Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 26

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Alle Springmäuse leben in $\mathbb{Z}^2$ und verfügen über zwei Sprünge, nämlich den Sprung $\pm(3,4)$ und den Sprung $\pm(5,2)$. Wie viele Springmaus-Populationen gibt es? Die Springmäuse Albert, Beate, Erich, Heinz, Sabine und Frida sitzen in den Positionen

$$(14,11),\ (13,15),\ (17,12),\ (15,19),\ (16,16) \text{ und } (12,20)\,.$$

Welche Springmäuse können sich begegnen?

Aufgabe 2. (6 Punkte)

Skizziere zm Gitter $\mathbb{Z}^2$ in $\mathbb{R}^2$ drei Teilmengen, die die Maßbedingung des Gitterpunksatzes von Minkowski erfüllen, die den Nullpunkt, aber keine weitere Gitterpunkte enthalten, und die jeweils zwei der drei Bedingungen konvex, kompakt und zentralsymmetrisch erfüllen.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Zeige, dass der Durchschnitt von konvexen Mengen wieder konvex ist.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Charakterisiere die Restklassengruppe eines Gitters Γ im $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Kopiere die Abschätzungskette

$\operatorname{Vol}(\mathfrak{N}) \ \geq\ \operatorname{Vol}(X \cup Y \cup B) \ =\ \operatorname{Vol}(\bigcup_{i\in I} \tilde{T}_i) + \operatorname{Vol}(B) \ >\ \sum_{i\in I} \operatorname{Vol}(\tilde{T}_i) \ =\ \sum_{i\in I} \operatorname{Vol}(T_i) \ =\ \operatorname{Vol}(T) \ \geq\ 2^n \operatorname{Vol}(\mathfrak{M}) \ =\ \operatorname{Vol}(\mathfrak{N})\,.$

auf deine Benutzerseite und begründe in den vorgesehenen Links die einzelnen Abschätzungen.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Sei U eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass ein Punkt $Q \in \mathbb{R}^n$ genau dann zur konvexen Hülle von U gehört, wenn es endlich viele Punkte $P_i \in U$, $i \in I$, gibt und reelle Zahlen r_i, $i \in I$, mit $r_i \in [0,1]$, $\sum_{i\in I} r_i = 1$ und mit

$$Q = \sum_{i\in I} r_i P_i\,.$$