Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Zusatzaufgaben

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Eine n-Schokolade ist ein rechteckiges Raster, das durch $a-1$ Längsrillen und $b-1$ Querrillen in $n = a \cdot b$ ($a, b \in \mathbb{N}_+$) mundgerechte kleinere Rechtecke eingeteilt ist. Ein Teilungsschritt an einer Schokolade ist das vollständige Durchtrennen einer Schokolade längs einer Längs- oder Querrille. Eine vollständige Aufteilung einer Schokolade ist eine Folge von Teilungsschritten (an der Ausgangsschokolade oder an einer zuvor erhaltenen Zwischenschokolade), deren Endprodukt aus den einzelnen Mundgerechtecken besteht. Zeige durch Induktion, dass jede vollständige Aufteilung einer n-Schokolade aus genau $n-1$ Teilungsschritten besteht.

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Es seien M und N zwei Mengen und sei $T \subseteq M \times N$ eine Teilmenge. Zu $x \in M$ sei $T(x) = \{y \in N |\, (x, y) \in T\}$. Zeige, dass $\{x\} \times T(x)$ die Faser der Hintereinanderschaltung

$$T \hookrightarrow M \times N \xrightarrow{p_1} M$$

über x ist.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Berechne durch geeignete Substitutionen eine Stammfunktion zu

$$\sqrt{4x^2 + 2x + 3}\,.$$

Aufgabe 4. (5 Punkte)

Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von $\frac{X}{(X+2)(X+1)(X-1)(X-2)}$.

Aufgabe 5. (7 Punkte)

Berechne das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3}\, dt\,.$$

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung ($y > 0$)

$$y' = t^5 y^2$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen. Was ist der Definitionsbereich der Lösungen?

Aufgabe 7. (6 Punkte)

Bestätige die Kettenregel anhand der beiden Abbildungen

$$\varphi : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3,\ (u,v) \longmapsto (u^2v^2, u + \sin v\,, v^3),$$

und

$$\psi : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (x^2y - z^2, xy^2 + yz \exp x),$$

und ihrer Komposition $\psi \circ \varphi$ in folgenden Schritten.

(1) Berechne für einen beliebigen Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ das Differential $(D\varphi)_P$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(2) Berechne für einen beliebigen Punkt $Q \in \mathbb{K}^3$ das Differential $(D\psi)_Q$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(3) Berechne explizit die Komposition $\psi \circ \varphi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$.
(4) Berechne direkt mit partiellen Ableitungen in einem Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ das Differential von $\psi \circ \varphi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$.
(5) Berechne das Differential von $\psi \circ \varphi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ in einem Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ mit Hilfe der Kettenregel und den Teilen (1) und (2).

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto 4x^2 - xy + 5y^2,$$

auf Extrema.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ (u,v) \longmapsto \left(\frac{-u}{u^2+v^2}, \frac{-v}{u^2+v^2}\right),$$

ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 10. (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto (\sin xy\,, yz\cos(x^2), e^{xyz}).$$

Zeige, dass φ im Punkt $P = (1,\pi,1)$ lokal umkehrbar ist, und bestimme das totale Differential der Umkehrabbildung im Punkt $Q = \varphi(P)$.