Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Arbeitsblatt 65

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 65.1. Welche „vertrauten geometrischen Figuren“ kann man als (verallgemeinerten) Quader in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oder in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ auffassen?

Aufgabe 65.2. Es seien M und N zwei Mengen und sei $T \subseteq M \times N$ eine Teilmenge. Zu $x \in M$ sei $T(x) = \{y \in N \mid (x,y) \in T\}$. Zeige, dass $\{x\} \times T(x)$ die Faser der Hintereinanderschaltung

$$T \hookrightarrow M \times N \xrightarrow{p_1} M$$

über x ist.

Aufgabe 65.3. Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und $N \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass das Mengensystem

$$N \cap T,\, T \in \mathcal{A}\,,$$

eine σ-Algebra auf N ist (man spricht von der *induzierten* σ-Algebra).

Aufgabe 65.4. Es seien $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$ zwei Messräume, die nicht leer seien und wobei die einelementigen Teilmengen messbar seien. Alle Teilmengen von $M \times N$ seien mit der durch $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ induzierten σ-Algebra versehen. Es sei $S \subseteq M$. Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind.

(1) S ist eine messbare Teilmenge von M.
(2) Es gibt ein $y \in N$ derart, dass $S \times \{y\} \subseteq M \times \{y\}$ messbar ist.
(3) Für alle $y \in N$ ist $S \times \{y\} \subseteq M \times \{y\}$ messbar.
(4) Es gibt ein $y \in N$ derart, dass $S \times \{y\}$ messbar in $M \times N$ ist.
(5) Für alle $y \in N$ ist $S \times \{y\}$ messbar in $M \times N$.

Aufgabe 65.5. Es seien M, N_1, N_2 Messräume und es seien $f_1 : M \to N_1$ und $f_2 : M \to N_2$ messbare Abbildungen. Zeige, dass auch die Abbildung

$$(f_1, f_2) : M \longrightarrow N_1 \times N_2,\; x \longmapsto (f_1(x), f_2(x)),$$

messbar ist.

Aufgabe 65.6. Zeige, dass es für jedes $\epsilon > 0$ eine Familie ϵ_n, $n \in \mathbb{N}$, von positiven reellen Zahlen gibt mit $\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \leq \epsilon$.

Aufgabe 65.7. Es seien X und Y diskrete topologische Räume. Zeige, dass auch der Produktraum diskret ist.

Aufgabe 65.8. Es seien X und Y zwei topologische Räume mit abzählbarer Topologie und mit den zugehörigen σ-Algebren der Borelmengen $\mathcal{B}(X)$ und $\mathcal{B}(Y)$. Zeige, dass das Mengensystem der Borelmengen auf dem Produktraum $X \times Y$ mit dem Produkt von $\mathcal{B}(X)$ und $\mathcal{B}(Y)$ übereinstimmt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 65.9. (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{P}$ ein Präring auf $\mathbb{R}$, der die Intervalle $[a, b]$, $a < b$, enthalte, und es sei μ ein äußeres Maß darauf, das auf diesen Intervallen den Wert $b - a$ besitze. Zeige, dass die Fortsetzung dieses äußeren Maßes auf allen abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ den Wert 0 besitzt.

Aufgabe 65.10. (4 Punkte)

Begründe die einzelnen Abschätzungen in der Abschätzungskette im Beweis zu Lemma 65.3.

Gehe dabei folgendermaßen vor.

(1) Legen Sie auf Ihrer Benutzerseite (oder Gruppenseite) eine Unterseite an, indem Sie dort die Zeile
[[/Fortsetzung von äußerem Maß/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]
schreiben (d.h. Bearbeiten, Schreiben, Abspeichern; das / vorne ist wichtig).
(2) Es erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf den roten Link und geben Sie dort
{{:Fortsetzung von äußerem Maß/Vergleichskette/Begründungsfenster}}
ein.
(3) Es erscheint die Abschätzungskette. Wenn Sie auf eines der Größergleich-Zeichen gehen, erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf diesen roten Link und geben Sie dort die Begründung für diese Abschätzung ein.

(4) Die Abgabe erfolgt online, indem Sie auf der Abgabeseite(die Sie von der Kursseite auf Wikiversity aus erreichen können) einen Link zu Ihrer Lösung hinterlassen, also dort

[[Ihr Benutzername/Fortsetzung von äußerem Maß/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]

hinschreiben.

Aufgabe 65.11. (4 Punkte)

Es seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume. Zeige, dass auf der Produktmenge $M_1 \times M_2$ durch

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$$

eine Metrik gegeben ist, und dass die dadurch definierte Topologie mit der Produkttopologie übereinstimmt.

Aufgabe 65.12. (3 Punkte)

Es seien $(M_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (M_n, \mathcal{A}_n)$ Mengen mit darauf erklärten σ-Algebren. Zeige, dass die Produkt- σ-Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ die kleinste σ-Algebra auf $M_1 \times \cdots \times M_n$ ist, für die alle Projektionen messbar sind.

Aufgabe 65.13. (3 Punkte)

Bestimme das Urbild der Einheitskreisscheibe $E \subseteq \mathbb{R}^2$ unter den Inklusionsabbildungen

$$\iota_y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x \longmapsto (x, y).$$