Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 21

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 21.1. Bestimme die Ableitungen von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus.

Aufgabe 21.2. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2 \cdot \exp(x^3 - 4x).$$

Aufgabe 21.3. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Aufgabe 21.4. Bestimme die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion unter Verwendung von Satz 21.1.

Aufgabe 21.5. Bestimme die 1034871-te Ableitung der Sinusfunktion.

Aufgabe 21.6. Bestimme für die folgenden Funktionen, ob der Funktionslimes existiert und welchen Wert er gegebenenfalls annimmt.

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$,
(2) $\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2}{x}$,
(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2}$,
(4) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x}$.

Aufgabe 21.7. Bestimme für die folgenden Funktionen, ob der Funktionslimes für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \to 0$, existiert und welchen Wert er gegebenenfalls annimmt.

(1) $\sin \frac{1}{x}$,
(2) $x \cdot \sin \frac{1}{x}$,
(3) $\frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x}$.

Aufgabe 21.8. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sin(\cos x).$$

Aufgabe 21.9. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto (\sin x)(\cos x).$$

Aufgabe 21.10. Bestimme für $n \in \mathbb{N}$ die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto (\sin x)^n.$$

Aufgabe 21.11. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Aufgabe 21.12. Zeige, dass die reelle Sinusfunktion eine bijektive, streng wachsende Funktion

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert, und dass die reelle Kosinusfunktion eine bijektive, streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert.

Aufgabe 21.13.*

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n},\ n \in \mathbb{N}_+\,.$$

Aufgabe 21.14. Bestimme die Ableitungen von Arcus-Sinus und Arcus-Kosinus.

Aufgabe 21.15.*

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}.$$

a) Zeige, dass f eine stetige Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ definiert.

b) Bestimme das Urbild u von 0 unter f sowie $f'(u)$ und $(f^{-1})'(0)$. Fertige eine grobe Skizze für die Umkehrfunktion f^{-1} an.

Aufgabe 21.16.*

Es seien
$$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
zwei differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Es gelte
$$f(a) \geq g(a) \text{ und } f'(x) \geq g'(x) \text{ für alle } x \geq a\,.$$
Zeige, dass
$$f(x) \geq g(x) \text{ für alle } x \geq a \text{ gilt}\,.$$

Aufgabe 21.17.*

Wir betrachten die Funktion
$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

a) Untersuche das Monotonieverhalten dieser Funktion.

b) Zeige, dass diese Funktion injektiv ist.

c) Bestimme das Bild von f.

d) Man gebe die Umkehrfunktion auf dem Bild zu dieser Funktion an.

e) Skizziere den Funktionsgraphen von f.

Aufgabe 21.18.*

Betrachte die Funktion
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = (2x+3)e^{-x^2}.$$
Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f. Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

Aufgabe 21.19. Diskutiere den Funktionsverlauf von
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = e^{-2x} - 2e^{-x}.$$
Bestimme insbesondere das Monotonieverhalten, Extrema von f, $\lim_{x \to \infty} f(x)$ und ebenso für die Ableitung f'.

Aufgabe 21.20. Zeige, dass die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \in]0,1], \\ 0 \text{ für } x = 0, \end{cases}$$
stetig ist und unendlich viele Nullstellen besitzt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.21. (3 Punkte)

Bestimme die linearen Funktionen, die tangential zur Exponentialfunktion sind.

Aufgabe 21.22. (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^x .$$

Die folgende Aufgabe soll ohne Bezug auf die zweite Ableitung gelöst werden.

Aufgabe 21.23. (4 Punkte)

Bestimme die Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \sin x + \cos x .$$

Aufgabe 21.24. (6 Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion vom Grad $d \geq 1$. Es sei m die Anzahl der lokalen Maxima von f und n die Anzahl der lokalen Minima von f. Zeige, dass bei d ungerade $m = n$ und bei d gerade $|m - n| = 1$ ist.