**Fachbereich Mathematik/Informatik** **29. März 2010**
**Prof. Dr. H. Brenner**

# Mathematik I

## Klausur

Dauer: 120 Minuten + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und auf jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ..........................................................................

Matrikelnummer: ..........................................................................

Ich erkäre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer per Aushang oder im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift: ..........................................................................

| Aufgabe: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| mögl. Pkt.: | 4 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 5 | 6 | 7 | 4 | 6 | 4 | 6 | 8 | 64 |
| erhalt. Pkt.: | | | | | | | | | | | | | | | |

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Ein *angeordneter* Körper $K$ (dabei muss weder Körper noch Ordnung definiert werden).
(2) Eine *Cauchy-Folge* in $\mathbb{R}$.
(3) Die *komplexe Konjugation*.
(4) Die *Stetigkeit* einer Abbildung
$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
(5) Die *lineare Unabhängigkeit* von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in einem $K$-Vektorraum $V$.
(6) Eine *lineare Abbildung*
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
zwischen zwei $K$-Vektorräumen $V$ und $W$.
(7) Die *geometrische Reihe*.
(8) Das *Taylor-Polynom* vom Grad $n$ zu einer $n$-mal differenzierbaren Funktion
$$f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{K}$.

AUFGABE 2. (2 Punkte)

Bestimme, welche der beiden rationalen Zahlen $p$ und $q$ größer ist:
$$p = \frac{573}{-1234} \text{ und } q = \frac{-2007}{4322}.$$

AUFGABE 3. (3 Punkte)

Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl
$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$
ein Vielfaches von 43 ist.

AUFGABE 4. (3 Punkte)

Es sei $K$ ein angeordneter Körper. Zeige, ausgehend von den Axiomen für einen angeordneten Körper, dass
$$1 > 0$$
gilt.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n},\ n \in \mathbb{N}_+ .$$

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Bestimme, für welche $x \in \mathbb{C}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2 + x & -x \\ -x^3 + 2x^2 + 5x - 1 & x^2 - x \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Aufgabe 7. (5 Punkte)

Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ v \longmapsto Mv.$$

Aufgabe 8. (6 (1+2+3) Punkte)

a) Formuliere den Satz von Cayley-Hamilton für eine $n \times n$-Matrix.

b) Bestätige durch Nachrechnen den Satz von Cayley-Hamilton für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} .$$

c) Beweise den Satz von Cayley-Hamilton für eine beliebige $2 \times 2$-Matrix.

AUFGABE 9. (7 Punkte)

Es sei $V$ ein Vektorraum und

$$v_1, \ldots, v_n$$

eine Familie von Vektoren in $V$. Zeige, dass die Familie genau dann eine Basis von $V$ bildet, wenn es sich um ein minimales Erzeugendensystem handelt (d.h. sobald man einen Vektor $v_i$ weglässt, liegt kein Erzeugendensystem mehr vor).

AUFGABE 10. (4 Punkte)

Sei $V$ der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq 4$ mit der Basis

$$x^i, 0 \leq i \leq 4.$$

Erstelle für die Ableitungsabbildung

$$\varphi : V \longrightarrow V,\ P \longmapsto P',$$

die beschreibende Matrix bzgl. dieser Basis.

Bestimme den Kern und das Bild dieser Abbildung sowie deren Dimensionen.

AUFGABE 11. (6 (4+2) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}.$$

a) Zeige, dass $f$ eine stetige Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ definiert.

b) Bestimme das Urbild $u$ von 0 unter $f$ sowie $f'(u)$ und $(f^{-1})'(0)$. Fertige eine grobe Skizze für die Umkehrfunktion $f^{-1}$ an.

AUFGABE 12. (4 Punkte)

Es seien

$$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(a) \geq g(a) \text{ und } f'(x) \geq g'(x) \text{ für alle } x \geq a\,.$$

Zeige, dass

$$f(x) \geq g(x) \text{ für alle } x \geq a \text{ gilt.}$$

Aufgabe 13. (6 (1+1+1+3) Punkte)

Es sei $M$ die Menge der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Definiere auf $M$ eine Relation durch

$$f \sim g \text{ falls } f(0) = g(0),\ f'(0) = g'(0) \text{ und } f''(1) = g''(1)\,.$$

a) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

b) Finde für jede Äquivalenzklasse dieser Äquivalenzrelation einen polynomialen Vertreter.

c) Zeige, dass diese Äquivalenzrelation mit der Addition von Funktionen verträglich ist.

d) Zeige, dass diese Äquivalenzrelation nicht mit der Multiplikation von Funktionen verträglich ist.

Aufgabe 14. (8 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum $(M, d)$. Es sei $H$ die Menge aller Häufungspunkte der Folge und

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup H\,.$$

Zeige, dass $A$ eine abgeschlossene Teilmenge von $M$ ist.