**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2009/2010**

# Mathematik I

## Arbeitsblatt 26

### Aufwärmaufgaben

Aufgabe 26.1. Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $X$, die gegen $x \in X$ konvergiert. Es sei $T$ eine Menge und es seien

$$f_n : T \longrightarrow X,\ t \longmapsto f_n(t) = x_n,$$

die zu $x_n$ gehörenden konstanten Funktionen. Zeige, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die konstante Funktion

$$f : T \longrightarrow X,\ t \longmapsto f(t) = x,$$

konvergiert.

Aufgabe 26.2. Es sei $T$ eine endliche Menge und

$$f_n : T \longrightarrow X$$

eine Funktionenfolge in einen metrischen Raum $X$. Zeige, dass diese Folge genau dann punktweise konvergiert, wenn sie gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 26.3. Sei $T$ eine Menge und seien

$$f_n : T \longrightarrow \mathbb{K}$$

und

$$g_n : T \longrightarrow \mathbb{K}$$

zwei gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen. Zeige, dass auch die Summenfolge

$$f_n + g_n : T \longrightarrow \mathbb{K},\ t \longmapsto f_n(t) + g_n(t),$$

gleichmäßig konvergent ist.

Aufgabe 26.4. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Wir betrachten auf einem reellen Intervall $[a, b]$ die Funktionenfolge

$$f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto tx_n.$$

Zeige, dass diese Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert, und bestimme die Grenzfunktion.

Aufgabe 26.5. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto tx_n.$$

Zeige, dass diese Funktionenfolge punktweise, aber im Allgemeinen nicht gleichmäßig konvergiert. Was ist die Grenzfunktion.

Aufgabe 26.6. Zu $n \in \mathbb{N}_+$ betrachten wir die Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f_n(x),$$

die durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0, \\ nx & \text{für } 0 < x \leq 1/n, \\ 2 - nx & \text{für } 1/n < x \leq 2/n, \\ 0, & \text{für } x > 2/n\,. \end{cases}$$

definiert sind. Zeige, dass diese Funktionen stetig sind, und dass diese Funktionenfolge punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.

Aufgabe 26.7. Es sei $T$ eine Menge und

$$M = \{f : T \to \mathbb{C} \mid \,\| f \|_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten komplexwertigen Funktionen auf $T$. Zeige, dass $M$ ein komplexer Vektorraum ist.

Aufgabe 26.8. Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ die zugehörige Potenzreihe. Zeige, dass deren Konvergenzradius mit dem Konvergenzradius der um $a \in \mathbb{C}$ „verschobenen“ Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

übereinstimmt.

Aufgabe 26.9. Zeige, dass die Exponentialreihe auf $\mathbb{C}$ nicht gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 26.10. Sei $b > 0$ eine positive reelle Zahl. Zeige für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$b^x = \exp(x \cdot \ln b)\,.$$

Aufgabe 26.11. Schreibe das Polynom

$$X^3 + 2X^2 - 3X + 4$$

in der neuen Variablen $U = X + 2$.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 26.12. (4 Punkte)

Betrachte die Funktionenfolge

$$f_n : I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^{1/n}.$$

Zeige, dass diese Folge für $I = \mathbb{R}_{\geq 0}$ punktweise konvergiert, und untersuche die Folge auf gleichmäßige Konvergenz für die verschiedenen Definitionsmengen

$$I = \mathbb{R}_{\geq 0},\ \mathbb{R}_+,\ [1, \infty],\ [\frac{1}{5}, 5],\ ]0, 1],\ [0, 1]\,.$$

Aufgabe 26.13. (4 Punkte)

Betrachte die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,.$$

Zeige, dass diese Potenzreihe den Konvergenzradius 1 besitzt, und dass die Reihe noch für alle $x \in \mathbb{C}$, $\mid x \mid = 1$, konvergiert.

Aufgabe 26.14. (6 Punkte)

Sei $(Y, d)$ ein metrischer Raum und $T \subseteq Y$ eine Teilmenge. Es sei $T \subseteq \tilde{T} \subseteq \overline{T}$ und

$$g_n : \tilde{T} \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Folge von stetigen Funktionen. Zeige, dass diese Folge genau dann gleichmäßig konvergiert, wenn die auf $T$ eingeschränkte Folge $f_n = g_n|_T$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 26.15. (4 Punkte)

Es sei $T$ eine Menge und

$$M = \{f : T \to \mathbb{C} \mid\ \| f \|_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten komplexwertigen Funktionen auf $T$. Zeige, dass die Supremumsnorm auf $M$ folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) $\| f \| \geq 0$ für alle $f \in M$.
(2) $\| f \| = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist.

(3) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f \in M$ gilt

$$|| \lambda f || = | \lambda | \cdot || f || \ .$$

(4) Für $g, f \in M$ gilt

$$|| g + f || \leq || g || + || f || \ .$$

Aufgabe 26.16. (5 Punkte)

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

eine Potenzreihe, die für ein $\epsilon > 0$ auf $U(0, \epsilon)$ konvergiere und dort die Nullfunktion darstellt. Zeige, dass dann $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist (d.h. die Potenzreihe ist die Nullreihe).

Aufgabe 26.17. (3 Punkte)

Bestimme die Koeffizienten $d_0, \ldots, d_6$ der Exponentialreihe im Entwicklungspunkt 1.