Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 7

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 7.1. Es sei K ein angeordneter Körper. Man untersuche die Verknüpfung

$$K \times K \longrightarrow K, \, (x,y) \longmapsto \min(x,y),$$

auf Assoziativität, Kommutativität, die Existenz von einem neutralen Element und die Existenz von inversen Elementen.

Aufgabe 7.2. Es sei K ein angeordneter Körper und $a \in K$. Zeige, dass dann die Gleichung $x^2 = a$ höchstens zwei Lösungen in K besitzt.

Aufgabe 7.3. Zeige, dass es in $\mathbb{Q}$ kein Element x mit $x^2 = 2$ gibt.

Aufgabe 7.4. Man untersuche die folgenden Teilmengen $M \subseteq \mathbb{Q}$ auf die Begriffe obere Schranke, untere Schranke, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum.

(1) $\{2, -3, -4, 5, 6, -1, 1\}$,
(2) $\{\frac{1}{2}, \frac{-3}{7}, \frac{-4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{13}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}\}$,
(3) $]-5, 2]$,
(4) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\}$,
(5) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\} \cup \{0\}$,
(6) $\mathbb{Q}_-$,
(7) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$,
(8) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 4\}$,
(9) $\{x^2 : x \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 7.5. Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 5 zum Startwert $x_0 = 2$.

Aufgabe 7.6. Schreibe ein Computer-Programm, das zu einer vorgegebenen rationalen Zahl mittels des Heron-Verfahrens die Quadratwurzel der Zahl bis auf 10 Nachkommastellen (im Dezimalsystem) genau berechnet.

AUFGABE 7.7. Beweise die Aussagen (1), (3) und (5) von Lemma 7.10.

Für die folgende Aufgabe brauchen wir den Begriff der Polynomfunktion. Es sei K ein Körper und seien $a_0, a_1, \ldots, a_d \in K$. Eine Funktion

$$K \longrightarrow K,\, x \longmapsto P(x),$$

mit

$$P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \ldots + a_d x^d$$

heißt *Polynomfunktion*.

AUFGABE 7.8. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $x \mapsto \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ eine Polynomfunktion. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x. Zeige durch Induktion über d , dass dann auch die durch

$$y_n := P(x_n)$$

definierte Folge konvergiert, und zwar gegen $P(x)$.

AUFGABE 7.9. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $\lim_{n \to \infty} x_n \geq \lim_{n \to \infty} y_n$ gilt.

AUFGABE 7.10. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ drei Folgen in K. Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 7.11. (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die Folge

$$(\mid x_n \mid)_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert, und zwar gegen $\mid x \mid$.

Aufgabe 7.12. (3 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Zeige, dass die Folge

$$(\frac{n}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$$

gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 7.13. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die durch

$$y_n := \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_n}{n+1}$$

definierte Folge gegen x konvergiert.

Aufgabe 7.14. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Man gebe Beispiele für konvergente Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K mit $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, und mit $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ derart, dass die Folge

$$(\frac{y_n}{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$$

(1) gegen 0 konvergiert,
(2) gegen 1 konvergiert,
(3) divergiert.

Aufgabe 7.15. (5 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und seien $P = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ und $Q = \sum_{i=0}^{e} b_i x^i$ Polynome mit $a_d, b_e \neq 0$. Man bestimme in Abhängigkeit von d und e, ob die durch

$$z_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

(für n hinreichend groß) definierte Folge konvergiert oder nicht, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 7.16. (8 Punkte)

Mathematiker haben, so ein weitverbreitetes Vorurteil, Schwierigkeiten, ihre Hemden korrekt zuzuknöpfen. Ein Hemd hat auf der einen Seite eine von oben nach unten geordnete Knopfreihe bestehend aus n Knöpfen und auf der anderen Seite eine ebenso geordnete Lochreihe aus n Löchern. Beide Reihen seien von oben nach unten durchnummeriert mit 1 bis n. Eine *Zuknöpfung* σ ordnet jedem Knopf genau ein Loch zu, sie ist also eine Abbildung

$$\sigma : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\},\ i \longmapsto \sigma(i),$$

wobei die identische Abbildung $i \mapsto i$ als korrekte (oder triviale) Zuknöpfung gilt. Der *Zerstreutindex* $Z(\sigma)$ ist ein wichtiges nummerisches Maß[1] für die Zerstreutheit (oder Kreativität) einer Zuknöpfung σ. Er ist definiert über die Abbildung

$$Z : A_n = \operatorname{Abb}(\{1, \ldots, n\}, \{1, \ldots, n\}) \longrightarrow \mathbb{N},\ \sigma \longmapsto Z(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} |\, i - \sigma(i) \,| \, .$$

(1) Zeige: Eine Zuknöpfung σ ist genau dann korrekt, wenn $Z(\sigma) = 0$ ist.[2]

(2) Kann eine Zuknöpfung den Zerstreutindex 1 haben? Wie sieht es bei bijektiven Zuknöpfungen aus?

(3) Bestimme
$$a_n = \max\{Z(\sigma) :\, \sigma \in A_n\}$$
in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

(4) Es sei $B_n \subseteq A_n$ die Menge aller bijektiven Zuknöpfungen. Bestimme
$$b_n = \max\{Z(\sigma) :\, \sigma \in B_n\}$$
für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

(5) Es sei $C_n \subseteq A_n$ die Menge aller konstanten Zuknöpfungen. Bestimme
$$c_n = \max\{Z(\sigma) :\, \sigma \in C_n\}$$
in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

(6) Eine Zuknöpfung σ heißt *semikorrekt*,[3] wenn $Z(\sigma) \leq n$ ist. Klassifiziere[4] alle semikorrekten Zuknöpfungen bei $n \leq 3$.

---

[1]Ein solches Maß heißt auch eine *Invariante*. Es ist ein wichtiger Aspekt der Mathematik, nach Invarianten von mathematischen Objekten zu suchen, die wesentliche Eigenschaften von diesen Objekten ausdrücken. Die Berechnung von solchen Invarianten kann schwierig sein.

[2]Häufig liegt eine besondere Situation vor, wenn die Invariante den einfachsten Wert annimmt. Von daher sind Invarianten auch dafür da, einfache Objekte von schwierigen Objekten zu unterscheiden.

[3]Mit Hilfe von Invarianten kann man Eigenschaften von Objekten definieren. Eigenschaften, die „nahe“ an einem gewissen Begriff sind, werden häufig so bezeichnet, dass vor den Begriff eine Vorsilbe wie „quasi-, prä-, semi-, fast-, pseudo-“ etc. gestellt wird.

[4]Klassifiziere meint hier, dass man die verschiedenen Möglichkeiten auflisten soll. Es ist eine wichtige Zielsetzung innerhalb der Mathematik, eine strukturelle Übersicht über möglichst alle Objekte eines mathematischen Gebiets zu erlangen.