Berechnung der Ableitung oben ist

$$f'(1) = 2.$$

Aufgrund der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt daher

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}.$$



## AUFGABE 12. (4 Punkte)

Es seien

$$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Es sei  $a \in \mathbb{R}$ . Es gelte

$$f(a) \geq g(a) \text{ und } f'(x) \geq g'(x) \text{ f\"ur alle } x \geq a.$$

Zeige, dass

$$f(x) \geq g(x) \text{ f\"ur alle } x \geq a \text{ gilt.}$$

## Lösung

Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto h(x) = f(x) - g(x).$$

Nach den Voraussetzungen ist  $h$  differenzierbar, es ist  $h(a) \geq 0$  und es ist  $h'(x) \geq 0$  für alle  $x \geq a$ . Wir müssen zeigen, dass  $h(x) \geq 0$  für alle  $x \geq a$  ist. Nehmen wir also an, dass es ein  $x > a$  gibt mit  $h(x) < 0$ . Aufgrund des Mittelwertsatzes gibt es ein  $c \in [a, x]$  mit

$$h'(c) = \frac{h(x) - h(a)}{x - a}.$$

Da diese Zahl negativ ist, ergibt sich ein Widerspruch.

AUFGABE 13. (6 (1+1+1+3) Punkte)

Es sei  $M$  die Menge der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ . Definiere auf  $M$  eine Relation durch

$$f \sim g \text{ falls } f(0) = g(0), f'(0) = g'(0) \text{ und } f''(1) = g''(1).$$

- Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.
- Finde für jede Äquivalenzklasse dieser Äquivalenzrelation einen polynomialen Vertreter.
- Zeige, dass diese Äquivalenzrelation mit der Addition von Funktionen verträglich ist.
- Zeige, dass diese Äquivalenzrelation nicht mit der Multiplikation von Funktionen verträglich ist.

Lösung

- a) Wir betrachten die Abbildung

$$H : M \longrightarrow \mathbb{R}^3, f \longmapsto (f(0), f'(0), f''(1)).$$

Zwei Funktionen  $f$  und  $g$  stehen genau dann in dieser Relation zueinander, wenn ihre Bilder unter  $H$  übereinstimmen. Daher liegt eine Äquivalenzrelation vor (und  $H$  beschreibt die Äquivalenzklassenbildung).

- b) Das Polynom

$$a + bx + \frac{c}{2}x^2$$

wird unter  $H$  auf  $(a, b, c)$  abgebildet, so dass dieses Polynom diese Klasse repräsentiert.

- c) Es sei  $f_1 \sim g_1$  und  $f_2 \sim g_2$ . Es ist  $(f_1 + f_2) \sim (g_1 + g_2)$  zu zeigen. Dies folgt aber sofort aufgrund der Additivität der Ableitung.

- d) Wir betrachten  $f_1 = g_1 = x$  und  $f_2 = x$  und  $g_2 = x^3 - 3x^2 + x$ . Offenbar ist  $f_1 \sim g_1$ . Die relevanten Werte für  $f_2$  sind wegen  $f_2 = x$ ,  $f_2' = 1$ ,  $f_2'' = 0$  einfach

$$H(f_2) = (0, 1, 0).$$

Für  $g_2$  ergibt sich  $g_2 = x^3 - 3x^2 + x$ ,  $g_2' = 3x^2 - 6x + 1$ ,  $g_2'' = 6x - 6$ . Daher ist

$$H(g_2) = (0, 1, 0),$$

so dass  $f_2 \sim g_2$  ist. Wir behaupten, dass  $f_1 f_2$  und  $g_1 g_2$  nicht äquivalent sind. Es ist  $f_1 f_2 = x^2$  mit den Ableitungen  $(x^2, 2x, 2)$  und daher ist

$$H(f_1 f_2) = (0, 0, 2).$$

Für  $g_1g_2 = x(x^3 - 3x^2 + x) = x^4 - 3x^3 + x^2$  hat man die Ableitungen  $(x^4 - 3x^3 + x^2, 4x^3 - 9x^2 + 2x, 12x^2 - 18x + 2)$  und daher ist

$$H(g_1g_2) = (0, 0, -4) \neq H(f_1f_2).$$

## AUFGABE 14. (8 Punkte)

Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in einem metrischen Raum  $(M, d)$ . Es sei  $H$  die Menge aller Häufungspunkte der Folge und

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup H.$$

Zeige, dass  $A$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $M$  ist.

## Lösung

Wir zeigen, dass das Komplement  $M \setminus A$  offen ist. Sei dazu ein Punkt  $y \in M$ ,  $y \notin A$ , gegeben. D.h. dass  $y$  weder ein Folgenglied noch ein Häufungspunkt der Folge ist. Da  $y$  kein Häufungspunkt ist bedeutet, dass es ein  $\epsilon > 0$  gibt derart, dass es in  $U(y, \epsilon)$  nur endlich viele Folgenglieder gibt. Diese Folgenglieder seien

$$y_1 = x_{n_1}, y_2 = x_{n_2}, \dots, y_k = x_{n_k}.$$

Da  $y$  selbst kein Folgenglied ist, ist  $y \neq y_i$  für alle  $i = 1, \dots, k$ . Daher ist  $d(y, y_i) > 0$  für alle  $i = 1, \dots, k$  und somit

$$\delta := \min(d(y, y_i), i = 1, \dots, k) > 0.$$

Damit ist  $U(y, \delta)$  eine offene Umgebung von  $y$ , die keine Folgenglieder enthält. Dies gilt dann erst recht für  $U(y, \frac{\delta}{2})$ . Diese Menge enthält aber auch keinen Häufungspunkt der Folge. Wäre nämlich  $z \in H \cap U(y, \frac{\delta}{2})$ , so würde es in  $U(z, \frac{\delta}{2})$  unendlich viele Folgenglieder geben, was wegen

$$U(z, \frac{\delta}{2}) \subseteq U(y, \delta) \subseteq U(y, \epsilon)$$

ein Widerspruch ist. Daher haben wir eine offene Umgebung von  $y$  gefunden, die zu  $A$  disjunkt ist.