Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 2

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 2.1. Es seien x, y, z, w Elemente in einem Körper, wobei z und w nicht null seien. Beweise die folgenden Bruchrechenregeln.

(1)
$$\frac{x}{1} = x\,,$$

(2)
$$\frac{1}{-1} = -1\,,$$

(3)
$$\frac{0}{z} = 0\,,$$

(4)
$$\frac{z}{z} = 1\,,$$

(5)
$$\frac{x}{z} = \frac{xw}{zw}\,,$$

(6)
$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw}\,,$$

(7)
$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw + yz}{zw}\,.$$

Gilt die zu (7) analoge Formel, die entsteht, wenn man Addition mit Multiplikation (und Subtraktion mit Division) vertauscht, also

$$(x - z) \cdot (y - w) = (x + w) \cdot (y + z) - (z + w)\,?$$

Zeige, dass die „beliebte Formel“

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x + y}{z + w}$$

nicht gilt.

Aufgabe 2.2.*

Bestimme, welche der beiden rationalen Zahlen p und q größer ist:

$$p = \frac{573}{-1234} \text{ und } q = \frac{-2007}{4322}\,.$$

Aufgabe 2.3.*

a) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in]0, 1[$ mit

$$a^2 + b^2 = c^2\,.$$

b) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in]0, 1[$ mit

$$a^2 + b^2 \neq c^2\,.$$

c) Man gebe ein Beispiel für irrationale Zahlen $a, b \in]0, 1[$ und eine rationale Zahl $c \in]0, 1[$ mit

$$a^2 + b^2 = c^2\,.$$

Die folgende Aufgabe soll allein unter Bezug auf die Anordnungsaxiome der reellen Zahlen gezeigt werden.

Aufgabe 2.4. Zeige, dass für reelle Zahlen die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) $1 > 0$.
(2) Aus $a \geq b$ und $c \geq 0$ folgt $ac \geq bc$.
(3) Aus $a \geq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \leq bc$.
(4) Es ist $a^2 \geq 0$.
(5) Aus $a \geq b \geq 0$ folgt $a^n \geq b^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(6) Aus $a \geq 1$ folgt $a^n \geq a^m$ für ganze Zahlen $n \geq m$.
(7) Aus $a > 0$ folgt $\frac{1}{a} > 0$.
(8) Aus $a > b > 0$ folgt $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Aufgabe 2.5.*

Zeige, dass für reelle Zahlen $x \geq 3$ die Beziehung

$$x^2 + (x+1)^2 \geq (x+2)^2$$

gilt.

Aufgabe 2.6. Es seien $x < y$ reelle Zahlen. Zeige, dass für das arithmetische Mittel $\frac{x+y}{2}$ die Beziehung

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

gilt.

Aufgabe 2.7. Beweise die folgenden Eigenschaften für die Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x|,$$

(dabei seien x, y beliebige reelle Zahlen).

(1) $|x| \geq 0$.
(2) $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.
(3) $|x| = |y|$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist.
(4) $|y - x| = |x - y|$.
(5) $|xy| = |x||y|$.
(6) Für $x \neq 0$ ist $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.
(7) Es ist $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung für den Betrag*).

Aufgabe 2.8. Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x, y) |\, x = 5\}$,
(2) $\{(x, y) |\, x \geq 4 \text{ und } y = 3\}$,
(3) $\{(x, y) |\, y^2 \geq 2\}$,
(4) $\{(x, y) |\, |x| = 3 \text{ und } |y| \leq 2\}$,
(5) $\{(x, y) |\, 3x \geq y \text{ und } 5x \leq 2y\}$,
(6) $\{(x, y) |\, xy = 0\}$,
(7) $\{(x, y) |\, xy = 1\}$,
(8) $\{(x, y) |\, xy \geq 1 \text{ und } y \geq x^3\}$,
(9) $\{(x, y) |\, 0 = 0\}$,
(10) $\{(x, y) |\, 0 = 1\}$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 2.9. (2 Punkte)

Es seien $x_1, \ldots, x_n$ reelle Zahlen. Zeige durch Induktion die Abschätzung

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,.$$

Aufgabe 2.10. (5 Punkte)

Beweise das allgemeine Distributivgesetz für einen Körper.

Aufgabe 2.11. (3 Punkte)

Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x, y) |\, x + y = 3\}$,
(2) $\{(x, y) |\, x + y \leq 3\}$,

(3) $\{(x,y) | \, (x+y)^2 \geq 4\}$,
(4) $\{(x,y) | \, |x+2| \geq 5$ und $|y-2| \leq 3\}$,
(5) $\{(x,y) | \, |x| = 0$ und $|y^4 - 2y^3 + 7y - 5| \geq -1\}$,
(6) $\{(x,y) | -1 \leq x \leq 3$ und $0 \leq y \leq x^3\}$.

Aufgabe 2.12. (5 Punkte)

Aus einem Taschenbuch wurde ein Blatt herausgerissen. Die verbliebenen Seitenzahlen addieren sich zu 65000. Wie viele Seiten hatte das Buch?

Hinweis: Zeige, dass es nicht das letzte Blatt sein kann. Aus den beiden Aussagen „Es fehlt ein Blatt“ und „Das letzte Blatt fehlt nicht“ lassen sich zwei Ungleichungen aufstellen, die (sinnvolle) obere und untere Abschätzungen für die Anzahl der Seiten liefern.