Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 32

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 32.1. Zeige, dass die Summenmetrik im $\mathbb{R}^n$ eine Metrik ist.

Aufgabe 32.2. Zeige, dass die Maximumsmetrik im $\mathbb{R}^n$ eine Metrik ist.

Aufgabe 32.3. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass die induzierte Metrik auf T in der Tat eine Metrik ist.

Aufgabe 32.4. Zeige, dass auf jeder Menge M die diskrete Metrik in der Tat eine Metrik ist.

Aufgabe 32.5.*

Es seien $P = \left(\frac{3}{4}, -1\right)$ und $Q = \left(2, \frac{1}{5}\right)$ zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$. Bestimme den Abstand zwischen diesen beiden Punkten in der

a) euklidischen Metrik,

b) der Summenmetrik,

c) und der Maximumsmetrik.

Vergleiche diese verschiedenen Abstände der Größe nach.

Aufgabe 32.6. Es sei V ein euklidischer Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $v \in V$ ein Vektor. Zeige, dass der Abstand $d(v, u)$ zu einem Vektor $u \in U$ genau in dem (eindeutig bestimmten) Punkt $u_0 \in U$ minimal wird, für den $v - u_0$ orthogonal zu U ist.

Aufgabe 32.7. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass folgende Eigenschaften gelten.

(1) Die leere Menge $\emptyset$ und die Gesamtmenge M sind offen.

(2) Es sei I eine beliebige Indexmenge und seien U_i, $i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch die Vereinigung

$$\bigcup_{i \in I} U_i$$

offen.

(3) Es sei I eine endliche Indexmenge und seien U_i, $i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch der Durchschnitt

$$\bigcap_{i \in I} U_i$$

offen.

Aufgabe 32.8. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass jede endliche Teilmenge $T \subseteq M$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 32.9. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass in M die sogenannte *Hausdorff*-Eigenschaft gilt, d.h. zu je zwei verschiedenen Punkten x und y gibt es offene Mengen U und V mit

$$x \in U \text{ und } y \in V \text{ und } U \cap V = \emptyset\,.$$

Aufgabe 32.10. Sei M eine Menge, die mit der diskreten Metrik versehen sei. Zeige, dass jede Teilmenge von M sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

Aufgabe 32.11. Zeige, dass die Menge

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \vert\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

abgeschlossen ist.

Aufgabe 32.12. Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen in $\mathbb{C}$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 32.13. Es seien P und Q zwei verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^2$ und G die dadurch definierte Gerade. Zeige, dass G abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 32.14. Zeige, dass die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen ist.

Aufgabe 32.15. Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z| < 1$. Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 32.16. Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z| > 1$. Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert.

Aufgabe 32.17. Zeige, dass eine Folge in einem metrischen Raum maximal einen Grenzwert besitzt.

Aufgabe 32.18. Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M. Zeige, dass die Folge genau dann gegen einen Punkt $x \in M$ konvergiert, wenn die reelle Folge $d(x_n, x)$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 32.19. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass der Rand von T abgeschlossen ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 32.20. (2 Punkte)

Es seien $P = \left(3, \frac{5}{2}, 0\right)$ und $Q = \left(1, -6, \frac{2}{5}\right)$ zwei Punkte im $\mathbb{R}^3$. Bestimme den Abstand zwischen diesen beiden Punkten in der

a) euklidischen Metrik,

b) der Summenmetrik,

c) und der Maximumsmetrik.

Vergleiche diese verschiedenen Abstände der Größe nach.

Aufgabe 32.21. (4 Punkte)

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die abgeschlossenen Kugeln $B(x, \epsilon)$ abgeschlossen sind.

Aufgabe 32.22. (4 Punkte)

Entscheide, ob im $\mathbb{R}^3$ (versehen mit der euklidischen Metrik) die Folge

$$x_n = \left(\frac{n^5 - 4n^2}{e^n}, \frac{-5n^4 + n^3 - n^{-1}}{13n^4 - 9n^2 + 5n + 6}, \frac{4\cos^3 n + 6n^2 + 5n - 2}{2n^2 - \sin^7 n} \right)$$

konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 32.23. (3 Punkte)

Bestimme den minimalen Abstand von $(4, 1, -5)$ zu einem Punkt der Ebene E, die durch die Gleichung $2x - 7y + 3z = 0$ gegebenen ist.

Aufgabe 32.24. (5 Punkte)

Für welche Punkte (t, t^2) der Standardparabel wird der Abstand zum Punkt $(0, 1)$ minimal?

Aufgabe 32.25. (5 Punkte)

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Zeige, dass eine Teilmenge $Z \subseteq T$ genau dann offen in T ist, wenn es eine in M offene Menge U gibt mit $Z = T \cap U$.