

## Mathematik für Anwender II

### Vorlesung 45

#### Partielle Ableitungen

Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine durch

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

gegebene Abbildung. Betrachtet man für einen fixierten Index  $i$  die übrigen Variablen  $x_j$ ,  $j \neq i$ , als Konstanten, so erhält man eine Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die nur von  $x_i$  abhängt (entsprechend betrachtet man die übrigen Variablen als Parameter). Falls diese Funktion, als Funktion in einer Variablen, differenzierbar ist, so sagen wir, dass  $f$  *partiell differenzierbar* bezüglich  $x_i$  ist und bezeichnen diese Ableitung mit  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ . Der Vorteil der partiellen Ableitungen liegt darin, dass man diese einfach berechnen kann. Jedoch hängen sie von der Wahl einer Basis ab. Die partiellen Ableitungen sind selbst Abbildungen von  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

DEFINITION 45.1. Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei eine Abbildung  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$  durch

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

gegeben. Es sei  $P = (a_1, \dots, a_n) \in G$  ein Punkt. Für fixierte Indizes  $i$  und  $j$  betrachten wir die Abbildung

$$I \rightarrow \mathbb{R}, x_i \mapsto f_j(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

(wobei  $I$  ein Intervall mit  $a_i \in I$  sei derart, dass  $\{(a_1, \dots, a_{i-1})\} \times I \times \{(a_{i+1}, \dots, a_n)\} \subseteq G$  gilt) als Funktion in einer Variablen, wobei die übrigen Variablen  $a_k$ ,  $k \neq i$ , fixiert seien. Ist diese Funktion in  $P$  differenzierbar, so heißt  $f_j$  *partiell differenzierbar* in  $P$  bezüglich der Koordinate  $x_i$ . Man bezeichnet diese Ableitung (welche ein Element in  $\mathbb{R}$  ist) mit

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P)$$

und nennt sie die *i-te partielle Ableitung* von  $f_j$  in  $P$ .

Die Abbildung  $f$  heißt *partiell differenzierbar* im Punkt  $P$ , falls für alle  $i$  und  $j$  die partiellen Ableitungen in  $P$  existieren. Die *i-te partielle Ableitung* von  $f$  in  $P$  wird mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) := \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P) \right)$$

bezeichnet.

Diese Definition führt die  $i$ -te partielle Ableitung einer Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  auf den Ableitungsbegriff in einer Variablen zurück, indem die anderen Variablen „festgehalten“ und als Parameter betrachtet werden. Daher bedeutet die Existenz der  $i$ -ten partiellen Ableitung von  $f$  im Punkt  $(a_1, \dots, a_n)$  einfach die Existenz des Limes

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + s, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{s}.$$

BEISPIEL 45.2. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{xy^3}{x^2 + y^2}.$$

Um die partielle Ableitung nach  $x$  (in jedem Punkt) zu berechnen, betrachtet man  $y$  als eine Konstante, sodass eine nur von  $x$  abhängige Funktion dasteht. Diese wird gemäß den Ableitungsregeln für Funktionen in einer Variablen abgeleitet, so dass sich

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3(x^2 + y^2) - xy^3(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2y^3 + y^5}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$$

ergibt. Für die partielle Ableitung nach  $y$  betrachtet man  $x$  als eine Konstante und erhält

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3xy^2(x^2 + y^2) - xy^3(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^3y^2 + xy^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}.$$

Die partiellen Ableitungen sind im Wesentlichen die Richtungsableitungen in Richtung der Basisvektoren. Insbesondere machen partielle Ableitungen nur dann Sinn, wenn eine Basis im Vektorraum, der den Definitionsbereich einer Abbildung darstellt, gewählt worden ist, bzw. wenn eben von vornherein ein  $\mathbb{R}^n$  betrachtet wird.

LEMMA 45.3. Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $P \in G$  ein Punkt und sei

$$\begin{aligned} f: G \longrightarrow \mathbb{R}^m(x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ &= (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)), \end{aligned}$$

eine Abbildung. Dann ist  $\varphi$  genau dann partiell differenzierbar in  $P$ , wenn die Richtungsableitungen von sämtlichen Komponentenfunktionen  $f_j$  in  $P$  in Richtung eines jeden Einheitsvektors existieren. In diesem Fall stimmt die  $i$ -te partielle Ableitung  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P)$  von  $f$  in  $P$  mit der Richtungsableitung von  $f_j$  in  $P$  in Richtung des  $i$ -ten Einheitsvektors  $e_i$  überein, und  $f$  ist genau dann partiell differenzierbar in  $P$ , wenn die Richtungsableitungen in  $P$  in Richtung eines jeden Einheitsvektors existieren.

*Beweis.* Sei  $P = (a_1, \dots, a_n)$ . Da partielle Ableitungen die Ableitungen von Funktionen in einer Variablen sind, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P) &= \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{f_j(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + s, a_{i+1}, \dots, a_n) - f_j(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{s} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{f_j(P + se_i) - f_j(P)}{s} \\
&= (D_{e_i} f)(P).
\end{aligned}$$

□

DEFINITION 45.4. Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei eine Abbildung

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}^m (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

gegeben. Dann heißt  $f$  *partiell differenzierbar*, wenn  $f$  in jedem Punkt  $P \in G$  partiell differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Abbildung

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : G \longrightarrow \mathbb{R}^m, P \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P) \right),$$

die  $i$ -te *partielle Ableitung* von  $f$ .

DEFINITION 45.5. Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei eine Abbildung  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei eine Abbildung

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}^m (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

gegeben, die in  $P \in G$  partiell differenzierbar sei. Dann heißt die Matrix

$$\text{Jak}(f)_P := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}$$

die *Jacobi-Matrix* zu  $f$  im Punkt  $P$ .

BEISPIEL 45.6. Wir betrachten die Abbildung  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die durch

$$(x, y, z) \longmapsto (xy^2 - z^3, \sin(xy) + x^2 \cdot \exp z) = (f_1, f_2)$$

gegeben sei. Die partiellen Ableitungen von  $f_1$  sind

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = -3z^2,$$

und die partiellen Ableitungen von  $f_2$  sind

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y \cos(xy) + 2x \cdot \exp z, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = x \cdot \cos(xy), \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = x^2 \cdot \exp(z).$$

Damit erhalten wir für einen beliebigen Punkt  $P = (x, y, z)$  die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} y^2 & 2xy & -3z^2 \\ y \cos(xy) + 2x \exp(z) & x \cos(xy) & x^2 \exp(z) \end{pmatrix}.$$

Für einen speziellen Punkt, z.B.  $P = (2, 1, 3)$ , setzt man einfach ein:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -27 \\ \cos(2) + 4 \exp(3) & 2 \cos(2) & 4 \exp(3) \end{pmatrix}.$$

### Höhere Richtungsableitungen

Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume und  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge. Für eine Abbildung  $f: G \rightarrow W$  und einen fixierten Vektor  $v \in V$  ist die Richtungsableitung in Richtung  $v$  (falls diese existiert) selbst eine Abbildung

$$D_v f: G \longrightarrow W, P \longmapsto (D_v f)(P).$$

Als solche macht es Sinn zu fragen, ob  $D_v f$  in Richtung  $u \in V$  differenzierbar ist. Wir sprechen dann von *höheren Ableitungen*. Dies wird präzisiert durch die folgende induktive Definition.

DEFINITION 45.7. Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume,

$$f: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung auf einer offenen Menge  $G \subseteq V$  und  $v_1, \dots, v_n$  Vektoren in  $V$ . Man sagt, dass die *höhere Richtungsableitung* von  $f$  in Richtung  $v_1, \dots, v_n$  existiert, wenn die höhere Richtungsableitung in Richtung  $v_1, \dots, v_{n-1}$  existiert und davon die Richtungsableitung in Richtung  $v_n$  existiert. Sie wird mit

$$D_{v_n}(\dots D_{v_2}(D_{v_1} f))$$

bezeichnet.

BEISPIEL 45.8. Wir bestimmen die Richtungsableitung zur Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - xy - y^3,$$

in Richtung  $v = (4, -1)$ . Zu einem Punkt  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  müssen wir die Funktion

$$p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(P + tv),$$

nach  $t$  im Nullpunkt ableiten. Es ist

$$\begin{aligned} p(t) &= f(P + tv) \\ &= (x + 4t)^2 - (x + 4t)(y - t) - (y - t)^3 \\ &= x^2 + 8xt + 16t^2 - xy - 4ty + xt + 4t^2 - y^3 + 3y^2t - 3yt^2 + t^3 \\ &= x^2 - xy - y^3 + 9xt - 4ty + 3y^2t + 20t^2 - 3yt^2 + t^3. \end{aligned}$$

Die Ableitung von dieser Funktion im Nullpunkt ist

$$p'(0) = 9x - 4y + 3y^2,$$

also ist

$$g(x, y) := (D_v f)(x, y) = 9x - 4y + 3y^2.$$

Für diese Funktion können wir nun die Richtungsableitung in Richtung  $u = (2, -3)$  ausrechnen. Es ist

$$\begin{aligned} q(t) &:= g(P + tu) \\ &= 9(x + 2t) - 4(y - 3t) + 3(y - 3t)^2 \\ &= 9x - 4y + 3y^2 + 18t + 12t - 18yt + 27t^2. \end{aligned}$$

Die Ableitung von dieser Funktion im Nullpunkt ist

$$q'(0) = 30 - 18y,$$

also ist

$$(D_u g)(x, y) = (D_u(D_v f))(x, y) = 30 - 18y.$$

DEFINITION 45.9. Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume und

$$f: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung auf einer offenen Menge. Man sagt, dass  $f$   $n$ -mal *stetig differenzierbar* ist, wenn für jede Auswahl  $v_1, \dots, v_n$  von  $n$  Vektoren aus  $V$  die höhere Richtungsableitung

$$D_{v_n}(\dots D_{v_2}(D_{v_1} f))$$

in Richtung  $v_1, \dots, v_n$  existiert und stetig ist.

Einmal stetig differenzierbar bedeutet also, dass die Richtungsableitung  $D_v f$  in jede Richtung  $v \in V$  existiert und stetig ist.

Polynomfunktionen sind beliebig oft stetig differenzierbar, siehe Aufgabe 45.5.

Auch partielle Ableitungen kann man wie Richtungsableitungen hintereinanderausführen. Dies führt zu Schreibweisen wie

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f$$

und Ähnliche.

### Der Satz von Schwarz

BEISPIEL 45.10. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^4 - x^3y + 5xy^2 + 2y^3.$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 3x^2y + 5y^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x^3 + 10xy + 6y^2.$$

Diese Funktionen sind selbst wiederum partiell differenzierbar, und wir berechnen

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (4x^3 - 3x^2y + 5y^2) = -3x^2 + 10y$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-x^3 + 10xy + 6y^2) = -3x^2 + 10y.$$

Die beiden zweiten partiellen Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f$  und  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f$  stimmen also überein.

In diesem Beispiel zeigt sich ein allgemeiner Sachverhalt, der *Satz von Schwarz* (oder auch *Satz von Clairaut*) heißt.

**SATZ 45.11.** *Sei  $G \subseteq V$  offen und  $\varphi: G \rightarrow W$  eine Abbildung, so dass für  $u, v \in V$  die zweiten Richtungsableitungen  $D_v D_u \varphi$  und  $D_u D_v \varphi$  existieren und stetig sind. Dann gilt*

$$D_v D_u \varphi = D_u D_v \varphi.$$

*Beweis.* Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

**KOROLLAR 45.12.** *Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume,  $G \subseteq V$  offen und*

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

*eine  $n$ -mal stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Auswahl von  $n$  Vektoren aus  $V$ . Dann gilt für jede Permutation  $\sigma \in S_n$  die Gleichheit*

$$D_{v_n} (\dots D_{v_2} (D_{v_1} \varphi)) = D_{v_{\sigma(n)}} (\dots D_{v_{\sigma(2)}} (D_{v_{\sigma(1)}} \varphi)).$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 45.6. □

**KOROLLAR 45.13.** *Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung, so dass für  $1 \leq i, j \leq n$  die zweiten partiellen Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f$  und  $\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f$  existieren und stetig sind. Dann gilt*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f.$$

*Beweis.* Des folgt aus Satz 45.11 und Lemma 45.3. □