**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2010**

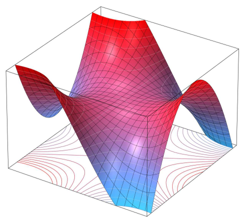
# Mathematik II

## Vorlesung 42

Wir wenden uns nun der Differentialrechnung zu für Abbildungen, wo der Definitionsbereich höherdimensional ist. Dazu seien zwei reelle (oder komplexe) endlichdimensionale Vektorräume $V$ und $W$ gegeben. Ferner sei $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge und

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Diese Abbildung wollen wir „differenzieren". Anders als in den bisher behandelten Situationen gibt es bei einem höherdimensionalen Definitionsbereich mehrere nicht äquivalente Konzepte von Differenzierbarkeit. Wir werden nacheinander die *Richtungsableitung*, *partielle Ableitungen* und das *totale Differential* sowie ihre Beziehungen untereinander diskutieren. Wir werden durchgehend voraussetzen, dass die Vektorräume euklidisch sind. Bei komplexen Vektorräumen soll der zugrunde liegende reelle Vektorraum mit einem (reellen) Skalarprodukt und damit mit einer euklidischen Metrik versehen sein.



Es ist erstmal keine Einschränkung, wenn man sich auf reelle Vektorräume beschränkt und überdies den Zielraum als $W = \mathbb{R}$ ansetzt. Als Definitionsmenge kann man sich zunächst auf $G = \mathbb{R}^2 = V$ beschränken, und sich vorstellen, dass die Abbildung jedem Grundpunkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ einen Höhepunkt zuordnet, so dass die Abbildung insgesamt ein Gebirge über einer Grundfläche beschreibt.

## Richtungsableitung

Wir stellen uns vor, wir sind an einem Ort im Gebirge und entschließen uns, in eine bestimmte Richtung, bspw. nach Nordwest zu gehen, egal was kommen mag. Damit machen wir sämtliche Steigungen und Abhänge mit, die das Gebirge uns in dieser vorgegebenen Richtung bietet. Dabei lernen wir nur den Höhenverlauf des Gebirges entlang dieses linearen Ausschnitts kennen. Durch die gewählte Richtung bewegen wir uns auf dem Graphen zu einer Funktion in einer einzigen Variablen, nämlich einer Variablen der Grundgeraden. Dies ist die Grundidee der *Richtungsableitung*.

Definition 42.1. Seien $V$ und $W$ euklidische Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge, und $\varphi : G \to W$ eine Abbildung. Weiter sei $P \in G$ ein Punkt und $v \in V$ ein fixierter Vektor. Dann heißt $\varphi$ *differenzierbar in $P$ in Richtung $v$*, falls der Grenzwert

$$\lim_{s \to 0, s \neq 0} \frac{\varphi(P+sv) - \varphi(P)}{s}$$

existiert. In diesem Fall heißt dieser Grenzwert *die Ableitung von $\varphi$ in $P$ in Richtung $v$*. Er wird mit

$$(D_v \varphi)_P$$

bezeichnet.

Die Existenz von $(D_v\varphi)_P$ hängt nur von der Abbildung $\mathbb{K} \supseteq U(0, \delta) \to W$, $s \mapsto \varphi(P + sv)$, ab (wobei das Intervall $U(0, \delta)$ (im reellen Fall) bzw. der offene Ball (im komplexen Fall) so gewählt ist, dass $s \in U(0, \delta)$ auch $P + sv \in G$ impliziert. D.h. dass $U(P, \delta) \subseteq G$ gilt). Die Richtungsableitung in einem Punkt und in eine Richtung ist selbst ein Vektor in $W$. Bei $W = \mathbb{K}$ ist die Richtungsableitung eine reelle oder komplexe Zahl.

Beispiel 42.2. Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\ (x, y) \longmapsto x^2 y,$$

in einem Punkt $P = (a_1, a_2)$ in Richtung $v = (v_1, v_2)$. Der Differenzenquotient ist

$$\begin{aligned}
&\frac{f(P+sv) - f(P)}{s} \\
=&\frac{f((a_1 + sv_1, a_2 + sv_2)) - f((a_1, a_2))}{s} \\
=&\frac{f((a_1 + sv_1, a_2 + sv_2)) - f((a_1, a_2))}{s} \\
=&\frac{a_1^2 a_2 + 2sa_1a_2v_1 + s^2a_2v_1^2 + sa_1^2v_2 + 2s^2a_1v_1v_2 + s^3v_1^2v_2 - a_1^2a_2}{s} \\
=&2a_1a_2v_1 + a_1^2v_2 + s(a_2v_1^2 + 2a_1v_1v_2) + s^2(v_1^2v_2).
\end{aligned}$$

Für $s \to 0$ gehen die beiden hinteren Summanden gegen 0, so dass sich insgesamt

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(P+sv)-f(P)}{s} = 2a_1a_2v_1 + a_1^2 v_2$$

ergibt.

Im Punkt $P = (2,5)$ ergibt sich in Richtung $v = (1,-3)$ beispielsweise die Richtungsableitung

$$2\cdot 2\cdot 5\cdot 1 + 2^2 \cdot (-3) = 8.$$

Beispiel 42.3. Seien $V$ und $W$ endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei

$$L : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann existiert die Richtungsableitung in jedem Punkt $P \in V$ und in jede Richtung $v \in V$, und zwar ist

$$(D_vL)_P = L(v),$$

insbesondere ist also die Richtungsableitung unabhängig vom Punkt. Dies folgt direkt durch Betrachten des Differenzenquotienten; es ist nämlich

$$\frac{L(P+sv)-L(P)}{s} = \frac{L(P)+sL(v)-L(P)}{s} = \frac{sL(v)}{s} = L(v).$$

Daher ist auch der Limes für $s \to 0$ gleich $L(v)$.

Lemma 42.4. *Seien $V$ und $W$ euklidische Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ ein Punkt, $v \in V$ ein Vektor und seien*

$$f, g : G \longrightarrow W$$

*Abbildungen, die im Punkt $P$ in Richtung $v$ differenzierbar seien. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Summe $f+g$ ist ebenfalls differenzierbar in Richtung $v$ mit*
$$(D_v(f+g))_P = (D_vf)_P + (D_vg)_P\,.$$
(2) *Das Produkt $af$ mit $a \in \mathbb{K}$ ist ebenfalls differenzierbar in Richtung $v$ mit*
$$(D_v(af))_P = a(D_vf)_P\,.$$
(3) *Die Funktion $f$ ist auch in Richtung $cv$ mit $c \in \mathbb{K}$ differenzierbar und es gilt $(D_{cv}f)_P = c(D_vf)_P$.*

*Beweis.* Die Eigenschaften (1) und (2) ergeben sich aus den entsprechenden Eigenschaften für Limiten von Abbildungen, siehe Lemma 23.6. Die Eigenschaft (3) folgt aus Aufgabe 42.13. □

Im Rahmen der Theorie des totalen Differentials wird die Frage beantwortet, wie sich die Richtungsableitungen zu verschiedenen Richtungen zueinander verhalten. Wenn im Werteraum eine Basis gegeben ist, so kann man die Richtungsableitung komponentenweise bestimmen.

Lemma 42.5. *Seien $V$ und $W$ euklidische Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ ein Punkt und sei $v \in V$ ein Vektor. Es sei*

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

*eine Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Es sei $W$ der Produktraum*

$$W = W_1 \times \cdots \times W_k$$

*aus euklidischen Vektorräumen $W_1, \ldots, W_k$ (versehen mit dem Produkt der einzelnen Skalarprodukte). Dann ist $\varphi$ genau dann in $P$ differenzierbar in Richtung $v$, wenn sämtliche Komponentenabbildungen*

$$\varphi_i : G \longrightarrow W_i$$

*in $P$ in Richtung $v$ differenzierbar sind. In diesem Fall gilt*

$$(D_v\varphi)_P = ((D_v\varphi_1)_P, \ldots, (D_v\varphi_k)_P)$$

(2) *Es sei $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis von $W$ mit den Koordinaten*

$$y_j : W \longrightarrow \mathbb{K}.$$

*Dann ist $\varphi$ in $P$ in Richtung $v$ genau dann differenzierbar, wenn sämtliche Komponentenfunktionen*

$$f_j = y_j \circ \varphi : G \longrightarrow \mathbb{K}$$

*in $P$ in Richtung $v$ differenzierbar sind. In diesem Fall ist*

$$(D_v\varphi)_P = ((D_vf_1)_P, \ldots, (D_vf_n)_P)\,.$$

*Beweis.* Die erste Aussage folgt aus der zweiten, wenn man für die einzelnen Vektorräume $W_j$ Basen einführt (umgekehrt ist auch der zweite Teil ein Spezialfall des ersten). Die zweite Aussage folgt aus allgemeinen Limeseigenschaften oder aus Lemma 40.4 in Verbindung mit Aufgabe 42.3. $\square$

Aufgrund von diesem Lemma muss man vor allem die Richtungsableitung für den Fall verstehen, wo der Wertebereich gleich $\mathbb{K}$ ist.

Das folgende einfache Beispiel zeigt, dass durchaus alle Richtungsableitungen existieren können, die Abbildung selbst aber noch nicht einmal stetig sein muss.

Beispiel 42.6. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} \text{ für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 \text{ für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Für einen Vektor $v \neq 0$, $v = (a,b)$, und einen reellen Parameter $s$ erhalten wir auf dem linearen Unterraum $\mathbb{R}v$ die Funktion

$$f_v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ s \longmapsto f(sa,sb) = \frac{sas^3b^3}{s^2a^2+s^6b^6} = \frac{s^2ab^3}{a^2+s^4b^6}.$$

Für $a \neq 0$ ist der Nenner stets positiv und die Funktion $f_v$ ist stetig mit dem Wert 0 bei $s = 0$, und differenzierbar. Für $a = 0$ ist die Funktion $f_v$ konstant $= 0$ und damit ebenfalls differenzierbar. Also existieren in 0 alle Richtungsableitungen. Die Funktion ist allerdings nicht stetig: Für die Folge $(1/m^3, 1/m)$ (die gegen $0 = (0,0)$ konvergiert) gilt

$$f(1/m^3, 1/m) = \frac{(1/m^3)(1/m^3)}{(1/m^6) + (1/m^6)} = \frac{1}{2}\,,$$

aber $f(0,0) = 0$.

Im Allgemeinen möchte man nicht nur in einem einzigen Punkt $P \in V$ ableiten können, sondern in jedem Punkt, was durch die folgende naheliegende Definition präzisiert wird.

Definition 42.7. Seien $V$ und $W$ euklidische Vektorräume, sei $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge, sei $\varphi : G \to W$ eine Abbildung und $v \in V$ ein fixierter Vektor. Dann heißt $\varphi$ *differenzierbar in Richtung* $v$, falls $\varphi$ in jedem Punkt $P \in G$ in Richtung $v$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Abbildung

$$D_v\varphi : G \longrightarrow W,\ P \longmapsto (D_v\varphi)_P,$$

die *Richtungsableitung* von $\varphi$ in Richtung $v$.

Die Richtungsableitung zu einem fixierten Vektor ist also vom selben Typ wie die Ausgangsabbildung.

## Polynomiale Funktionen

Wir haben schon Polynome in ein und in zwei Variablen verwendet. Die folgende Definition verwendet Multiindex-Schreibweise, um Polynomfunktionen in beliebig (endlich) vielen Variablen einzuführen. Dabei steht ein Index $\nu$ für ein Tupel

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$$

und für Variablen $x_1, \ldots, x_n$ verwendet man die Schreibweise

$$x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}\,.$$

Definition 42.8. Eine Funktion

$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n),$$

die man als eine endliche Summe der Form

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n}$$

mit $a_\nu \in \mathbb{K}$ schreiben kann, heißt *polynomiale Funktion*.

Offenbar sind due Summe und die Produkte von polynomialen Funktionen wieder polynomial. Dies gilt auch, wenn man Polynome in andere Polynome einsetzt.

Beispiel 42.9. Wir betrachten die polynomiale Funktion

$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K},\ (x_1, \ldots , x_n) \longmapsto x_1 \cdots x_n.$$

Die Richtungsableitung in Richtung $v = (v_1, \ldots , v_n)$ in einem beliebigen Punkt $P = (x_1, \ldots , x_n)$ ergibt sich durch Betrachten des Differenzenquotienten, also

$$\begin{aligned} & \frac{(x_1 + sv_1) \cdot (x + sv_2) \cdots (x_n + sv_n) - x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{s} \\ = & \frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n + s(\sum_{i=1}^n v_i \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i}) + s^2 g(s, x_1, \ldots , x_n, v_1, \ldots , v_n) - x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{s} \\ = & \sum_{i=1}^n v_i \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i} + s \cdot g(s, x_1, \ldots , x_n, v_1, \ldots , v_n). \end{aligned}$$

$g(s, x_1, \ldots , x_n, v_1, \ldots , v_n)$ eine polynomiale Funktion in $s$ (die $x_1, \ldots , x_n$ und die $v_1, \ldots , v_n$ sind fixierte Zahlen). Der Limes von $s \cdot g(s, x_1, \ldots , x_n, v_1, \ldots , v_n)$ geht für $s \to 0$ gegen 0. Daher ist

$$(D_v f)_P = \sum_{i=1}^n v_i \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i}.$$

In den Aufgaben werden wir sehen, dass die Richtungsableitnug zu einer polynomialen Funktion in jede Richtung existiert und selbst wieder polynomial ist. Dies wird sich auch einfach im Rahmen des totalen Differentials ergeben.

## Abbildungsverzeichnis