Dr. A. Kaid **Osnabrück SS 2010**

Wiederholertutorium Mathematik I

Aufgabenblatt 6

Anwesenheitsaufgaben

AUFGABE 6.1. Ist das Cauchy-Produkt $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}\right)$ konvergent? Berechne das Cauchyprodukt explizit!

AUFGABE 6.2. Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}$ im Punkt $x_0 := -1$ stetig ist.

AUFGABE 6.3. Untersuche die folgenden beiden Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x} \text{ falls } x \neq 0 \\ 0 \text{ falls } x = 0 \end{cases}$$

und

$$f_2(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ falls } x \neq 0 \\ 0 \text{ falls } x = 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit im Punkt $x_0 = 0$.

AUFGABE 6.4. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $X \subseteq M$ eine Teilmenge. Wir definieren die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, X)$, wobei

$$d(x, X) := \inf\{d(x, y) : y \in X\}\,.$$

Zeige, dass f Lipschitz-stetig mit Konstante 1 ist.

AUFGABE 6.5. Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$. Wir definieren $T_\epsilon(M) := \{x \in \mathbb{R} :\mid x - a \mid> \epsilon \text{ für alle } a \in M\}$. Zeige die folgenden Aussagen:

(1) Falls M offen ist, so ist $T_\epsilon(M)$ abgeschlossen.
(2) Falls M abgeschlossen ist, so ist $T_\epsilon(M)$ offen.
(3) Die Umkehrungen der ersten beiden Aussagen sind falsch.

Hausaufgaben (Korrektur nur für Leute ohne Klausurberechtigung)

AUFGABE 6.6. (4 Punkte)

Sei $A := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) \geq (\mathrm{Re}\,(z))^2 + 1\} \subset \mathbb{C}$. Zeige die folgende Aussage: Sind $z_1, z_2 \in A$ und ist $\lambda \in [0,1]$, so ist auch $\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \in A$.

AUFGABE 6.7. (4 Punkte)

Zeige, dass die charakteristische Funktion $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\chi_{\mathbb{Q}}(x) := 1$, falls $x \in \mathbb{Q}$ und $\chi_{\mathbb{Q}}(x) := 0$, sonst, in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ unstetig ist.