Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 23

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 23.1. Zeige die Gleichheit $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Aufgabe 23.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass

$$\overline{T} = T \cup \operatorname{Rand}(T)$$

ist.

Aufgabe 23.3. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass

$$\overline{T} = \bigcap_{T \subseteq A,\, A \text{ abgeschlossen}} A$$

ist.

Aufgabe 23.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Es sei T zusammenhängend. Zeige, dass auch der Abschluss $\overline{T}$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 23.5. Zeige, dass der Grenzwert einer Funktion in einem Berührpunkt der Definitionsmenge im Falle der Existenz eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 23.6. Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq X$ eine Teilmenge und sei $a \in X$ ein Berührpunkt von T. Es seien $f : T \to \mathbb{K}$ und $g : T \to \mathbb{K}$ Funktionen derart, dass die Grenzwerte $\lim_{x \to a} f(x)$ und $\lim_{x \to a} g(x)$ existieren. Zeige, dass die folgenden Beziehungen gelten.

(1) Die Summe $f + g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist
$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) .$$
(2) Das Produkt $f \cdot g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist
$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) .$$

(3) Es sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in T$ und $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$. Dann besitzt der Quotient f/g einen Grenzwert in a, und zwar ist
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} .$$

Aufgabe 23.7. Es sei
$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetige Funktion. Zeige, dass es eine stetige Fortsetzung
$$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
von f gibt.

Aufgabe 23.8. Man gebe ein Beispiel einer gleichmäßig stetigen Funktion
$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
derart, dass keine stetige Fortsetzung
$$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
existiert.

Aufgabe 23.9. Sei $b > 0$ eine reelle Zahl. Zeige, dass die durch
$$b^{1/k}$$
definierte Folge gegen 1 konvergiert.

Aufgabe 23.10. Es sei b eine positive reelle Zahl und $q = n/m \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass die durch
$$b^q := (b^n)^{1/m}$$
definierte Zahl unabhängig von der Bruchdarstellung für q ist.

Aufgabe 23.11. Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Funktion
$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},\ q \longmapsto b^q,$$
folgende Eigenschaften besitzt.

(1) Es ist $b^{q+q'} = b^q \cdot b^{q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.
(2) Es ist $(b^q)^{q'} = b^{q \cdot q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.
(3) Für $b > 1$ ist f streng wachsend.
(4) Für $b < 1$ ist f streng fallend.
(5) Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^q = a^q \cdot b^q$.

Aufgabe 23.12. Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Exponentialfunktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto b^x,$$

folgende Eigenschaften besitzt.

(1) Es ist $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
(2) Es ist $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
(3) Für $b > 1$ ist f streng wachsend.
(4) Für $b < 1$ ist f streng fallend.
(5) Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.

Aufgabe 23.13. Es sei $b > 0$, $b \neq 1$. Definiere die *reellen Logarithmen* zur Basis b als Umkehrfunktionen zu den reellen Exponentialfunktionen und formuliere deren wichtigste Eigenschaften.

Aufgabe 23.14. Definiere für eine Folge in einem metrischen Raum den Begriff *Cauchy-Folge*. Was ist ein *vollständiger metrischer Raum*?

Aufgabe 23.15. Sei

$$T = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}_+\} \cup \{0\}$$

mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik, sei M ein metrischer Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M und $x \in M$. Zeige, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann gegen x konvergiert, wenn die Abbildung

$$T \longrightarrow M,\ \frac{1}{n} \longmapsto x_n,\ 0 \longmapsto x,$$

stetig ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 23.16. (2 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Es sei

$$f : T \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung in einen weiteren metrischen Raum M und sei $a \in T$ ein Punkt, der ein Berührpunkt von $T \setminus \{a\}$ ist. Zeige, dass der Grenzwert

$$\lim_{x \in T \setminus \{a\},\, x \to a} f(x)$$

existiert.

Aufgabe 23.17. (4 Punkte)
Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^3 - x^2 + x + 3}$$

im Punkt $a = -1$.

Aufgabe 23.18. (3 Punkte)
Zeige, dass ein euklidischer Raum $\mathbb{R}^n$ vollständig ist.

Aufgabe 23.19. (5 Punkte)
Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$f(x, y) := \begin{cases} 0\,, \text{ falls } x \leq 0\,, \\ 0\,, \text{ falls } y \leq 0\,, \\ y/x\,, \text{ falls } x \geq y > 0\,, \\ x/y\,, \text{ falls } y > x > 0\,, \end{cases}$$

definiert ist. Zeige, dass die Einschränkung von f auf jeder zur x-Achse oder zur y-Achse parallelen Geraden stetig ist, dass aber f selbst nicht stetig ist.

Aufgabe 23.20. (5 Punkte)
Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion $\neq 0$, die die Gleichung

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeige, dass f eine Exponentialfunktion ist, d.h. dass es ein $b > 0$ gibt mit $f(x) = b^x$.

Aufgabe 23.21. (5 Punkte)
Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

stetig und additiv, d.h. es gelte $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass φ dann $\mathbb{R}$-linear ist.