**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2011**

# Körper- und Galoistheorie

## Arbeitsblatt 16

### Aufwärmaufgaben

Aufgabe 16.1. Sei $p$ eine Primzahl. Erstelle Inklusionsdiagramme für die Zwischenkörper der Körpererweiterung $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$ für $n = 4, 6, 8, 12$. Wie sehen die zugehörigen Inklusionsdiagramme der Untergruppen der Galoisgruppe aus?

Aufgabe 16.2. Es seien $D_1$ und $D_2$ kommutative Gruppen und seien $D_1^\vee$ und $D_2^\vee$ die zugehörigen Charaktergruppen zu einem Körper $K$.

(1) Zeige, dass zu einem Gruppenhomomorphismus
$$\varphi : D_1 \longrightarrow D_2$$
durch die Zuordnung $\chi \mapsto \chi \circ \varphi$ ein Gruppenhomomorphismus
$$\varphi^\vee : D_2^\vee \longrightarrow D_1^\vee$$
definiert wird.

(2) Es sei $D_3$ eine weitere kommutative Gruppe und sei
$$\psi : D_2 \longrightarrow D_3$$
ein Gruppenhomomorphismus. Zeige die Gleichheit
$$(\psi \circ \varphi)^\vee = \varphi^\vee \circ \psi^\vee .$$

Aufgabe 16.3. Es sei $D$ eine kommutative Gruppe und $K$ ein Körper.

a) Zeige, dass durch
$$D \longrightarrow (D^\vee)^\vee,\, d \longmapsto (\mathrm{ev}_d : \chi \mapsto \chi(d))$$
ein natürlicher Gruppenhomomorphismus von $D$ in das Doppeldual $(D^\vee)^\vee$ gegeben ist.

b) Es sei nun $D$ endlich und es sei vorausgesetzt, dass $K$ eine $m$-te primitive Einheitswurzel enthält, wobei $m$ der Exponent von $D$ sei. Zeige, dass dann die Abbildung aus a) ein Isomorphismus ist.

Die in der vorstehenden Aufgabe auftretende Abbildung $\mathrm{ev}_d$ heißt *Evaluierungsabbildung* (zu $d$).

Aufgabe 16.4. Es sei $D$ eine endliche kommutative Gruppe und es sei $K$ ein Körper. Wir betrachten die Zuordnung

$$E \longmapsto E^{\perp} = \{\chi \in D^{\vee} |\, \chi(d) = 1 \text{ für alle } d \in E\}\,,$$

die einer Untergruppe von $D$ eine Untergruppe von $D^{\vee}$ zuordnet. Zeige die folgenden Aussagen.

a) Die Zuordnung ist inklusionsumkehrend.

b) Unter der kanonischen Abbildung

$$D \longrightarrow (D^{\vee})^{\vee},\, d \longmapsto (\mathrm{ev}_d : \chi \mapsto \chi(d)),$$

ist $\mathrm{ev}_d(E) \subseteq (E^{\perp})^{\perp}$.

c) Es sei vorausgesetzt, dass $K$ eine $m$-te primitive Einheitswurzel enthält, wobei $m$ der Exponent von $D$ sei. Zeige, dass dann $\mathrm{ev}_d(E) = (E^{\perp})^{\perp}$ gilt.

Aufgabe 16.5. Es sei $D$ eine endliche kommutative Gruppe mit dem Exponenten $m$, und es sei $K$ ein Körper, der eine primitive $m$-te Einheitswurzel besitzt. Zeige, dass die Zuordnungen

$$E \longmapsto E^{\perp} = \{\chi \in D^{\vee} |\, \chi(d) = 1 \text{ für alle } d \in E\}$$

und

$$H \longmapsto H^{\perp}$$

(zwischen den Untergruppen von $D$ und den Untergruppen von $D^{\vee}$) zueinander invers sind.

Aufgabe 16.6. Bestimme die Zwischenkörper in Beispiel 16.8.

Ein Element $f \in L$ einer Körpererweiterung $K \subseteq L$ definiert durch Multiplikation eine $K$-lineare Abbildung

$$\mu_f : L \longrightarrow L,\, y \longmapsto fy.$$

Aufgabe 16.7. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige, dass die Abbildung

$$L \longrightarrow \mathrm{End}_K\,(L),\, f \longmapsto \mu_f,$$

ein Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe 16.8. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei $f \in L$ gegeben mit der zugehörigen Multiplikationsabbildung $\mu_f$. Zeige, dass das charakteristische Polynom $\chi_{\mu_f}$ ein Vielfaches des Minimalpolynoms zu $f$ ist.

Aufgabe 16.9. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige, dass zwischen $\varphi \in \operatorname{Gal}(L|K)$ und der Multiplikationsabbildung $\mu_f$, $f \in L$, beide aufgefasst als $K$-lineare Abbildung von $L$ nach $L$, weder die Beziehung

$$\mu_{\varphi(f)} = \mu_f \circ \varphi$$

noch die Beziehung

$$\mu_{\varphi(f)} = \varphi \circ \mu_f$$

gelten muss.

Über $\mu_f$ wird auch die Norm von $f \in L$ definiert.

Definition 16.10. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zu einem Element $f \in L$ nennt man die Determinante der $K$-linearen Abbildung

$$\mu_f : L \longrightarrow L,\ y \longmapsto fy,$$

die *Norm* von $f$. Sie wird mit $N(f)$ bezeichnet.

Aufgabe 16.11. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige, dass die Norm

$$N : L \longrightarrow K,\ f \longmapsto N(f),$$

folgende Eigenschaften besitzt.

(1) Es ist $N(fg) = N(f)N(g)$.
(2) Für $f \in K$ ist $N(f) = f^n$, wobei $n$ den Grad der Körpererweiterung bezeichne.
(3) Es ist $N(f) = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 16.12. (3 Punkte)

Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung und sei $M$, $K \subseteq M \subseteq L$, ein Zwischenkörper. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Für alle $\psi \in \operatorname{Gal}(L|K)$ ist $\psi(M) = M$.
(2) Die Untergruppe $\operatorname{Gal}(L|M) \subseteq \operatorname{Gal}(L|K)$ ist nur zu sich selbst konjugiert.

Aufgabe 16.13. (3 Punkte)

Es sei $K$ ein Körper und $F \in K[X]$ ein irreduzibles separables Polynom. Es sei vorausgesetzt, dass die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers $L$ von $F$ kommutativ sei. Zeige, dass dann $L \cong K[X]/(F)$ ist.

Aufgabe 16.14. (4 Punkte)

Es sei $K$ ein Körper und sei $D$ eine endliche kommutative Gruppe mit dem Exponenten $m$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) $K$ besitzt eine $m$-te primitive Einheitswurzel.
(2) Zu jedem Primpotenzteiler $p^r$ von $m$ besitzt $K$ eine $p^r$-te primitive Einheitswurzel.
(3) Zu jedem Teiler $n$ von $m$ besitzt $K$ eine $n$-te primitive Einheitswurzel.
(4) Zu jeder Ordnung $n$ eines Elementes $d \in D$ besitzt $K$ eine $n$-te primitive Einheitswurzel.

Aufgabe 16.15. (4 (1+3) Punkte)

Es sei $D$ eine endliche kommutative Gruppe und $E \subseteq D$ eine Untergruppe. Es sei $K$ ein Körper.

a) Zeige, dass der Kern des natürlichen Gruppenhomomorphismus

$$\psi : D^\vee \longrightarrow E^\vee,\ \chi \longmapsto \chi|_E,$$

gleich $E^\perp$ ist.

b) Es sei vorausgesetzt, dass $K$ eine $m$-te primitive Einheitswurzel besitzt, wobei $m$ der Exponent von $D$ sei. Zeige, dass $\psi$ surjektiv ist.