Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 31

Euklidische Vektorräume

Im Anschauungsraum kann man nicht nur Vektoren addieren und skalieren, sondern ein Vektor hat auch eine Länge, und die Lagebeziehung von zwei Vektoren zueinander wird durch den Winkel zwischen ihnen ausgedrückt. Länge und Winkel werden beide durch den Begriff des *Skalarprodukts* präzisiert. Dafür muss ein reeller Vektorraum[1] vorliegen.

Definition 31.1. Sei V ein reeller Vektorraum. Ein *Skalarprodukt* auf V ist eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R},\, (v,w) \longmapsto \langle v,w \rangle\, ,$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) Es ist

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 , y \rangle = \lambda_1 \langle x_1 , y \rangle + \lambda_2 \langle x_2 , y \rangle$$

für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2, y \in V$ und ebenso in der zweiten Komponente.

(2) Es ist

$$\langle v,w \rangle = \langle w,v \rangle$$

für alle $v, w \in V$.

(3) Es ist $\langle v,v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\langle v,v \rangle = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.

Die dabei auftretenden Eigenschaften heißen *Bilinearität* (das ist nur eine andere Bezeichnung für multilinear, wenn der Definitionsbereich das Produkt von zwei Vektorräumen ist), *Symmetrie* und *positive Definitheit*.

Beispiel 31.2. Auf dem $\mathbb{R}^n$ ist die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\, (v,w) = ((v_1, \ldots , v_n), (w_1, \ldots , w_n)) \longmapsto \sum_{i=1}^n v_i w_i\, ,$$

ein Skalarprodukt, das man das *Standardskalarprodukt* nennt. Eine einfache Rechnung zeigt, dass dies in der Tat ein Skalarprodukt ist.

[1] Auch für komplexe Vektorräume gibt es Skalarprodukte, was wir aber nicht behandeln werden.

Beispielsweise ist im $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt

$$\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle = 3 \cdot (-1) - 5 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = -11.$$

Definition 31.3. Ein reeller, endlichdimensionaler Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt versehen ist, heißt *euklidischer Vektorraum*.

Zu einem euklidischen Vektorraum V ist jeder Untervektorraum $U \subseteq V$ selbst wieder ein euklidischer Vektorraum, da man das Skalarprodukt auf U einschränken kann und dabei die definierenden Eigenschaften erhalten bleiben.

Norm und Abstand

Mit einem Skalarprodukt kann man die Länge eines Vektors und damit auch den Abstand zwischen zwei Vektoren erklären.

Definition 31.4. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Dann nennt man zu einem Vektor $v \in V$ die reelle Zahl

$$|| v || = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

die *Norm* von v.

Satz 31.5. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und der zugehörigen Norm $|| - ||$. Dann gilt die* Cauchy-Schwarzsche Abschätzung, *nämlich*

$$|\langle v, w \rangle| \leq || v || \cdot || w ||$$

für alle $v, w \in V$.

Beweis. Bei $w = 0$ ist die Aussage richtig. Sei also $w \neq 0$ und damit auch $|| w || \neq 0$. Damit hat man die Abschätzungen

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle v - \frac{\langle v, w \rangle}{|| w ||^2} w, v - \frac{\langle v, w \rangle}{|| w ||^2} w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{|| w ||^2} \langle w, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{|| w ||^2} \langle v, w \rangle + \frac{\langle v, w \rangle \langle v, w \rangle}{|| w ||^4} \langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle^2}{|| w ||^2}. \end{aligned}$$

Multiplikation mit $|| w ||^2$ und Wurzelziehen ergibt das Resultat. □

Bemerkung 31.6. Für zwei von null verschiedene Vektoren v und w in einem euklidischen Vektorraum V folgt aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz, dass

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{|| v || \cdot || w ||} \leq 1$$

ist. Damit kann man mit Hilfe der trigonometrischen Funktion *Kosinus* bzw. der Umkehrfunktion den Winkel zwischen den beiden Vektoren definieren, nämlich durch

$$\angle(v,w) = \arccos \frac{\langle v, w\rangle}{|| v || \cdot || w ||} \, .$$

LEMMA 31.7. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, -\rangle$. Dann gelten für die zugehörige Norm folgende Eigenschaften.*

(1) $|| v || \geq 0$,
(2) $|| v || = 0$ *genau dann, wenn* $v = 0$ *ist.*
(3) *Für* $\lambda \in \mathbb{R}$ *und* $v \in V$ *gilt*

$$|| \lambda v || = |\lambda| \cdot || v || \; .$$

(4) *Für* $v, w \in V$ *gilt*

$$|| v + w || \leq || v || + || w || \; .$$

Beweis. Die ersten beiden Eigenschaften folgen direkt aus der Definition des Skalarprodukts. Die Multiplikativität folgt aus

$$|| \lambda v ||^2 = \langle \lambda v, \lambda v\rangle \; = \; \lambda \langle v, \lambda v\rangle \; = \; \lambda^2 \langle v, v\rangle \; = \; \lambda^2 \, || v ||^2 \, .$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung schreiben wir

$$\begin{aligned} || v + w ||^2 &= \langle v + w, v + w\rangle \\ &= || v ||^2 + || w ||^2 + 2\langle v, w\rangle \\ &\leq || v ||^2 + || w ||^2 + 2\, |\langle v, w\rangle| \end{aligned}$$

Aufgrund von Fakt ***** ist dies $\leq (|| v || + || w ||)^2$. Diese Abschätzung überträgt sich auf die Quadratwurzeln. □

LEMMA 31.8. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, -\rangle$ und der zugehörigen Norm $|| - ||$. Dann gilt die Beziehung*

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}(|| v + w ||^2 - || v ||^2 - || w ||^2) \, .$$

Beweis. Siehe Aufgabe *****. □

DEFINITION 31.9. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, -\rangle$. Zu zwei Vektoren $v, w \in V$ nennt man

$$d(v, w) := || v - w ||$$

den *Abstand* zwischen v und w.

LEMMA 31.10. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, -\rangle$. Dann besitzt der zugehörige Abstand die folgenden Eigenschaften (dabei sind $u, v, w \in V$).*

(1) *Es ist* $d(v, w) \geq 0$.
(2) *Es ist* $d(v, w) = 0$ *genau dann, wenn* $v = w$.
(3) *Es ist* $d(v, w) = d(w, v)$.

(4) *Es ist*

$$d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe *****. □

Damit ist ein euklidischer Raum insbesondere ein *metrischer Raum*, womit wir uns in den nächsten Vorlesungen beschäftigen werden.

Orthogonalität

Mit dem Skalarprodukt kann man die Eigenschaft zweier Vektoren, aufeinander senkrecht zu stehen, ausdrücken.

Definition 31.11. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$. Man nennt zwei Vektoren $v,w \in V$ *orthogonal* zueinander (oder *senkrecht*), wenn

$$\langle v,w \rangle = 0$$

ist.

Definition 31.12. Sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann heißt

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v,u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von U.

Beispiel 31.13. Sei $V = \mathbb{R}^n$ versehen mit dem Standardskalarprodukt. Zum eindimensionalen Untervektorraum $\mathbb{R}e_i$ zum Standardvektor e_i besteht das orthogonale Komplement aus allen Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ 0 \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, deren i-ter Eintrag 0 ist. Zum eindimensionalen Untervektorraum $\mathbb{R}v$ zu einem Vektor

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0$$

kann man das orthogonale Komplement bestimmen, indem man die Lösungsmenge der linearen Gleichung

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$$

bestimmt. Zu einem Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$, der durch eine Basis $v_j = \begin{pmatrix} a_{j1} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{pmatrix}$, $j = 1, \ldots, k$, gegeben ist, bestimmt man das orthogonale Komplement als Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0\,,$$

wobei $A = (a_{ji})$ die aus den v_j gebildete Matrix ist.

Definition 31.14. Sei V ein euklidischer Vektorraum. Eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V heißt *Orthonormalbasis*, wenn gilt

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1 \text{ für alle } i \text{ und } \langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ für } i \neq j\,.$$

Die Elemente in einer Orthonormalbasis haben alle die Norm 1 und sie stehen senkrecht aufeinander. Im $\mathbb{R}^n$ ist die Standardbasis eine Orthonormalbasis. Das folgende *Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren* erlaubt es, ausgehend von einer Basis eine Orthonormalbasis zu konstruieren.

Satz 31.15. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum und es sei $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Dann gibt es eine Orthonormalbasis $u_1, u_2, \ldots, u_n$ von V mit*[2]

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_i \rangle = \langle u_1, u_2, \ldots, u_i \rangle$$

für alle $i = 1, \ldots, n$.

Beweis. Die Aussage wird durch Induktion über i bewiesen, d.h. es wird sukzessive eine Familie von orthonormalen Vektoren konstruiert, die jeweils den gleichen Unterraum aufspannen. Für $i = 1$ muss man lediglich v_1 normieren, also durch $u_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$ ersetzen. Sei die Aussage für i schon bewiesen und sei eine Familie von orthonormalen Vektoren $u_1, \ldots, u_i$ mit $\langle u_1, \ldots, u_i \rangle = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$ bereits konstruiert. Wir setzen

$$w_{i+1} = v_{i+1} - \langle v_{i+1}, u_1 \rangle u_1 - \ldots - \langle v_{i+1}, u_i \rangle u_i\,.$$

Dieser Vektor steht senkrecht auf allen $u_1, \ldots, u_i$ und offenbar ist $\langle u_1, \ldots, u_i, w_{i+1} \rangle = \langle v_1, \ldots, v_i, v_{i+1} \rangle$. Durch Normieren von w_{i+1} erhält man u_{i+1}. □

Beispiel 31.16. Es sei V der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto 2x + 3y - z.$$

Als Unterraum des $\mathbb{R}^3$ trägt V ein Skalarprodukt. Wir möchten eine Orthonormalbasis von V bestimmen. Dazu betrachten wir die Basis bestehend aus

[2]Hier bezeichnet $\langle\rangle$ den von den Vektoren erzeugten Untervektorraum, nicht das Skalarprodukt.

den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Es ist $||v_1|| = \sqrt{5}$ und somit ist

$$u_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

der zugehörige normierte Vektor. Gemäß dem[3] Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren setzen wir

$$\begin{aligned} w_2 &= v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ 0 \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Es ist

$$||w_2|| = || \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} || = \sqrt{\frac{36}{25} + 1 + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{70}{25}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$$

und daher ist

$$u_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$$

der zweite Vektor der Orthonormalbasis.

Isometrien

[3] Häufig ist es numerisch geschickter, zuerst nur zu orthogonalisieren und die Normierung erst zum Schluss durchzuführen, siehe Beispiel *****.

DEFINITION 31.17. Es seien V und W zwei euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt φ eine *Isometrie*, wenn für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle \, .$$

LEMMA 31.18. *Es seien V und W zwei euklidische Vektorräume und sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

(1) *φ ist eine Isometrie.*
(2) *Für alle $u, v \in V$ ist $d(\varphi(u), \varphi(v)) = d(u, v)$.*
(3) *Für alle $v \in V$ ist $\| \varphi(v) \| = \| v \|$.*

Beweis. Die Richtungen (1) $\Rightarrow$ (2) und (2) $\Rightarrow$ (3) sind Einschränkungen und (3) $\Rightarrow$ (1) folgt aus Fakt *****. $\square$

Abbildungsverzeichnis