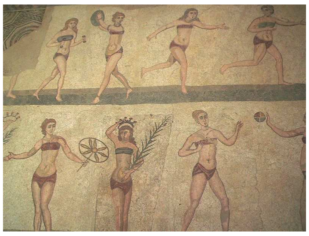
**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2009**

# Einführung in die Algebra

## Arbeitsblatt 16

### Aufwärmaufgaben



Aufgabe 1. Es sei $R$ ein kommutativer Ring und $f, a_i, b_j \in R$. Zeige die folgenden Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f^i + \sum_{j=0}^{m} b_j f^j = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) f^k$$

und

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_j f^j = \sum_{k=0}^{n+m} c_k f^k \text{ mit } c_k = \sum_{r=0}^{n} a_r b_{k-r} \, .$$

Aufgabe 2. Berechne das Produkt

$$(2X^3 + 3X^2 - 4X + 5) \cdot (X^4 - X^2 + 3X - 2)$$

im Polynomring $\mathbb{Z}/(7)[X]$.

Aufgabe 3. Man begründe, dass Satz 16.3 auch unter der schwächeren Bedingung gilt, dass die Elemente aus dem kommutativen Ring $R$ mit dem Element $a \in A$ vertauschbar sind, d.h. dass für alle $r \in R$ gilt $\varphi(r) \cdot a = a \cdot \varphi(r)$.

Aufgabe 4. Sei $K$ ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über $K$. Berechne das Bild des Polynoms $X^3 + 4X - 3$ unter dem durch $X \mapsto X^2 + X - 1$ definierten Einsetzungshomomorphismus $K[X] \longrightarrow K[X]$.

Aufgabe 5. Sei $K$ ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über $K$. Es sei $a \in K$ ein fixiertes Element. Bestimme den Kern des Einsetzungshomomorphismus

$$K[X] \longrightarrow K, \; X \longmapsto a.$$

Aufgabe 6. Führe in $\mathbb{Z}/(5)[X]$ die Division mit Rest $P/T$ für die beiden Polynome $P = X^3 + 4X^2 + 3X - 1$ und $T = 3X^2 + 2X + 1$ durch.

**Aufgaben zum Abgeben**

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Sei $K$ ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über $K$. Berechne das Bild des Polynoms $X^4 - 2X^2 + 5X - 2$ unter dem durch $X \mapsto 2X^3 + X - 1$ definierten Einsetzungshomomorphismus $K[X] \longrightarrow K[X]$.

Aufgabe 8. (5 Punkte)

Sei $K$ ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über $K$. Es sei $P \in K[X]$ ein nicht-konstantes Polynom. Zeige, dass der durch $X \mapsto P$ definierte Einsetzungshomomorphismus von $K[X]$ nach $K[X]$ injektiv ist und dass der durch $P$ erzeugte Unterring $K[P] \subseteq K[X]$ isomorph zum Polynomring in einer Variablen ist. Zeige, dass bei $\operatorname{grad}(P) \geq 2$ ein echter Unterring $K[P] \subset K[X]$ vorliegt.

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ die Division mit Rest $P/T$ für die beiden Polynome $P = 5X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 3X - 1$ und $T = 3X^2 + 6X + 4$ durch.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{C}[X]$ die Division mit Rest $P/T$ für die beiden Polynome $P = (5+i)X^4 + iX^2 + (3-2i)X - 1$ und $T = X^2 + iX + 3 - i$ durch.

Aufgabe 11. (2 Punkte)

Sei $R$ ein Integritätsbereich und $R[X]$ der Polynomring über $R$. Zeige, dass die Einheiten von $R[X]$ genau die Einheiten von $R$ sind.

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Es sei $R$ ein kommutativer Ring und $r \in R$ ein nilpotentes Element. Konstruiere dazu ein lineares Polynom in $R[X]$, das eine Einheit ist. Man gebe auch das Inverse dazu an.

Aufgabe 13. (4 Punkte)

Bestimme sämtliche konstante und lineare Einheiten im Polynomring $\mathbb{Z}/(9)[X]$. Begründe, dass es sich um eine Untergruppe der Einheitengruppe handelt. Welche Struktur hat diese Gruppe?

Aufgabe 14. (4 Punkte)

Es sei $K$ ein Körper. Betrachte den Matrizenring $\operatorname{Mat}_3(K)$ und darin die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} .$$

Definiere einen Ringhomomorphismus

$$K[X] \longrightarrow \operatorname{Mat}_3(K),$$

der $X$ auf $M$ schickt. Bestimme den Kern dieser Abbildung.

Aufgabe 15. (3 Punkte)

Sei $K$ ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über $K$. Es sei $A = \operatorname{Abb}(K, K)$ der Ring der Abbildungen von $K$ nach $K$. Definiere einen Ringhomomorphismus

$$K[X] \longrightarrow A.$$

# Abbildungsverzeichnis