Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Vorlesung 53

In dieser Vorlesung werden wir wesentliche Hilfsmittel für den Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf bereit stellen und ihn anschließend beweisen.

Supremumsnorm und Abbildungsräume

Wir erinnern an die Definition der Supremumsnorm.

Es sei T eine Menge und
$$f : T \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Funktion. Dann nennt man
$$\| f \| := \| f \|_T = \sup \left(| f(x) |, x \in T \right)$$
das *Supremum* (oder die *Supremumsnorm*) von f. Es ist eine nichtnegative reelle Zahl oder ∞.

Diese Definition kann man direkt verallgemeinern, wenn die Werte der Abbildungen in einem euklidischen Vektorraum liegen. Es sei also T eine Menge und E sei ein euklidischer Vektorraum. In dieser Situation definiert man zu einer Abbildung
$$f : T \longrightarrow E$$
$$\| f \| := \| f \|_T = \sup \left(\| f(x) \|, x \in T \right)$$
und nennt dies das *Supremum* (oder die *Supremumsnorm*) von f (falls das Supremum nicht existiert, ist dies als ∞ zu interpretieren).

Wir setzen $M = \operatorname{Abb}(T, E)$; dies ist ein (i.A. unendlichdimensionaler) reeller Vektorraum. Die Supremumsnorm erfüllt die folgenden Eigenschaften.

(1) $\| f \| \geq 0$ für alle $f \in M$.
(2) $\| f \| = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist.
(3) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in M$ gilt
$$\| \lambda f \| = | \lambda | \cdot \| f \| \; .$$
(4) Für $g, f \in M$ gilt
$$\| g + f \| \leq \| g \| + \| f \| \; .$$

Wenn T ein metrischer Raum ist, so betrachtet man
$$C = \{ f : T \to E \,|\, f \text{ stetig} \} \, .$$

Dieser ist ein reeller Untervektorraum von M. Wenn $T \subseteq \mathbb{R}^k$ nichtleer, abgeschlossen und beschränkt ist, so ist nach Satz 22.7 das Supremum von $\| f(x) \|$, $x \in T$, gleich dem Maximum, d.h. es gibt ein $x \in T$ derart, dass

$\|f(x')\| \leq \|f(x)\|$ für alle $x' \in T$ gilt. Daher ist in diesem Fall das Supremum stets eine reelle Zahl, und stimmt mit dem Maximum überein. Man spricht daher auch von der *Maximumsnorm.*

SATZ 53.1. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^k$ eine kompakte Teilmenge, es sei E ein euklidischer Vektorraum und es sei*

$$C = C(T, E)$$

die Vektorraum der stetigen Abbildungen von T nach E. Dann ist C, versehen mit der Maximumsnorm, ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis. Es sei

$$f_n : T \longrightarrow E$$

eine Cauchy-Folge von stetigen Abbildungen. Wir müssen zeigen, dass diese Folge gegen eine Grenzabbildung konvergiert, die ebenfalls stetig ist. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$\| f_n(x) - f_m(x) \| \leq \epsilon$$

für alle $x \in T$ gilt. Daher ist für jedes $x \in T$ die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in E und daher, wegen der Vollständigkeit von euklidischen Räumen, konvergent in E. Wir nennen den Grenzwert dieser Folge $f(x)$, so dass sich insgesamt eine Grenzabbildung

$$f : T \longrightarrow E,\ x \longmapsto f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

ergibt, gegen die die Funktionenfolge punktweise konvergiert. Da es zu einem vorgegebenem $\epsilon > 0$ stets ein n_0 gibt derart, dass die Cauchy-Bedingung für alle $x \in T$ gilt, konvergiert die Funktionenfolge sogar gleichmäßig gegen f (und das bedeutet die Konvergenz in der Supremumsnorm). Aufgrund von Satz 22.11 ist daher f stetig und daher ist $f \in C$. □

Integration von stetigen Wegen

Für eine stetige Kurve

$$g : I \longrightarrow V$$

in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum definieren wir für $a, b \in I$ das *Integral* $\int_a^b g(s)ds$ komponentenweise, d.h. man wählt eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V und drückt die stetige Kurve durch ihre Komponentenfunktionen $g_1, \ldots, g_n$ aus. Dann setzt man

$$\int_a^b g(s)ds := \left(\int_a^b g_1(s)ds\right)v_1 + \ldots + \left(\int_a^b g_n(s)ds\right)v_n\,.$$

Das Ergebnis ist ein Vektor in V, der unabhängig von der gewählten Basis ist. Wenn man die untere Intervallgrenze a fixiert und die obere Intervallgrenze $b = t$ variiert, so bekommt man eine *Integralkurve*

$$I \longrightarrow V,\ t \longmapsto \int_a^t g(s)\, ds.$$

Diese Integralkurve kann man wieder ableiten und erhält die Ausgangskurve zurück, d.h. es gilt wieder der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.

Es gilt die folgende Integralabschätzung.

Satz 53.2. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum und*

$$g : [a, b] \longrightarrow V$$

eine stetige Abbildung. Dann gilt

$$|| \int_a^b g(t)\, dt \, || \leq \int_a^b || g(t) || \; dt .$$

Beweis. Wenn $\int_a^b g(t)\, dt = 0$ ist, so ist nichts zu zeigen. Sei also

$$\int_a^b g(t)\, dt \;=\; v \;\neq\; 0 .$$

Es sei $u_1 = \frac{v}{||v||}$. Das ergänzen wir zu einer Orthonormalbasis $u_1, u_2, \ldots, u_n$ von V. Es seien $g_1, g_2, \ldots, g_n$ die Koordinatenfunktionen von g bzgl. dieser Basis. Dann besteht aufgrund unserer Basiswahl die Beziehung

$$\begin{aligned} v &= \int_a^b g(t)\, dt \\ &= (\int_a^b g_1(t)\, dt) u_1 + \ldots + (\int_a^b g_n(t)\, dt) u_n \\ &= (\int_a^b g_1(t)\, dt) u_1 . \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} || \int_a^b g(t)\, dt \, || &= || \int_a^b g_1(t)\, dt \, || \\ &\leq \int_a^b || g_1(t) || \; dt \\ &\leq \int_a^b \sqrt{(g_1(t))^2 + \ldots + (g_n(t))^2}\, dt \\ &= \int_a^b || g_1(t) u_1 + \ldots + g_n(t) u_n || \; dt \\ &= \int_a^b || g(t) || \; dt . \end{aligned}$$

□

Differential- und Integralgleichungen

Mit dem Begriff des Integrals einer Kurve kann man Differentialgleichungen auch als Integralgleichungen schreiben.

Lemma 53.3. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und*

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein stetiges Vektorfeld auf U. Es sei $(t_0, w) \in I \times U$ vorgegeben. Dann ist eine stetige Abbildung

$$v : J \longrightarrow V,\ t \longmapsto v(t),$$

auf einem Intervall $J \subseteq I$ mit $t_0 \in J$ genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w\,,$$

wenn v die Integralgleichung

$$v(t) = w + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\, ds$$

erfüllt.

Beweis. Sei die Integralbedingung erfüllt. Dann ist $v(t_0) = w$ und aufgrund des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung gilt $v'(t) = f(t, v(t))$. Insbesondere sichert die Integralbedingung, dass v differenzierbar ist.Wenn umgekehrt v eine Lösung des Anfangswertproblems ist, so ist $v'(s) = f(s, v(s))$ und daher

$$w + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\, ds \;=\; w + \int_{t_0}^{t} v'(s)\, ds \;=\; w + v(t) - v(t_0) \;=\; v(t).$$

$\square$

Der Satz von Picard-Lindelöf

Wir kommen nun zum wichtigsten Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Satz 53.4. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und*

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U. Es sei vorausgesetzt, dass dieses Vektorfeld stetig sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es zu jedem $(t_0, w) \in I \times U$ ein offenes Intervall J mit $t_0 \in J \subseteq I$ derart, dass auf diesem Intervall eine eindeutige Lösung für das Anfangswertproblem

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w$$

existiert.

Beweis. Nach Lemma 53.3 ist eine stetige Abbildung

$$v : J \longrightarrow V$$

eine Lösung des Anfangswertproblems genau dann, wenn v die Integralgleichung

$$v(t) = w + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\, ds$$

erfüllt. Wir wollen die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für diese Integralgleichung unter Verwendung des Banachschen Fixpunktsatzes dadurch erweisen, dass wir für die Abbildung (man spricht von einem *Funktional*)

$$\psi \longmapsto (t \mapsto w + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))\, ds)$$

einen Fixpunkt finden. Hierbei stehen links und rechts Abbildungen in t (aus einem gewissen Teilintervall von I mit Werten in V.) mit Werten in V. Um den Fixpunktsatz anwenden zu können müssen wir ein Definitionsintervall festlegen, und eine Metrik auf dem Abbildungsraum nach V definieren, diesen metrischen Raum dann als vollständig und das Funktional als stark kontrahierend nachweisen. Aufgrund der Voraussetzung über die lokale Lipschitz-Bedingung gibt es eine offene Umgebung

$$(t_0, w) \in J' \times U(w, \epsilon) \subseteq I \times U$$

und ein $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$|| f(t, v) - f(t, \tilde{v}) || \leq L \, || v - \tilde{v} || \;\text{ für alle } t \in J' \text{ und } v, \tilde{v} \in U(w, \epsilon)\,.$$

Durch Verkleinern der Radien können wir annehmen, dass der Abschluss von $J' \times U(w, \epsilon)$, also das Produkt des abgeschlossenen Intervalls mit der abgeschlossenen Kugel, ebenfalls in $I \times U$ liegt. Aufgrund von Satz 22.7 gibt es ein $M \in \mathbb{R}_+$ mit

$$|| f(t, v) || \leq M \text{ für alle } (t, v) \in J' \times U(w, \epsilon)$$

(da diese Beschränktheit auf dem Abschluss gilt). Wir ersetzen nun J' durch ein kleineres Intervall $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq J'$ mit $\delta > 0$, $\delta \leq \epsilon/M$ und $\delta \leq 1/2L$. Wir betrachten nun die Menge der stetigen Abbildungen[1]

$$\begin{aligned} C &= \{\psi : J \to V |\, \psi \text{ stetig}, || \psi(t) - w || \leq \epsilon \text{ für alle } t \in J\} \\ &= \{\psi : J \to V |\, \psi \text{ stetig}, || \psi - w || \leq \epsilon\}. \end{aligned}$$

Dabei wird also C mit der Maximumsnorm auf J versehen. Dieser Raum ist nach Satz 53.1 und nach Aufgabe 49.12 wieder ein vollständiger metrischer Raum. Wir betrachten nun auf diesem konstruierten Intervall J bzw. der zugehörigen Menge C die Abbildung

$$H : C \longrightarrow C,\; \psi \longmapsto H(\psi) = (t \mapsto w + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))\, ds).$$

[1] Dabei fassen wir $w \in U$ als konstante Abbildung $J \to U$ auf.

Dazu müssen wir zunächst zeigen, dass $H(\psi)$ wieder zu C gehört. Für $t \in J$ ist aber nach Satz 53.2

$$\begin{aligned} ||\,H(\psi)(t) - w\,|| &= ||\int_{t_0}^{t} f(s,\psi(s))\,ds\,|| \\ &\leq |\int_{t_0}^{t} ||\,f(s,\psi(s))\,||\;ds\,| \\ &\leq |\,t - t_0\,|\;M \\ &\leq \frac{\epsilon}{M}M \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

und $H(\psi)$ ist stetig, da es durch ein Integral definiert wird. Zum Nachweis der Kontraktionseigenschaft seien $\psi_1, \psi_2 \in C$ gegeben. Für ein $t \in J$ ist

$$\begin{aligned} ||\,H(\psi_1)(t) - H(\psi_2)(t)\,|| &= ||\int_{t_0}^{t} f(s,\psi_1(s))\,ds - \int_{t_0}^{t} f(s,\psi_2(s))\,ds\,|| \\ &= ||\int_{t_0}^{t} (f(s,\psi_1(s)) - f(s,\psi_2(s)))\,ds\,|| \\ &\leq |\int_{t_0}^{t} ||\,f(s,\psi_1(s)) - f(s,\psi_2(s))\,||\;ds\,| \\ &\leq |\int_{t_0}^{t} L\;||\,\psi_1(s) - \psi_2(s)\,||\;ds\,| \\ &= L\cdot|\int_{t_0}^{t} ||\,\psi_1(s) - \psi_2(s)\,||\;ds\,| \\ &\leq L\cdot|\int_{t_0}^{t} ||\,\psi_1 - \psi_2\,||\;ds\,| \\ &\leq L\,|\,t - t_0\,|\cdot||\,\psi_1 - \psi_2\,|| \\ &\leq \frac{1}{2}\,||\,\psi_1 - \psi_2\,||\,. \end{aligned}$$

Da dies für jedes $t \in J$ gilt, folgt aus dieser Abschätzung direkt

$$||\,H(\psi_1) - H(\psi_2)\,|| \leq \frac{1}{2}\,||\,\psi_1 - \psi_2\,||,$$

d.h. es liegt eine starke Kontraktion vor. Daher besitzt H ein eindeutiges Fixelement $\psi \in C$, und diese Abbildung löst die Differentialgleichung. Dies gilt dann erst recht auf jedem offenen Teilintervall von J. Damit haben wir insbesondere bewiesen, dass es in C nur eine Lösung geben kann, wir wollen aber generell auf dem Intervall J Eindeutigkeit erhalten. Für eine Lösung $v : J \to V$ gilt aber wegen der Integralbeziehung wieder

$$v(t) = w + \int_{t_0}^{t} f(s,v(s))ds$$

und die gleichen Abschätzungen wie weiter oben zeigen, dass die Lösung zu C gehören muss. □