Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 4

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 4.1. Es seien G und H Gruppen und $\varphi : G \to H$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass $\varphi(e_G) = e_H$ und $(\varphi(g))^{-1} = \varphi(g^{-1})$ für jedes $g \in G$ ist.

Aufgabe 4.2. Sei G eine Gruppe. Zeige, dass sich Gruppenelemente $g \in G$ und Gruppenhomomorphismen φ von $\mathbb{Z}$ nach G über die Korrespondenz

$$g \longmapsto (n \mapsto g^n) \text{ und } \varphi \longmapsto \varphi(1)$$

entsprechen.

Aufgabe 4.3. Seien G und H Gruppen und sei

$$\varphi : G \longrightarrow H$$

ein Gruppenisomorphismus. Zeige, dass auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : H \longrightarrow G,\ h \longmapsto \varphi^{-1}(h),$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

Aufgabe 4.4. Seien G und H Gruppen und sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Bild von φ eine Untergruppe von H ist.

Aufgabe 4.5. Stifte einen Gruppenisomorphismus zwischen der additiven Gruppe der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, 0, +)$ und der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen $(\mathbb{R}_+, 1, \cdot)$.

Aufgabe 4.6. Betrachte die Gruppe der komplexen Zahlen ohne null, $\mathbb{C}^\times = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$. Bestimme für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Kern des Potenzierens

$$\mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times,\ z \longmapsto z^n.$$

Sind diese Gruppenhomomorphismen surjektiv?

Aufgabe 4.7. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Determinante

$$\mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow (K \setminus \{0\}, \cdot, 1),\ M \longmapsto \det M,$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 4.8. Man gebe für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine invertierbare Matrix $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ an, derart, dass die Ordnung von M gleich n ist.

Aufgabe 4.9. Sei G eine endliche Gruppe. Zeige, dass jedes Element $g \in G$ eine endliche Ordnung besitzt, und dass die Potenzen

$$g^0 = e_G,\ g^1 = g,\ g^2, \ldots, g^{\mathrm{ord}(g)-1}$$

alle verschieden sind.

Aufgabe 4.10. Bestimme die Nebenklassen zu den folgenden Untergruppen von kommutativen Gruppen.

(1) $(\mathbb{Z}, 0, +) \subseteq (\mathbb{R}, 0, +)$.
(2) $(\mathbb{Q}, 0, +) \subseteq (\mathbb{R}, 0, +)$.
(3) $(\mathbb{R}, 0, +) \subseteq (\mathbb{C}, 0, +)$.
(4) $(\mathbb{Z}n, 0, +) \subseteq (\mathbb{Z}, 0, +)$ $(n \in \mathbb{N})$.
(5) $(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, 1, \cdot) \subseteq (\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1, \cdot)$.
(6) $(\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}, 1, \cdot) \subseteq (\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, 1, \cdot)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Wann bestehen die Nebenklassen aus endlich vielen Elementen, wann ist der Index endlich?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 4.11. (2 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass diese Matrix einen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Q}^2$ nach $\mathbb{Q}^2$ und ebenso von $\mathbb{Z}^2$ nach $\mathbb{Z}^2$ definiert. Untersuche diese beiden Gruppenhomomorphismen in Hinblick auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 4.12. (1 Punkt)

Sei G eine (multiplikativ geschriebene) kommutative Gruppe und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Potenzieren

$$G \longrightarrow G,\ x \longmapsto x^n,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 4.13. (3 Punkte)

Stifte einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von der Gruppe der komplexen Zahlen ohne null $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ in die multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen $(\mathbb{R}_+, \cdot, 1)$.

Was ist der Kern dieser Abbildung?

Aufgabe 4.14. (3 Punkte)

Bestimme die Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Q}, +, 0)$ nach $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

Aufgabe 4.15. (4 Punkte)

Man gebe für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine invertierbare Matrix $M \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Q})$ an (dabei sei k geeignet gewählt), derart, dass die Ordnung von M gleich n ist.

Aufgabe 4.16. (3 Punkte)

Sei G eine Gruppe, in der jedes Element die Ordnung zwei hat, d.h. für jedes Gruppenelement g gilt $g^2 = e$. Zeige, dass die Gruppe G dann abelsch ist.