

Algebraische Kurven

Prof. Dr. Holger Brenner
Universität Osnabrück
Fachbereich Mathematik/Informatik

Sommersemester 2012

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	3
1. Vorlesung - Algebraische Kurven	4
1. Arbeitsblatt	13
2. Vorlesung - Affin-algebraische Mengen	16
2. Arbeitsblatt	22
3. Vorlesung - Die Zariski-Topologie	23
3. Arbeitsblatt	28
4. Vorlesung - Irreduzibilität	30
4. Arbeitsblatt	35
5. Vorlesung - Polynomiale Abbildungen	38
5. Arbeitsblatt	44
6. Vorlesung - Parametrisierungen	47
6. Arbeitsblatt	54
7. Vorlesung - Kegelschnitte	56
7. Arbeitsblatt	64
8. Vorlesung - Mechanische Kurven	67
8. Arbeitsblatt	76
9. Vorlesung - Hilberts Basissatz	77
9. Arbeitsblatt	83
10. Vorlesung - Hilberts Nullstellensatz I	85
10. Arbeitsblatt	90
11. Vorlesung - Hilberts Nullstellensatz II	91
11. Arbeitsblatt	96
12. Vorlesung - Das K-Spektrum	99
12. Arbeitsblatt	105
13. Vorlesung - Offene Mengen	107
13. Arbeitsblatt	113
14. Vorlesung - Algebraische Funktionen	116
14. Arbeitsblatt	123
15. Vorlesung - Lokale Ringe	125
15. Arbeitsblatt	131

16. Vorlesung - Morphismen	135
16. Arbeitsblatt	141
17. Vorlesung - Monoidringe	143
17. Arbeitsblatt	149
18. Vorlesung - Monomiale Kurven	151
18. Arbeitsblatt	156
19. Vorlesung - Ganzheit	158
19. Arbeitsblatt	163
20. Vorlesung - Normalisierung	165
20. Arbeitsblatt	169
21. Vorlesung - Diskrete Bewertungsringe	172
21. Arbeitsblatt	176
22. Vorlesung - Glattheit	178
22. Arbeitsblatt	184
23. Vorlesung - Multiplizität	186
23. Arbeitsblatt	192
24. Vorlesung - Potenzreihenringe I	195
24. Arbeitsblatt	200
25. Vorlesung - Potenzreihenringe II	202
25. Arbeitsblatt	207
26. Vorlesung - Schnittmultiplizität	210
26. Arbeitsblatt	215
27. Vorlesung - Der projektive Raum	217
27. Arbeitsblatt	224
28. Vorlesung - Projektive Kurven I	226
28. Arbeitsblatt	232
29. Vorlesung - Projektive Kurven II	234
29. Arbeitsblatt	240
30. Vorlesung - Satz von Bezout	242
30. Arbeitsblatt	247
Anhang A: Bildlizenzen	250

VORWORT

Dieses Skript gibt die Vorlesung über algebraische Kurven wieder, die ich im Sommersemester 2012 an der Universität Osnabrück gehalten habe. Es handelt sich dabei im Wesentlichen um ausformulierte Manuskripttexte. Dies bitte ich bei einer kritischen Durchsicht wohlwollend zu berücksichtigen.

Der Text wurde auf Wikiversity geschrieben und steht unter der Creative-Commons-Attribution-ShareAlike 3.0. Die Bilder wurden von Commons übernommen und unterliegen den dortigen freien Lizenzen. In einem Anhang werden die einzelnen Bilder mit ihren Autoren und Lizenzen aufgeführt. Die CC-BY-SA 3.0 Lizenz ermöglicht es, dass das Skript in seinen Einzelteilen verwendet, verändert und weiterentwickelt werden darf. Ich bedanke mich bei der Wikimedia-Gemeinschaft und insbesondere bei Benutzer Exxu für die wichtigen Beiträge im Projekt semantische Vorlagen, die eine weitgehend automatische Erstellung des Latexcodes ermöglichen.

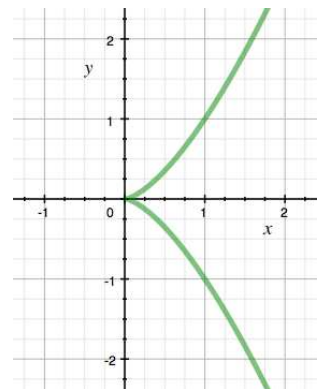
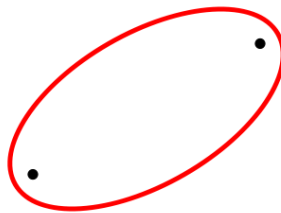
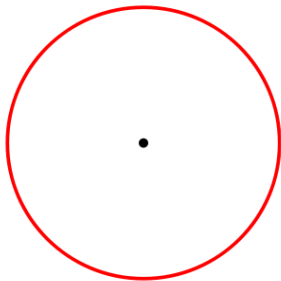
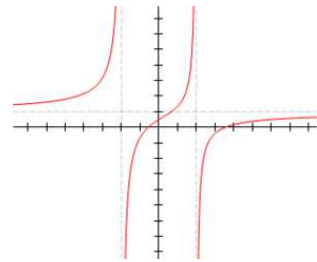
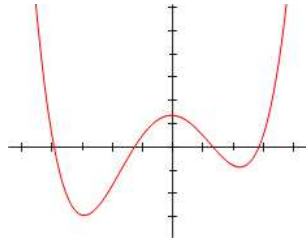
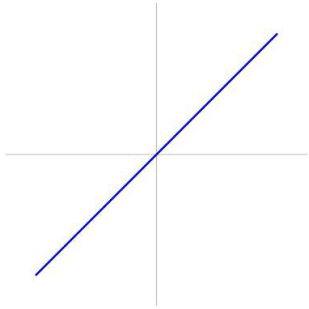
Bei Alessio Caminata bedanke ich mich für die Durchführung des Übungsbetriebs, Korrekturen und Vorlesungsververtretungen. Bei Frau Marianne Gausmann bedanke ich mich für die Erstellung der Pdf-Files und bei den Studierenden für einzelne Korrekturen. Bei Denise Günther, Attila Meeßen, Jonathan Steinbuch und Markus Wageringel bedanke ich mich für die Übernahme von je einer Vorlesung. Bei Jonathan Steinbuch bedanke ich mich für Verlinkungen und Korrekturen.

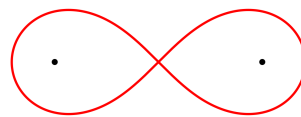
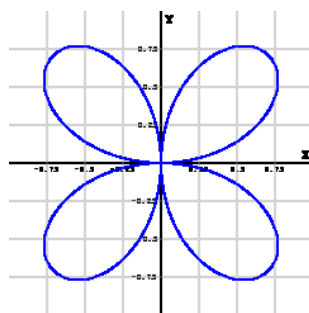
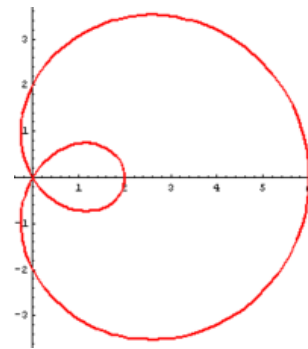
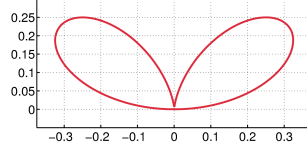
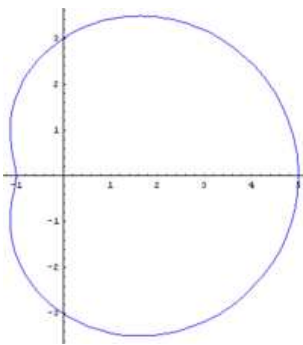
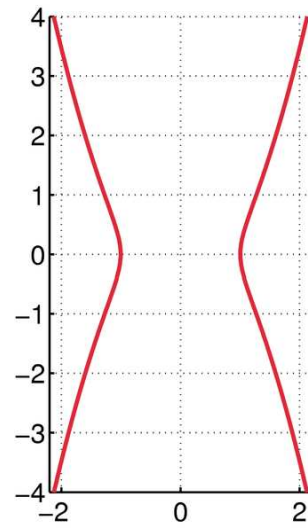
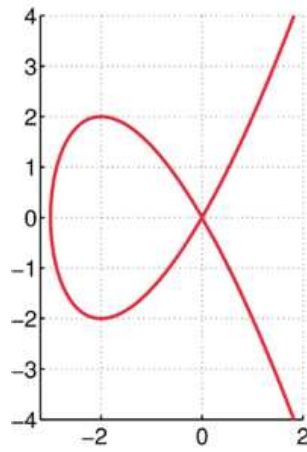
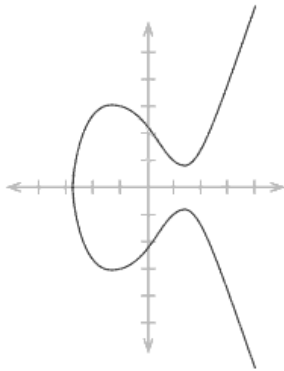
Holger Brenner

1. VORLESUNG - ALGEBRAISCHE KURVEN

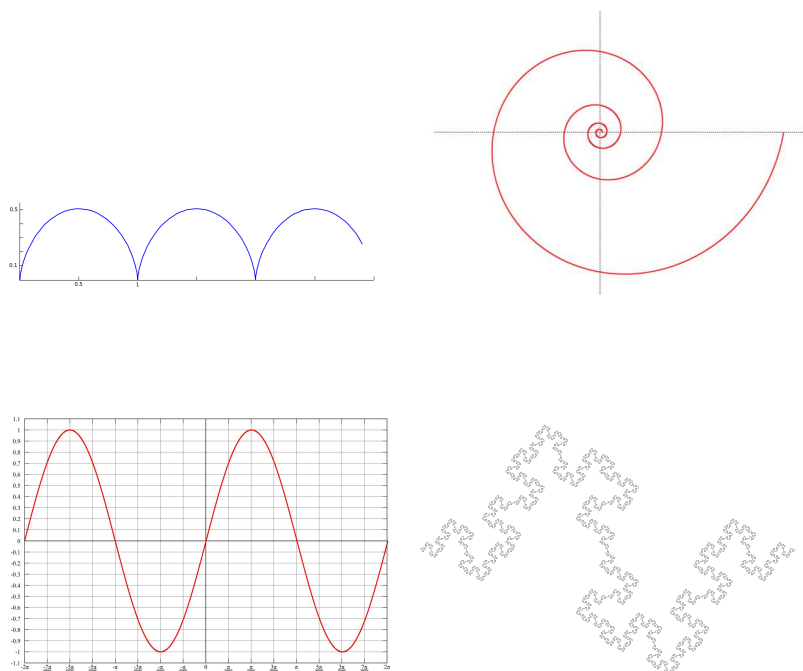
Einige Beispiele

Was ist eine algebraische Kurve? Zum Beispiel das, was auf den folgenden schönen Bildern zu sehen ist:





Nun kann man natürlich viel malen. Schön sind auch die folgenden Kurven, doch das sind keine algebraischen Kurven:



Das „algebraisch“ in algebraische Kurve kommt daher, dass zu ihrer Definition nur algebraische Operationen verwendet werden dürfen, d.h. Addition und Multiplikation, nicht aber analytische Prozesse wie Limes nehmen, unendliche Summen, Approximieren, Differenzieren und Integrieren. Die erlaubten Abbildungen in unserem Kontext sind durch Polynome in mehreren Variablen gegeben. In den obigen Bildern geht es um ebene algebraische Kurven, die durch ein Polynom in zwei Variablen definiert werden. Die beiden ersten Bilder sind *Graphen* zu einer polynomialen Funktion in einer Variablen, sie werden beschrieben durch

$$Y = P(X)$$

wobei im ersten Bild $P(X) = X$ ist (es liegt also ein lineares Polynom vor) und im zweiten Bild etwas wie

$$P(X) = a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

mit gewissen Koeffizienten a_i aus einem Körper K vorliegt. In der algebraischen Geometrie fixiert man einen *Grundkörper* K . Wichtige Körper sind für uns die *reellen Zahlen* (insbesondere sind die Bilder so zu verstehen) oder die *komplexen Zahlen* \mathbb{C} . Ein solcher Graph ist insofern ein einfaches Gebilde, dass es zu jedem Wert für X genau einen Wert für Y (den Funktionswert) gibt, und den man auch noch einfach ausrechnen kann, wenn man im gegebenen Körper rechnen kann. Der Graph ist in gewissem Sinne eine „gebogene“ Kopie der Grundlinie, der X -Achse.

Betrachten wir das dritte Bild. Das ist der Graph einer *rationalen Abbildung*, d.h. man hat zwei Polynome P, Q in einer Variablen X und schaut sich den

Quotienten $\frac{P(X)}{Q(X)}$ an. Dieser Ausdruck macht nur dort Sinn, wo der Nenner nicht null ist. An den Nullstellen des Nennerpolynoms ist die rationale Funktion nicht definiert (wenn Nenner und Zähler an der gleichen Stelle beide null sind, so kann man durch kürzen manchmal erreichen, dass der Quotient auch an dieser Stelle einen Sinn bekommt). Wenn der Nenner null ist, der Zähler aber nicht, so ist die undefiniertheitsstelle ein „Pol“ - der reelle Graph strebt nach $+\infty$ bzw. $-\infty$ - Es ist verlockend zu sagen, dass der Wert der rationalen Funktion an diesen undefinierten Stellen „unendlich“ ist, und im Kontext der projektiven Geometrie macht das durchaus Sinn, wie wir später sehen werden. Die „Graphengleichung“ $Y = \frac{P(X)}{Q(X)}$ ist jedenfalls wegen den undefinierbarkeitsstellen keine optimale Beschreibung für die Kurve. Wenn man sie hingegen mit dem Nenner multipliziert, so erhält man die Bedingung (oder *Gleichung*)

$$YQ(X) = P(X) \text{ bzw. genauer } \{(x, y) \in K^2 \mid yQ(x) = P(x)\},$$

in der links und rechts wohldefinierte Polynome stehen. Die *Erfüllungsmenge* (oder *Lösungsmenge*) ist eindeutig definiert, wobei bei $Q(x) = 0$ für ein bestimmtes x die linke Seite null ist, und es dann dort bei $P(x) \neq 0$ keine Lösung gibt (wie im Bild) und bei $P(x) = 0$ jeder Y -Wert erlaubt ist. In letzterem Fall gehört also eine zur X -Achse senkrechte Gerade durch $(x, 0)$ zu dem Gebilde.

Beispiel 1.1. Ein typisches und wichtiges Beispiel für eine rationale Funktion ist $Y = 1/X$. Den zugehörigen Graphen nennt man *Hyperbel* H . Nennerfrei geschrieben ergibt sich die Gleichung

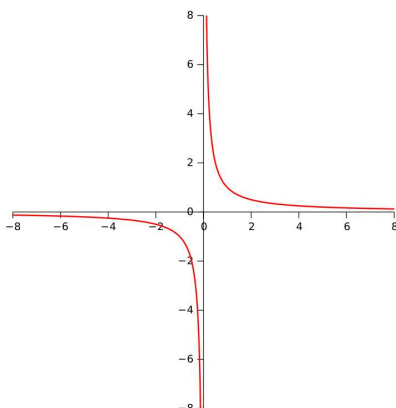
$$XY = 1 \text{ bzw. } H = \{(x, y) \mid xy = 1\}.$$

Diese rationale Funktion ist auf $K^\times = K - \{0\}$ eine echte Funktion (mit H als Graphen) und stiftet eine „natürliche“ Bijektion

$$K^\times \longrightarrow H, x \longmapsto \left(x, \frac{1}{x}\right).$$

K^\times und H sind also in einem zu präzisierenden Sinn „äquivalent“ oder „isomorph“.

Beide Beschreibungen haben etwas für sich. Die Beschreibung als $K^\times \subset K$ spielt sich auf einer Geraden ab (wenn man an $K = \mathbb{R}$ denkt), dafür gehört der Punkt 0, der ein *Häufungspunkt* von K^\times ist, nicht zu K^\times . D.h., K^\times ist nicht *abgeschlossen*. Dagegen ist die Hyperbel in \mathbb{R}^2 abgeschlossen, für die abgeschlossene Realisierung muss man also in eine höhere Dimension gehen. Die Frage, was eine gute Beschreibung für ein Objekt der algebraischen Geometrie ist, wird immer wieder auftauchen.



Im reellen Fall, also bei $K = \mathbb{R}$, besteht \mathbb{R}^\times (und entsprechend $H_{\mathbb{R}}$) aus zwei disjunkten „Zweigen“, ist also nicht *zusammenhängend*. Im komplexen Fall, also bei $K = \mathbb{C}$, ist \mathbb{C}^\times (und entsprechend $H_{\mathbb{C}}$) eine punktierte reelle Ebene, also *zusammenhängend*. Dies ist ein typisches Phänomen der algebraischen Geometrie, dass wichtige Eigenschaften vom Grundkörper abhängen. Besonders wichtig sind dann aber Eigenschaften, die nur von den beschreibenden Gleichungen abhängen und für die Lösungsmengen zu allen Körpern gelten.

Das vierte Bild ist ein *Kreis*, seine Gleichung ist

$$K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\} ,$$

wobei r den Radius des Kreises bezeichnet. Schon das Bild zeigt, dass dieses Gebilde nicht der Graph einer Funktion (Abbildung) sein kann, da bei einem Graphen zu einem x -Wert stets genau ein y -Wert gehört. Man kann aber keine Funktion finden mit $y = \varphi(x)$ und $K = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Die Frage, ob man ein algebraisches Lösungsgebilde als einen Graphen realisieren kann, ist äquivalent dazu, ob man die definierende Gleichung nach y „auflösen“ kann. Im Beispiel kann man $y^2 = r^2 - x^2$ und damit

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{(r - x)(r + x)}$$

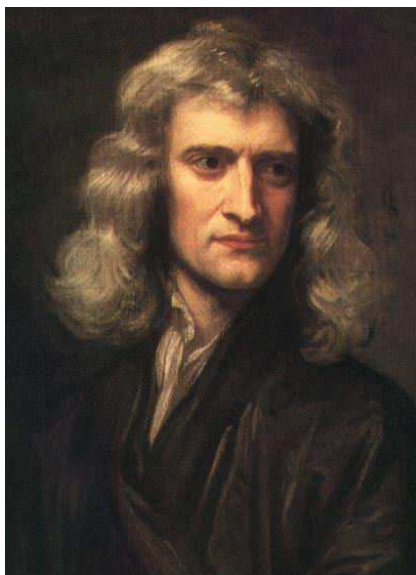
schreiben. Ist es also doch ein Graph? Hier gibt es zwei Interpretationen:

- Wenn man sich auf reelle Zahlen und auf positive Wurzeln beschränkt, so hat man im letzten Schritt keine Äquivalenzumformung durchgeführt, und Information „hinzugefügt“, die in der ursprünglichen Gleichung nicht vorhanden war. Die positive Wurzel zu nehmen bedeutet, sich auf den oberen Halbkreis zu beschränken (Information, also Bedingungen hinzufügen, bewirkt, dass die Lösungsmenge verkleinert wird).
- Wenn man stattdessen unter $\sqrt{\quad}$ alle Lösungen berücksichtigt (d.h. im Reellen die positive und die negative Quadratwurzel, was man häufig als $\pm\sqrt{\quad}$ schreibt), so hat man keine Information hinzugetan, aber auch nicht nach

einer Funktion aufgelöst (sondern nur, wie man manchmal sagt, nach einer „mehrwertigen Funktion“)

Beide Standpunkte haben etwas für sich. Dass man für einen Teil des geometrischen Objektes (dem oberen Halbbogen) versucht, eine einfache Beschreibung als Graphen zu finden, kehrt im Satz über implizite Funktionen, im Potenzreihenansatz, in Parametrisierungen und in der lokalen Theorie wieder.

Gleichungen der Form $Y^2 = G(X)$



Isaac Newton (1643 - 1727)

Eine Kreisgleichung kann man auffassen als eine Gleichung der Form

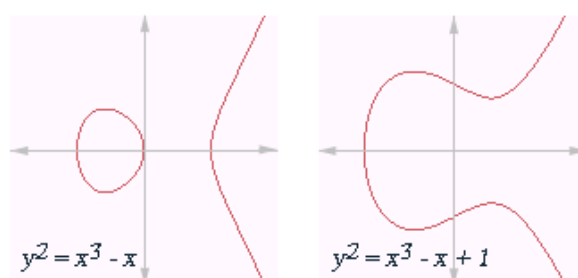
$$Y^2 = G(X),$$

wobei G ein Polynom in der einen Variablen X bezeichnet (im Fall eines Kreises ist $G = -X^2 + 1$). Das ist kein Graph, aber die „Wurzel“ eines Graphen. Betrachten wir generell eine solche Situation, wo $G(X)$ komplizierter sein darf. Das Lösungsmenge repräsentiert hier die Quadratwurzel $\sqrt{G(X)}$. Wenn man sich für X einen beliebigen Wert x vorgibt, so gibt es (im Reellen) drei Möglichkeiten für zugehörige Lösungen:

- Wenn $G(x)$ negativ ist, so gibt es keine Lösung.
- Wenn $G(x) = 0$ ist, so gibt es genau die Lösung $y = 0$.
- Wenn $G(x)$ positiv ist, so gibt es die zwei Lösungen $y = \pm\sqrt{G(x)}$.

Das gibt auch einen Ansatz, wie das reelle Bild aussieht: Für jedes x berechnet man $G(x)$ und markiert bei $(x, \pm\sqrt{G(x)})$ (falls $G(x)$ nichtnegativ ist) einen Punkt.

Im Komplexen sind nur die Fälle $G(x) = 0$ oder $G(x) \neq 0$ zu unterscheiden. Wenn G selbst nur den Grad zwei besitzt, so handelt es sich um einen *Kegelschnitt*, die schon in der Antike betrachtet wurden. Mit dem Fall, dass $G(X)$ ein kubisches (reelles) Polynom ist (also den Grad drei besitzt), hat sich Isaac Newton intensiv beschäftigt. Dieses Beispielmateriale ist schon sehr reichhaltig.



Betrachten wir den Fall $G(X) = X^3$, also das durch

$$\{(x, y) \mid y^2 = x^3\}$$

beschriebene Gebilde. Dieses Gebilde nennt man die *Neilsche Parabel*. Hier tritt ein neues Phänomen auf, nämlich, dass der Nullpunkt anders ist als alle anderen Punkte. Man spricht von einer *Singularität*; im Gegensatz dazu nennt man die anderen Punkte *glatt* oder *nicht-singulär*. Eine genaue Definition zu geben ist Teil dieses Kurses, als erste ungenaue Formulierung kann man sagen, dass eine Kurve in einem glatten Punkt lokal und in geeigneten Koordinaten so aussieht wie der (gedrehte) Graph einer differenzierbaren Funktion. Die Singularität in der Neilschen Parabel nennt man auch eine *Spitze* (oder eine *Kuspe*, was einfach Spitze bedeutet). Dagegen ist die Singularität im Bild 8 ein *Kreuzungspunkt* oder *Doppelpunkt*.

Im Bild 7 vom Anfang und oben sieht man ebenfalls die Lösungsmenge einer polynomialen Gleichung der Form $Y^2 = G(X)$, wobei $G(X)$ ein Polynom vom Grad drei ist. Wie sieht $G(X)$ aus, damit sich solch eine Kurve ergibt? Die zuletzt genannten Beispiele zeigen auch, dass es von der genauen Gestalt von $G(X)$ abhängt, ob die Kurve eine Singularität besitzt oder nicht.

Bleiben wir noch bei der Neilschen Parabel C . Wenn t irgendeine reelle oder komplexe Zahl ist, so liegt der Punkt mit den Koordinaten $(x, y) = (t^2, t^3)$ stets auf der Neilschen Parabel, da ja $(t^2)^3 = t^6 = (t^3)^2$ ist. Man kann auch umgekehrt zeigen, dass jeder Punkt der Neilschen Parabel eine solche Gestalt

besitzt, dass es also zu (x, y) mit $y^2 = x^3$ ein (und zwar genau ein) t gibt mit $(x, y) = (t^2, t^3)$. Man sagt, dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow C, t \longmapsto (t^2, t^3),$$

eine (bijektive polynomiale) *Parametrisierung* der Neilschen Parabel ist. Es ist eine nicht-triviale Frage, welche algebraischen Kurven eine polynomiale Parametrisierung besitzen. Eine Kurve, die durch eine Gleichung der Form $Y^2 = G(X)$ gegeben ist, die glatt ist und wo G den Grad drei hat, besitzt keine solche Parametrisierung. In der elementaren Zahlentheorie lernt man, dass alle *pythagoreischen Tripel* auf eine einfache übersichtliche Gestalt gebracht werden können. Äquivalent dazu ist eine (rationale) Parametrisierung des rationalen Einheitskreises. Siehe Zahlentheorie (Osnabrück 2008)/Vorlesung 10.

Polynomringe

Nach diesen einführenden Beispielen fixieren wir ein paar Begrifflichkeiten, die wahrscheinlich schon bekannt sind.

Definition 1.2. Der *Polynomring* über einem kommutativen Ring R besteht aus allen *Polynomen*

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$$

mit $a_i \in R, i = 0, \dots, n, n \in \mathbb{N}$, und mit komponentenweiser Addition und einer Multiplikation, die durch distributive Fortsetzung der Regel

$$X^n \cdot X^m := X^{n+m}$$

definiert ist.

Darauf aufbauend kann man auch Polynomringe in mehreren Variablen definieren. Man setzt

$$K[X, Y] := (K[X])[Y], K[X, Y, Z] := (K[X, Y])[Z],$$

etc. Ein Polynom in n Variablen hat die Gestalt

$$F = \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_n)} a_{(\nu_1, \dots, \nu_n)} X_1^{\nu_1} \dots X_n^{\nu_n}.$$

Es wird dabei summiert über eine endliche Summe von *Exponententupel* (ν_1, \dots, ν_n) . Die Ausdrücke $X_1^{\nu_1} \dots X_n^{\nu_n}$ nennt man auch *Monome*. Ein Polynom schreibt man zumeist abkürzend als $F = \sum_{\nu} a_{\nu} X^{\nu}$. Das Produkt von zwei Monomen bedeutet Addition der Exponententupel, also

$$(X_1^{\nu_1} \dots X_n^{\nu_n}) \cdot (X_1^{\mu_1} \dots X_n^{\mu_n}) := X_1^{\nu_1 + \mu_1} \dots X_n^{\nu_n + \mu_n}.$$

Für uns, im Kontext der algebraischen Geometrie, ist hauptsächlich der Fall interessant, wo der Grundring R ein Körper ist. In der algebraischen Geometrie interessiert man sich für die Gestalt von Nullstellengebilden von Polynomen in mehreren Variablen. Wir werden später sehen, dass die Beziehung

zwischen algebraischen und geometrischen Eigenschaften besonders stark ist, wenn der Grundkörper algebraisch abgeschlossen ist.

Definition 1.3. Ein Körper K heißt *algebraisch abgeschlossen*, wenn jedes nichtkonstante Polynom $F \in K[X]$ eine Nullstelle in K besitzt.



Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Satz 1.4. *Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen.*

Beweis. Wir werden den Satz hier nicht beweisen. Die Beweise dafür benutzen topologische oder analytische Mittel. \square

Der Fundamentalsatz der Algebra wurde erstmals von Gauss bewiesen.

Ebene affin-algebraische Kurven

Wir kommen zur Definition unseres Hauptgegenstandes.

Definition 1.5. Sei K ein Körper. Eine *ebene affin-algebraische Kurve* über K ist das Nullstellengebilde $V(F) \subseteq K^2$ eines nicht-konstanten Polynoms F in zwei Variablen, also

$$F = \sum_{0 \leq i, j \leq m} a_{ij} X^i Y^j \quad (\text{mit } a_{ij} \in K).$$

D.h. es ist

$$V(F) = \left\{ (x, y) \in K^2 \mid F(x, y) = \sum_{0 \leq i, j \leq m} a_{ij} x^i y^j = 0 \right\}.$$

Man spricht auch von der *Nullstellenmenge* zu F oder der *Varietät* zu F oder der *Lösungsmenge* zur Gleichung $F = 0$.

Aus dem folgenden Lemma ergibt sich, dass die oben zuletzt angeführten Kurven nicht algebraisch sind.

Lemma 1.6. *Sei C eine ebene affin-algebraische Kurve und sei L eine Gerade in K^2 . Dann ist der Durchschnitt $C \cap L$ die ganze Gerade, oder er besteht nur aus endlich vielen Punkten.*

Beweis. Eine ebene algebraische Kurve $C = V(F)$ ist nach Definition immer die Nullstelle eines Polynoms F in zwei Variablen. Die Gerade L sei durch die Gleichung $aX + bY + c = 0$ gegeben. Ohne Einschränkung sei $a \neq 0$, dann kann man nach X auflösen und erhält die Geradengleichung $X = \alpha Y + \beta$. Ein Schnittpunkt $P \in C \cap L$ muss also sowohl $F(P) = 0$ erfüllen als auch die Geradengleichung. Mit der Geradengleichung kann man X in F durch $\alpha Y + \beta$ ersetzen. Dadurch wird F zu einem Polynom in der einen Variablen Y , das wir \tilde{F} nennen. Dann ist $P \in C \cap L$ äquivalent dazu, dass $P \in L$ und $\tilde{F}(P) = 0$ ist. D.h. die Schnittmenge wird durch das Polynom \tilde{F} beschrieben. Bei $\tilde{F} = 0$ ist die ganze Gerade der Schnitt. Bei $\tilde{F} \neq 0$ gibt es nach Anhang 1.5 nur endlich viele Nullstellen. \square

In den obigen Beispielen gibt es aber Geraden, die die Kurven in unendlich vielen Punkten schneiden, ohne dass sie die gesamte Gerade enthalten - deshalb sind sie nicht algebraisch.

1. ARBEITSBLATT

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1.1. Skizziere im \mathbb{R}^2 die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

- (1) $x^2 - y^2 - 1 = 0$,
- (2) $x^2 + xy + y^2 = 0$,
- (3) $x^2 + y^2 + 1 = 0$,
- (4) $x^2 + y^2 = 0$,
- (5) $x^2 + y^3 = 0$,
- (6) $x^3 - y^5 = 0$,
- (7) $x^2 - x^3 = 0$,
- (8) $x^3 + y^3 = 1$,
- (9) $x^4 + y^4 = 1$,
- (10) $-5 + 3x + 4x^2 + x^3 - y^2 = 1$.

Aufgabe 1.2. Berechne den Durchschnitt der Kurven aus Aufgabe 1.1 mit den folgenden Geraden.

- (1) $x = 0$,
- (2) $y = 0$,
- (3) $x = 1$,
- (4) $y = -2$,
- (5) $x = y$,
- (6) $x = -y$,
- (7) $2x - 3y + 4 = 0$.

Aufgabe 1.3. Multipliziere in $\mathbb{Z}[x, y, z]$ die beiden Polynome

$$x^5 + 3x^2y^2 - xyz^3 \text{ und } 2x^3yz + z^2 + 5xy^2z - x^2y.$$

Aufgabe 1.4. Multipliziere in $\mathbb{Z}/(5)[x, y]$ die beiden Polynome

$$x^4 + 2x^2y^2 - xy^3 + 2y^3 \text{ und } x^4y + 4x^2y + 3xy^2 - x^2y^2 + 2y^2.$$

Aufgabe 1.5. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass K nicht endlich sein kann.

Aufgabe 1.6. Diskutiere den Zusammenhang zwischen ebenen algebraischen Kurven und dem Satz über implizite Funktionen.

Aufgabe 1.7. Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^2$ das Bild unter der polynomialen Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^3 - 1, t^2 - 1).$$

Bestimme ein Polynom $F \neq 0$ in zwei Variablen derart, dass C auf dem Nullstellengebilde zu F liegt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 1.8.* (3 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich und $R[X]$ der Polynomring über R . Zeige, dass die Einheiten von $R[X]$ genau die Einheiten von R sind.

Aufgabe 1.9. (4 Punkte)

Betrachte Gleichungen der Form

$$y^2 = G(x) \text{ mit } G(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

über \mathbb{R} . Skizziere die verschiedenen Lösungsmengen für die Koeffizienten $a, b, c \in \{1, -1, 0\}$.

Aufgabe 1.10. (3 Punkte)

Führen Sie in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ folgende Polynomdivision aus.

$$X^4 + 5X^2 + 3 \text{ durch } 2X^2 + X + 6.$$

Aufgabe 1.11. (3 Punkte)

Bestimme im Polynomring $\mathbb{Z}/(3)[X]$ alle irreduziblen Polynome vom Grad 4.

Aufgabe 1.12.* (3 Punkte)

Sei K ein Körper. Zeige, dass die beiden folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

- (1) K ist algebraisch abgeschlossen.
- (2) Jedes nicht-konstante Polynom $F \in K[X]$ zerfällt in Linearfaktoren.

Aufgabe 1.13. (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

für die Körper $K = \mathbb{Z}/(2)$, $\mathbb{Z}/(5)$ und $\mathbb{Z}/(11)$.

Aufgabe 1.14. (5 Punkte)

Es sei $C \subseteq \mathbb{C}^2$ das Bild unter der polynomialen Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2, t \longmapsto (t^3 - t^2 + 4t + 3, -t^2 + 5t - 1).$$

Bestimme ein Polynom $F \neq 0$ in zwei Variablen derart, dass C auf dem Nullstellengebilde zu F liegt.

Aufgabe 1.15. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2,$$

die einem Punkt $t \in \mathbb{R}$ den eindeutigen Schnittpunkt $\neq (0, -1)$ der durch die beiden Punkte $(t, 1)$ und $(0, -1)$ gegebenen Geraden G_t mit dem Einheitskreis

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

zuordnet. Zeige, dass diese Abbildung wohldefiniert ist und bestimme die funktionalen Ausdrücke, die diese Abbildung beschreiben. Zeige, dass f differenzierbar ist. Ist f injektiv, ist f surjektiv?

2. VORLESUNG - AFFIN-ALGEBRAISCHE MENGEN

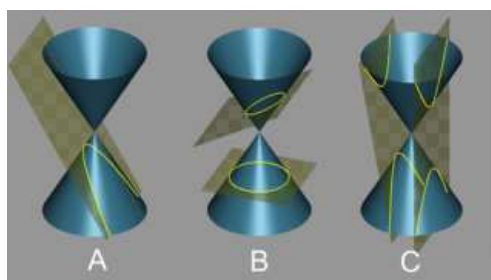
Definition 2.1. Sei K ein Körper. Dann nennt man $\mathbb{A}_K^n = K^n$ den *affinen Raum* über K der Dimension n .

Der affine Raum ist also zunächst einfach eine Menge aus Punkten. Ein Punkt im affinen Raum ist einfach ein n -Tupel (a_1, \dots, a_n) mit Koordinaten aus K . Warum dann ein neuer Begriff? Mit dem Begriff „affiner Raum“ wird angedeutet, dass wir den K^n als Objekt der algebraischen Geometrie verstehen wollen. D.h. wir betrachten den affinen n -dimensionalen Raum als das natürliche geometrische Objekt, auf dem Polynome in n Variablen (als Funktionen) operieren. Wir werden zunehmend den affinen Raum um weitere Strukturen (Zariski-Topologie, Strukturgarbe) ergänzen, die deutlich machen, dass er „mehr“ ist als „nur“ ein K^n . Für $n = 1$ spricht man von der *affinen Geraden* und für $n = 2$ von der *affinen Ebene*.

Ein Polynom $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ fasst man in natürlicher Weise als Funktion auf dem affinen Raum auf: Einem Punkt $P \in \mathbb{A}_K^n$ mit $P = (a_1, \dots, a_n)$ wird der Wert $F(P) = F(a_1, \dots, a_n)$ zugeordnet, indem die Variable X_i durch a_i ersetzt wird und alles in K ausgerechnet wird. Zu einem Polynom $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ kann man insbesondere fragen, ob $F(P) = 0$ ist oder nicht. Zu F rückt dann insbesondere das dadurch definierte „Nullstellengebilde“ ins Interesse, nämlich

$$V(F) = \{P \in \mathbb{A}_K^n \mid F(P) = 0\} .$$

Davon haben wir schon einige in der ersten Vorlesung kennengelernt. Es ist aber auch sinnvoll, zu untersuchen, wie das gemeinsame (simultane) Nullstellengebilde zu mehreren Polynomen aussieht. Dieses beschreibt den Durchschnitt der einzelnen beteiligten Nullstellengebilde (wie beispielsweise bei Kegelschnitten, wo man einen Kegel im dreidimensionalen Raum mit verschiedenen Ebenen schneidet).



Kegelschnitte

Daher definieren wir allgemein.

Definition 2.2. Sei K ein Körper und sei $F_j \in K[X_1, \dots, X_n]$, $j \in J$, eine Familie von Polynomen in n Variablen. Dann nennt man

$$\{P \in \mathbb{A}_K^n \mid F_j(P) = 0 \text{ für alle } j \in J\}$$

das durch die Familie definierte *Nullstellengebilde* (oder *Nullstellenmenge*). Es wird mit $V(F_j, j \in J)$ bezeichnet.

Diejenigen Teilmengen des affinen Raumes, die als Nullstellenmengen auftreten, verdienen einen eigenen Namen.

Definition 2.3. Sei K ein Körper und sei $K[X_1, \dots, X_n]$ der Polynomring in n Variablen. Dann heißt eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ im affinen Raum *affin-algebraisch*, wenn sie die Nullstellenmenge zu einer Familie $F_j, j \in J$, von Polynomen $F_j \in K[X_1, \dots, X_n]$ ist, wenn also $V = V(F_j, j \in J)$ gilt.

Beispiel 2.4. Wir betrachten die affine Ebene \mathbb{A}_K^2 und darin einige affin-algebraische Teilmengen, die durch die Variablen X und Y definiert sind. Das Nullstellengebilde $V(X, Y)$ besteht einfach aus dem *Nullpunkt* $(0, 0)$. Die Bedingung sagt ja hier, dass beide Variablen null sein müssen. Die Menge $V(X)$ ist die *Y-Achse* (alle Punkte der Form $(0, y)$) und $V(Y)$ ist die *X-Achse*. Die Menge $V(X + Y)$ besteht aus allen Punkten (x, y) mit $y = -x$. Das ist also die *Gegendiagonale*. Die Menge $V(XY)$ besteht aus den Punkten (x, y) , wo das Produkt $xy = 0$ sein muss. Über einem Körper kann ein Produkt aber nur dann null sein, wenn einer der Faktoren null ist. D.h. es ist $V(XY) = V(X) \cup V(Y)$ und es liegt das *Achsenkreuz* vor.

Die Punkte in einem affinen Raum oder auf einer affin-algebraischen Menge interpretiert man häufig so, dass sie selbst ein gewisses komplizierteres mathematisches Objekt repräsentieren. Eigenschaften der Objekte werden dann dadurch reflektiert, dass die repräsentierenden Punkte gewisse algebraische Gleichungen erfüllen oder nicht, oder, was äquivalent ist, auf gewissen affin-algebraischen Mengen liegen oder nicht. Dies soll durch das nächste Beispiel illustriert werden.

Beispiel 2.5. Eine 2×2 -Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ist durch die vier Zahlen $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22} \in K$ eindeutig festgelegt. Man kann eine Matrix also mit einem Punkt im \mathbb{A}_K^4 identifizieren. Bei dieser Interpretation ist es sinnvoll, die Variablen mit $X_{11}, X_{21}, X_{12}, X_{22}$ zu bezeichnen. Man kann sich dann fragen, welche Eigenschaften von Matrizen sich durch algebraische Gleichungen beschreiben lassen. Wir diskutieren dazu einige typische Eigenschaften.

Eine obere Dreiecksmatrix liegt vor, wenn $a_{12} = 0$ ist. Die Menge der oberen Dreiecksmatrizen ist also die Nullstellenmenge von X_{12} .

Eine invertierbare Matrix liegt vor, wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ist. Die Menge der nicht invertierbaren Matrizen wird also durch die algebraische *Determinantenbedingung* $X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} = 0$ beschrieben.

Eine Matrix beschreibt die Multiplikation mit einem Skalar, wenn sie eine Diagonalmatrix mit konstantem Diagonaleintrag ist. Diese Menge wird durch die drei Gleichungen $X_{12} = 0$, $X_{21} = 0$ und $X_{11} - X_{22} = 0$ beschrieben.

Ein Element $\lambda \in K$ ist nach Satz 17.8 (Mathematik (Osnabrück 2009-2011)) ein Eigenwert einer Matrix genau dann, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Matrix ist, d.h. wenn

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{21} \\ -a_{12} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

ist. In der linearen Algebra ist normalerweise die Matrix vorgegeben und man sucht nach Nullstellen λ dieses Polynoms in einer Variablen. Man kann es aber auch umgekehrt sehen und λ vorgeben, und das Nullstellengebilde

$$\lambda^2 - \lambda(X_{11} + X_{22}) + X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} = 0$$

in den vier Variablen untersuchen. Diese Gleichung beschreibt also die Menge aller Matrizen, die λ als Eigenwert besitzen.

Entsprechend besitzt eine Matrix genau dann die beiden Eigenwerte $\lambda \neq \delta$, wenn

$$\lambda^2 - \lambda(X_{11} + X_{22}) + X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} = 0$$

und

$$\delta^2 - \delta(X_{11} + X_{22}) + X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} = 0$$

ist. Die Differenz der beiden Gleichungen ist

$$\lambda^2 - \delta^2 - (\lambda - \delta)(X_{11} + X_{22}) = 0,$$

die eine solche Matrix erst recht erfüllen muss. Wegen $\lambda \neq \delta$ kann man das schreiben als

$$X_{11} + X_{22} = \lambda + \delta.$$

Für eine Matrix nennt man die Summe der Diagonaleinträge die Spur der Matrix. Die zuletzt hingeschriebene Gleichung besagt also, dass für eine Matrix mit Eigenwerten $\lambda \neq \delta$ die Spur die Summe dieser Eigenwerte sein muss.

Das charakteristische Polynom einer Matrix kann man auch schreiben als

$$\lambda^2 - \lambda \cdot \text{Spur}(M) + \text{Det}(M),$$

mit

$$\text{Spur}(M) = X_{11} + X_{22} \text{ und } \text{Det}(M) = X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21}.$$

Insbesondere haben Matrizen genau dann das gleiche charakteristische Polynom, wenn ihre Spur und ihre Determinante übereinstimmt. Damit kann man auch sagen, dass die Menge der Matrizen mit einem vorgegebenen charakteristischen Polynom die Faser unter der Abbildung

$$\mathbb{A}_K^4 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2, M \longmapsto (\text{Spur}(M), \text{Det}(M)),$$

ist. Diese Abbildung ist durch einfache polynomiale Ausdrücke gegeben. Ist diese Abbildung surjektiv? Sehen die Fasern immer gleich aus, d.h., besitzt die Menge der Matrizen mit vorgegebener Spur und Determinante immer die

gleiche Struktur, oder gibt es da Unterschiede? Sei s und d vorgegeben. Dann geht es um die Lösungsmenge zu

$$X_{11} + X_{22} = s \text{ und } X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} = d.$$

Hierbei ist X_{11} durch X_{22} eindeutig festgelegt, und umgekehrt. Man kann daher eine Variable *eliminieren*, indem man $X_{22} = s - X_{11}$ setzt. Dann ergibt sich das „äquivalente“ System in den drei Variablen X_{11}, X_{12}, X_{21} , mit der einzigen Gleichung

$$X_{11}(s - X_{11}) - X_{12}X_{21} = d \text{ bzw. } X_{11}^2 - sX_{11} + X_{12}X_{21} + d = 0.$$

Unter „äquivalent“ verstehen wir hier, dass die Lösungen des einen Systems mit den Lösungen des anderen Systems in einer Bijektion stehen, die durch Polynome gegeben ist. An dieser letzten Umformung sieht man, dass es stets eine Lösung geben muss: Man kann für X_{11} einen beliebigen Wert und erhält eine Gleichung der Form $X_{12}X_{21} = a$, die Lösungen besitzt.

Durch eine *lineare Variablentransformation* kann man die Gleichung noch weiter vereinfachen. Sie vorausgesetzt, dass 2 in K invertierbar ist (dass also die Charakteristik von K nicht 2 ist). Dann kann man mit $X = X_{11} - s/2$ (und mit $Y = X_{12}, Z = X_{21}$) schreiben

$$X^2 + YZ + c$$

mit $c = -\frac{s^2}{4} + d$. Daraus sieht man, dass die Gestalt der Matrizenmenge mit vorgegebener Spur und Determinante nur von $-\frac{s^2}{4} + d$ abhängt. In der Tat ist nun, wenn dieser Term null ist oder nicht, das Nullstellengebilde verschieden. Im ersten Fall hat es eine Singularität, im zweiten Fall nicht, wie wir später sehen werden.

Ideale und Nullstellengebilde

Da wir zunächst beliebige Familien von Polynomen zulassen, die Nullstellengebilde und damit affin-algebraische Mengen definieren, erscheinen diese zunächst sehr unübersichtlich. Es gelten hier aber drei wichtige Aussagen, die wir nach und nach beweisen werden, nämlich:

- (1) Das Nullstellengebilde zu einer Polynom-Familie ist gleich dem Nullstellengebilde des Ideals, das von der Familie erzeugt wird.
- (2) Zu jedem Ideal gibt es ein endliches Ideal-Erzeugendensystem, so dass jedes Nullstellengebilde durch endlich viele Polynome beschrieben werden kann (Hilbertscher Basissatz).
- (3) Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper stehen die Nullstellengebilde in Bijektion mit den sogenannten Radikalen (das sind spezielle Ideale) (Hilbertscher Nullstellensatz).

Die erste dieser Aussagen können wir sofort beweisen, die anderen beiden verlangen einige algebraische Vorbereitungen, die wir in den nächsten Vorlesungen entwickeln werden.

Lemma 2.6. *Sei K ein Körper und sei $F_j \in K[X_1, \dots, X_n]$, $j \in J$, eine Familie von Polynomen in n Variablen. Es sei \mathfrak{a} das von den F_j erzeugte Ideal in $K[X_1, \dots, X_n]$. Dann ist*

$$V(F_j, j \in J) = V(\mathfrak{a}).$$

Beweis. Das Ideal \mathfrak{a} besteht aus allen Linearkombinationen der F_j und enthält insbesondere alle F_j . Daher ist die Inklusion $V(F_j, j \in J) \supseteq V(\mathfrak{a})$ klar. Für die umgekehrte Inklusion sei $P \in V(F_j, j \in J)$ und sei $H \in \mathfrak{a}$. Dann ist $H = \sum_{i=1}^k A_i F_{j_i}$ (mit $A_i \in K[X_1, \dots, X_n]$) und somit ist

$$H(P) = \sum_{i=1}^k A_i(P) F_{j_i}(P) = 0,$$

also verschwindet jedes Element aus dem Ideal im Punkt P . Daher ist $P \in V(\mathfrak{a})$. \square

Wir können also im Folgenden bei jeder Nullstellenmenge davon ausgehen, dass sie durch ein Ideal gegeben ist.

Lemma 2.7. *Für Ideale $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ in $K[X_1, \dots, X_n]$ gilt $V(\mathfrak{a}) \supseteq V(\mathfrak{b})$ für die zugehörigen Nullstellengebilde.*

Beweis. Sei $P \in V(\mathfrak{b})$. D.h. für jedes $F \in \mathfrak{b}$ ist $F(P) = 0$. Dann ist erst recht $F(P) = 0$ für jedes $F \in \mathfrak{a}$. \square

Affin-algebraische Teilmengen des affinen Raumes erfüllen einige wichtige strukturelle Eigenschaften.

Proposition 2.8. *Sei K ein Körper, $K[X_1, \dots, X_n]$ der Polynomring in n Variablen und sei \mathbb{A}_K^n der zugehörige affine Raum. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

- (1) $V(0) = \mathbb{A}_K^n$, d.h. der ganze affine Raum ist eine affin-algebraische Menge.
- (2) $V(1) = \emptyset$, d.h. die leere Menge ist eine affin-algebraische Menge.
- (3) Es seien V_1, \dots, V_k affin-algebraische Mengen mit $V_i = V(\mathfrak{a}_i)$. Dann gilt

$$V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k = V(\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{a}_k).$$

Insbesondere ist die Vereinigung von endlich vielen affin-algebraischen Mengen wieder eine affin-algebraische Menge.

- (4) Es seien V_i , $i \in I$, affin-algebraische Mengen mit $V_i = V(\mathfrak{a}_i)$. Dann gilt

$$\bigcap_{i \in I} V_i = V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right).$$

Inbesondere ist der Durchschnitt von beliebig vielen affin-algebraischen Mengen wieder eine affin-algebraische Menge.

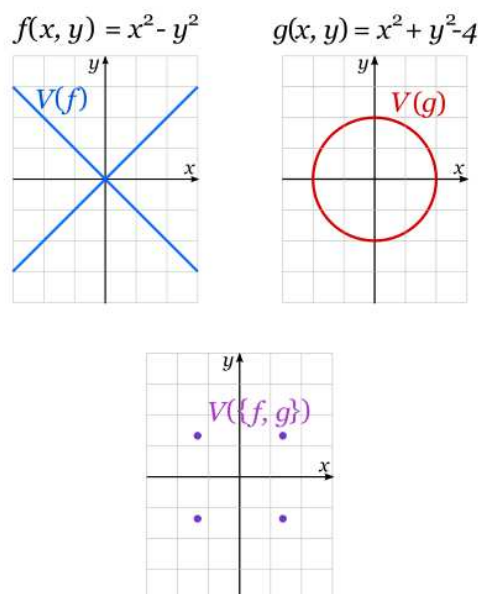
Beweis. (1) und (2) sind klar, da das konstante Polynom 0 überall und das konstante Polynom 1 nirgendwo verschwindet.

(3). Sei P ein Punkt in der Vereinigung, sagen wir $P \in V(\mathfrak{a}_1)$. D.h. $f(P) = 0$ für jedes Polynom $f \in \mathfrak{a}_1$. Ein beliebiges Element aus dem Produktideal $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_k$ hat die Gestalt

$$h = \sum_{j=1}^m r_j f_{1j} \cdot f_{2j} \cdots f_{kj}$$

mit $f_{ij} \in \mathfrak{a}_i$. Damit ist $h(P) = 0$, da stets $f_{1j}(P) = 0$ gilt, also gehört P zum rechten Nullstellengebilde. Gehört hingegen P nicht zu der Vereinigung links, so ist $P \notin V(\mathfrak{a}_i)$ für alle $i = 1, \dots, k$. D.h. es gibt $f_i \in \mathfrak{a}_i$ mit $f_i(P) \neq 0$. Dann ist aber $(f_1 f_2 \cdots f_k)(P) \neq 0$ und $f_1 f_2 \cdots f_k \in \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_k$, so dass P nicht zur Nullstellenmenge rechts gehören kann.

(4). Sei $P \in \mathbb{A}_K^n$. Dann ist $P \in V(\mathfrak{a}_i)$ für alle $i \in I$ genau dann, wenn $f(P) = 0$ ist für alle $f \in \mathfrak{a}_i$ und für alle $i \in I$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $f(P) = 0$ ist für alle f aus der Summe dieser Ideale. \square



2. ARBEITSBLATT

Aufwärmataufgaben

Aufgabe 2.1. Betrachte in \mathbb{A}_K^3 die beiden Ebenen

$$E_1 = V(3x + 4y + 5z) \text{ und } E_2 = V(2x - y + 3z).$$

Parametrisiere den Schnitt $E_1 \cap E_2$.

Aufgabe 2.2. Zeige, dass zu einem Punkt $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_K^n$ das zugehörige Ideal

$$(X_1 - a_1, X_2 - a_2, \dots, X_n - a_n)$$

maximal ist.

Aufgabe 2.3. Zeige: Der Durchschnitt von zwei verschiedenen Kreisen in der affinen Ebene ist der Durchschnitt eines Kreises mit einer Geraden.

Aufgabe 2.4. Skizziere die reellen Nullstellengebilde von $Y^n - X^n$ und bestimme das Verschwindungsideal zu den affin-algebraischen Mengen $V_n \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, die aus allen Geraden durch den Nullpunkt und durch die Eckpunkte eines regulären n -Ecks (mit $(1, 0)$ als einem Eck) besteht.

Aufgabe 2.5. Bestimme Idealerzeuger für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{R}[X, Y, Z]$, dessen Nullstellenmenge genau die vier Punkte

$$(2, 3, 4), (1, 1/5, 0), (0, 0, 1), (-1, -2, \sqrt{3}) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$$

sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 2.6. (3 Punkte)

Bestimme alle simultanen Lösungen der beiden Gleichungen

$$x^3 + y^2 = 2 \text{ und } 2xy = 3$$

für die Körper $K = \mathbb{Z}/(3)$, $\mathbb{Z}/(5)$ und $\mathbb{Z}/(7)$.

Aufgabe 2.7. (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$x^2 + y^2 + xy = 1$$

für die Körper $K = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_4$ und \mathbb{F}_8 . Man kann für die Körper diese Darstellungen verwenden.

Aufgabe 2.8. (3 Punkte)

Berechne die Schnittpunkte der beiden Kurven

$$C = V(x^2 + 2y^2 + 3xy + x - 2) \text{ und } L = V(4x + 3y - 5).$$

Aufgabe 2.9. (4 Punkte)

Es sei S das Nullstellengebilde in \mathbb{A}_K^3 , das durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

gegeben ist. Der Schnitt von S mit einer Ebene E ist eine Kurve und wird in E durch eine Gleichung in zwei (geeigneten) Variablen beschrieben. Finde eine solche Gleichung für die Ebenen

$$E_1 = V(x), E_2 = V(z - 1), E_3 = V(x + 2y + 3z), E_4 = V(3x - 2z).$$

3. VORLESUNG - DIE ZARISKI-TOPOLOGIE

In Proposition 2.8 haben wir gezeigt, dass die affin-algebraischen Teilmengen eines affinen Raumes die Axiome für abgeschlossene Mengen einer Topologie erfüllen. Diese Topologie nennt man die Zariski-Topologie.

Definition 3.1. In einem affinen Raum \mathbb{A}_K^n versteht man unter der *Zariski-Topologie* diejenige Topologie, bei der die affin-algebraischen Mengen als abgeschlossen erklärt werden.

Die offenen Mengen der Zariski-Topologie sind also die Komplemente der affin-algebraischen Mengen. Sie werden zu einem Ideal \mathfrak{a} mit

$$D(\mathfrak{a}) = \mathbb{A}_K^n \setminus V(\mathfrak{a})$$

Die Zariski-Topologie weicht sehr stark von anderen Topologien ab, insbesondere von solchen, die durch eine Metrik gegeben sind. Insbesondere ist die Zariski-Topologie nicht hausdorffsch. Generell kann man sagen, dass die offenen Mengen (außer der leeren Menge) in der Zariski-Topologie sehr groß sind (siehe Aufgabe 3.12), während die abgeschlossenen (also die affin-algebraischen Mengen) sehr dünn sind (außer dem ganzen Raum selbst).



Beispiel 3.2. Die Zariski-Topologie auf der affinen Geraden \mathbb{A}_K^1 lässt sich einfach beschreiben. Als (Zariski)-abgeschlossene Teilmenge haben wir zunächst einmal die gesamte affine Gerade, die durch $V(0)$ beschrieben wird. Alle anderen abgeschlossenen Teilmengen werden durch $V(\mathfrak{a})$ mit $\mathfrak{a} \neq 0$ beschrieben. Da $K[X]$ ein Hauptidealbereich ist, kann man sogar $\mathfrak{a} = (f)$, $f \neq 0$, ansetzen. Die zugehörige Nullstellenmenge besteht also aus endlich vielen Punkten. Andererseits ist jeder einzelne Punkt P mit der Koordinate a die einzige Nullstelle des linearen Polynoms $X - a$, also ist $\{P\} = V(X - a)$ Zariski-abgeschlossen. Eine endliche Ansammlung von Punkten P_1, \dots, P_k mit den Koordinaten a_1, \dots, a_k ist die Nullstellenmenge des Polynoms $(X - a_1) \cdots (X - a_k)$. Die Zariski-abgeschlossenen Mengen der affinen Geraden bestehen also aus allen endlichen Teilmengen (einschließlich der leeren) und der gesamten Menge.

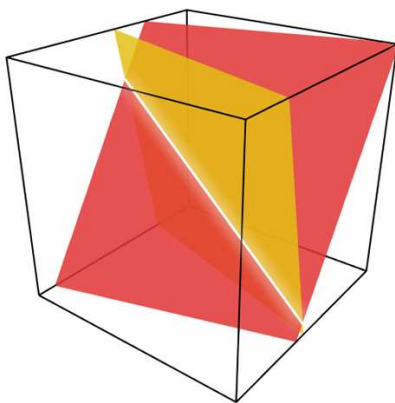
Beispiel 3.3. Jeder Punkt

$$P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_K^n$$

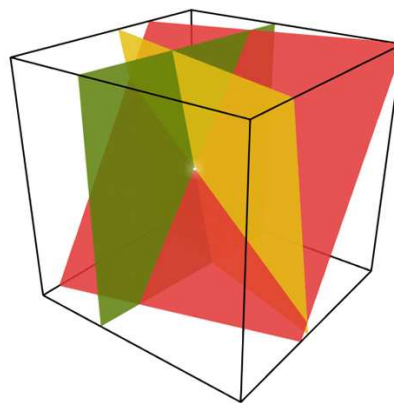
ist Zariski-abgeschlossen, und zwar ist

$$P = V(X_1 - a_1, X_2 - a_2, \dots, X_n - a_n).$$

Punkte sind (neben der leeren Menge und dem gesamten Raum) die einfachsten affin-algebraischen Mengen. Das Ideal $(X_1 - a_1, X_2 - a_2, \dots, X_n - a_n)$ ist maximal, siehe Aufgabe 2.2.



Der Schnitt von zwei und



von drei Ebenen

Das Verschwindungsideal

Definition 3.4. Sei $T \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine Teilmenge. Dann nennt man

$$\{F \in K[X_1, \dots, X_n] \mid F(P) = 0 \text{ für alle } P \in T\}$$

das *Verschwindungsideal* zu T . Es wird mit $\text{Id}(T)$ bezeichnet.

Es handelt sich dabei in der Tat um ein Ideal: Wenn $F(P) = 0$ und $G(P) = 0$ ist für alle $P \in T$, so gilt dies auch für die Summe $F + G$ und für jedes Vielfache HF .

Damit haben wir zwei Zuordnungen in entgegengesetzte Richtung: Einer Teilmenge im affinen Raum wird das Verschwindungsideal zugeordnet und einem Ideal im Polynomring das zugehörige Nullstellengebilde. Wir interessieren uns dafür, inwiefern sich Ideale und Nullstellengebilde entsprechen.

Beispiel 3.5. Das Verschwindungsideal zur leeren Menge ist das Einheitsideal, da es keinen Punkt gibt, auf dem die Nullstellenbedingung überprüft werden müsste.

Das Verschwindungsideal zum Gesamtraum \mathbb{A}_K^n hängt vom Körper ab. Wenn dieser unendlich ist, so gibt es nur das Nullpolynom, das überall verschwindet, und folglich ist das Verschwindungsideal gleich dem Nullideal.

Ist hingegen der Körper endlich mit q Elementen, so ist $x^q - x = 0$ für jedes $x \in K$. Also verschwindet das Polynom $X^q - X$ auf jedem Punkt der affinen Geraden und gehört somit zum Verschwindungsideal der affinen Geraden. In höherer Dimension ist das Verschwindungsideal gleich $(X_1^q - X_1, X_2^q - X_2, \dots, X_n^q - X_n)$.

Beispiel 3.6. Sei $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_K^n$. Dann ist das Verschwindungsideal $\text{Id}(P)$ gleich dem Ideal $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$. Zunächst ist klar, dass die linearen Polynome $X_i - a_i$ im Punkt P verschwinden (wegen $(X_i - a_i)(P) = a_i - a_i = 0$). Damit gehört auch das von diesen Polynomen erzeugte Ideal zum Verschwindungsideal. Sei umgekehrt F ein Polynom mit $F(P) = 0$. Wir schreiben F in den „neuen Variablen“

$$\tilde{X}_1 = X_1 - a_1, \dots, \tilde{X}_n = X_n - a_n,$$

indem wir X_i durch $X_i - a_i + a_i$ ersetzen. In den neuen Variablen sei $F = \sum_{\nu} b_{\nu} \tilde{X}^{\nu}$. Dieses Polynom besteht aus der Konstanten b_0 , in jedem anderen Monom kommt mindestens eine Variable vor. Also können wir schreiben

$$F = F_1 \tilde{X}_1 + \dots + F_n \tilde{X}_n + c,$$

mit gewissen Polynomen F_i . Daher ist $F(P) = c = 0$ und $F \in (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$.

Lemma 3.7. Seien $V \subseteq W \subseteq \mathbb{A}_K^n$ zwei Teilmengen. Dann gilt für die zugehörigen Verschwindungsideale die Inklusion

$$\text{Id}(W) \subseteq \text{Id}(V).$$

Beweis. Sei $F \in \text{Id}(W)$, d.h. es ist $F(P) = 0$ für alle $P \in W$. Dann ist erst recht $F(P) = 0$ für alle $P \in V$. Also ist auch $F \in \text{Id}(V)$. \square

Lemma 3.8. Sei $I \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal und sei $T \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine Teilmenge. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Es ist $T \subseteq V(\text{Id}(T))$.
- (2) Es ist $I \subseteq \text{Id}(V(I))$.
- (3) Es ist $V(I) = V(\text{Id}(V(I)))$.
- (4) Es ist $\text{Id}(T) = \text{Id}(V(\text{Id}(T)))$.

Beweis. (1). Sei $P \in T$ ein Punkt. Dann verschwindet nach Definition jedes Polynom $F \in \text{Id}(T)$ auf T , also $P \in V(\text{Id}(T))$.

(2). Sei $F \in I$. Dann verschwindet F auf ganz $V(I)$ und daher $F \in \text{Id}(V)$.

(3). Nach (1), angewandt auf $T = V(I)$, haben wir die Inklusion „ \subseteq “. Nach (2) ist $I \subseteq \text{Id}(V(I))$. Wendet man darauf $V(-)$ an, so ergibt sich nach Lemma 2.7 die andere Inklusion.

(4). Wie (3). \square

Beispiel 3.9. Die Inklusionen in Lemma 3.8 (1), (2) sind echt. Sei zum Beispiel $T \subset \mathbb{A}_K^1$ eine unendliche echte Teilmenge (was voraussetzt, dass K unendlich ist). Dann ist $\text{Id}(T) = 0$, und also ist $V(0) = \mathbb{A}_K^1$ echt größer als T .

Zu (2). Sei $I = (X^2)$, $R = K[X]$. Dann ist $V(I) = \{0\}$ und $\text{Id}(\{0\}) = (X)$, aber $X \notin (X^2)$. Ein extremeres Beispiel für $R = \mathbb{R}[X, Y]$ ist $I = (X^2 + Y^2)$ mit $V(I) = \{(0, 0)\}$. Das Verschwindungsideal zu diesem Punkt ist aber das Ideal (X, Y) .

Lemma 3.10. Sei $T \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine Teilmenge. Dann ist der Zariski-Abschluss von T gleich

$$\bar{T} = V(\text{Id}(T)).$$

Beweis. Die Inklusion $T \subseteq V(\text{Id}(T))$ wurde in Lemma 3.8 (1) gezeigt. Da $V(\text{Id}(T))$ nach Definition abgeschlossen ist, folgt daraus $\bar{T} \subseteq V(\text{Id}(T))$.

Sei umgekehrt $P \in V(\text{Id}(T))$ und sei $P \notin \bar{T}$ angenommen. Dies bedeutet, dass es eine Zariski-offene Menge U gibt mit $P \in U$ und $U \cap T = \emptyset$. Sei $U = D(\mathfrak{a})$. Die Bedingung $P \in U$ bedeutet, dass es ein $G \in \mathfrak{a}$ geben muss mit $G(P) \neq 0$. Es ist dann $P \in D(G) \subseteq U$ und damit $T \cap D(G) = \emptyset$. Also ist $T \subseteq V(G)$ und somit $G \in \text{Id}(T)$. Wegen $G(P) \neq 0$ ergibt sich ein Widerspruch zu $P \in V(\text{Id}(T))$. \square

Das Radikal

Definition 3.11. Ein Ideal \mathfrak{a} in einem kommutativen Ring R heißt *Radikal* (oder *Radikalideal*), wenn folgendes gilt: falls $f^n \in \mathfrak{a}$ ist für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist bereits $f \in \mathfrak{a}$.

Definition 3.12. Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann nennt man die Menge

$$\{f \in R \mid \text{es gibt ein } r \text{ mit } f^r \in \mathfrak{a}\}$$

das *Radikal* zu \mathfrak{a} . Es wird mit $\text{rad}(\mathfrak{a})$ bezeichnet.

Das Radikal zu einem Ideal ist selbst ein Radikal und insbesondere ein Ideal.

Lemma 3.13. Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann ist das Radikal zu \mathfrak{a} ein Radikalideal.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass ein Ideal vorliegt. 0 gehört offenbar zum Radikal und mit $f \in \text{rad}(\mathfrak{a})$, sagen wir $f^r \in \mathfrak{a}$, ist auch $(af)^r = a^r f^r \in \mathfrak{a}$, also gehört af zum Radikal. Zur Summeneigenschaft seien $f, g \in \text{rad}(\mathfrak{a})$ mit $f^r \in \mathfrak{a}$ und $g^s \in \mathfrak{a}$. Dann ist

$$\begin{aligned} (f+g)^{r+s} &= \sum_{i+j=r+s} \binom{r+s}{i} f^i g^j = \sum_{i+j=r+s, i < r} \binom{r+s}{i} f^i g^j \\ &\quad + \sum_{i+j=r+s, i \geq r} \binom{r+s}{i} f^i g^j \in \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Sei nun $f^k \in \text{rad}(\mathfrak{a})$. Dann ist $(f^k)^r = f^{kr} \in \mathfrak{a}$, also $f \in \text{rad}(\mathfrak{a})$. □

Lemma 3.14. Sei $T \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine Teilmenge. Dann ist das Verschwindungsideal zu T ein Radikal.

Beweis. Sei $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ ein Polynom, und sei $F^s \in \text{Id}(T)$. Dann ist $F^s(P) = 0$ für alle $P \in T$. Dann ist aber auch $F(P) = 0$ für alle $P \in V$, also $F \in \text{Id}(T)$. □

Wir werden später sehen, dass über einem algebraisch abgeschlossenen Körper sich Radikale und algebraische Nullstellengebilde entsprechen. Das ist der Inhalt des *Hilbertschen Nullstellensatzes*.

3. ARBEITSBLATT

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 3.1. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $n \geq 2$. Zeige, dass ein Punkt $P \in \mathbb{A}_K^n$ nicht die Nullstellenmenge zu einem einzigen Polynom ist.

Aufgabe 3.2. Es sei K ein endlicher Körper und $M = \{P_1, P_2, \dots, P_m\} \in \mathbb{A}_K^n$ eine endliche Menge von Punkten. Zeige, dass M die Nullstellenmenge eines einzigen Polynoms ist.

Aufgabe 3.3. Man beschreibe eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^1,$$

die bezüglich der Zariski-Topologie stetig ist, die aber nicht durch ein Polynom gegeben ist.

Aufgabe 3.4. Charakterisiere in \mathbb{Z} die Radikale mit Hilfe der Primfaktorzerlegung.

Aufgabe 3.5. Zeige, dass ein Ideal \mathfrak{a} in einem kommutativen Ring R genau dann ein Radikal ist, wenn der Restklassenring R/\mathfrak{a} reduziert ist.

Aufgabe 3.6. Zeige, dass ein Primideal ein Radikal ist.

Aufgabe 3.7. Seien R und S kommutative Ringe und sei $\varphi : R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Sei \mathfrak{a} ein Radikal in S . Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{a})$ ein Radikal in R ist.

Aufgabe 3.8. Seien \mathfrak{a} und \mathfrak{b} zwei Ideale in $K[X_1, \dots, X_n]$ derart, dass ihre Radikale gleich sind. Zeige, dass dann auch ihre Nullstellenmengen übereinstimmen. Zeige durch ein Beispiel, dass die Umkehrung nicht stimmt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.9. (3 Punkte)

Es sei $M = \{P_1, P_2, \dots, P_m\} \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$ eine endliche Menge von Punkten. Zeige, dass M die Nullstellenmenge eines einzigen Polynoms ist.

Aufgabe 3.10. (3 Punkte)

Zeige, dass die Menge der reellen trigonalisierbaren (2×2) -Matrizen im $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4$ keine affin-algebraische Menge ist.

Aufgabe 3.11. (3 Punkte)

Sei

$$\varphi : \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^m$$

eine Abbildung, die durch m Polynome in n Variablen gegeben sei. Zeige, dass φ stetig bezüglich der Zariski-Topologie ist.

Aufgabe 3.12. (5 Punkte)

Es sei K ein unendlicher Körper. Zeige, dass jede nichtleere Zariski-offene Menge $U \subseteq \mathbb{A}_K^n$ dicht ist.

Tipp: Induktion über n .

Aufgabe 3.13. (5 Punkte)

Bestimme zu den folgenden Teilmengen der affinen Ebene \mathbb{A}_K^2 den Zariski-Abschluss.

- (1) $\{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$,
- (2) $\{(\cos(x), \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$,
- (3) $\{(x, x^3) \mid 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$,
- (4) $\{(x, x^3) \mid 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{Q}\}$,
- (5) $\{(x, x^3) \mid x \in \mathbb{Z}/(5)\}$.

Die folgende Aufgabe benutzt einige weiterführende topologische Begriffe.

Aufgabe 3.14. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper.

- (1) Man zeige, dass für $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$ die Standardtopologie feiner ist als die Zariski-Topologie.
- (2) Man zeige, dass für $K[X]$ die Zariski-Topologie mit der kofiniten Topologie übereinstimmt. Gilt dies auch für $K[X_1, \dots, X_n]$ mit $n > 1$?

- (3) Wann ist die Zariski-Topologie T_1 , wann ist sie hausdorffsch?
 (4) Wie sieht die Zariski-Topologie aus, wenn K ein endlicher Körper ist?

4. VORLESUNG - IRREDUZIBILITÄT

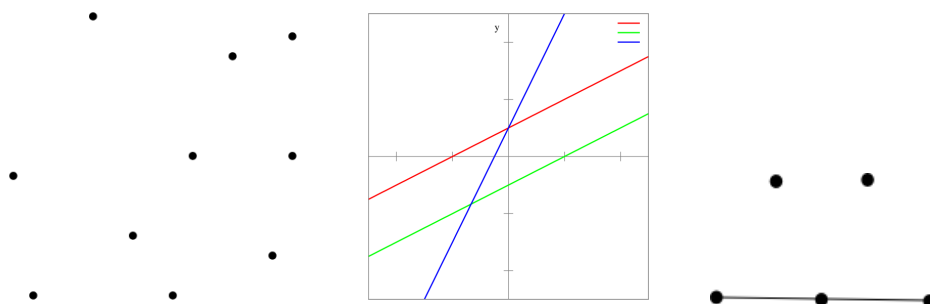
Irreduzible affin-algebraische Mengen

Definition 4.1. Eine affin-algebraische Menge $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ heißt *irreduzibel*, wenn $V \neq \emptyset$ ist und es keine Zerlegung $V = Y \cup Z$ mit affin-algebraischen Mengen $Y, Z \subset V$ gibt.

Die Zariski-abgeschlossene Menge V ist also irreduzibel genau dann, wenn $V \neq \emptyset$ ist und eine Zerlegung $V = Y \cup Z$ nur möglich ist mit $V = Y$ oder mit $V = Z$. Dasselbe folgt dann sofort für endliche Darstellungen.

Die Irreduzibilität ist eine rein topologische Eigenschaft, wobei man obige Definition mit abgeschlossenen Mengen formulieren muss anstatt mit affin-algebraischen Mengen (den abgeschlossenen Mengen in der Zariski-Topologie).

Die folgenden Bilder zeigen einige nicht irreduzible affin-algebraische Teilmengen. Was sind dabei die irreduziblen Komponenten (siehe unten)?



Beispiel 4.2. Wir betrachten den affinen Raum \mathbb{A}_K^n . Wenn K endlich ist, so besteht der Raum nur aus endlich vielen Punkten und nur die einpunktigen Teilmengen sind irreduzibel. Insbesondere ist der affine Raum außer bei $n = 0$ nicht irreduzibel.

Bei unendlichem K ist der affine Raum \mathbb{A}_K^n hingegen irreduzibel. Sei nämlich $\mathbb{A}_K^n = Y \cup Z$ mit echten affin-algebraischen Teilmengen. D.h. für die offenen Komplemente $U = \mathbb{A}_K^n \setminus Y$ und $W = \mathbb{A}_K^n \setminus Z$ ist einerseits $U, W \neq \emptyset$, aber $U \cap W = \emptyset$. Das widerspricht aber Aufgabe 3.13.

Lemma 4.3. Sei $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine affin-algebraische Menge mit Verschwindungsideal $\text{Id}(V)$. Dann ist V irreduzibel genau dann, wenn $\text{Id}(V)$ ein Primideal ist.

Beweis. Sei $\text{Id}(V)$ kein Primideal. Bei $\text{Id}(V) = K[X_1, \dots, X_n]$ ist $V = \emptyset$, also ist V nicht irreduzibel nach Definition. Andernfalls gibt es Polynome $F, G \in K[X_1, \dots, X_n]$ mit $FG \in \text{Id}(V)$, aber $F, G \notin \text{Id}(V)$. Dies bedeutet, dass es Punkte $P, Q \in V$ gibt mit $F(P) \neq 0$ und $G(Q) \neq 0$. Wir betrachten die beiden Ideale $\mathfrak{a}_1 = \text{Id}(V) + (F)$ und $\mathfrak{a}_2 = \text{Id}(V) + (G)$. Daher ist

$$V(\mathfrak{a}_1), V(\mathfrak{a}_2) \subseteq V(\text{Id}(V)) = V.$$

Wegen $P \notin V(\mathfrak{a}_1)$ und $Q \notin V(\mathfrak{a}_2)$ sind diese Inklusionen echt. Andererseits ist

$$V(\mathfrak{a}_1) \cup V(\mathfrak{a}_2) = V(\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2) = V(\text{Id}(V)) = V,$$

so dass eine nicht-triviale Zerlegung von V vorliegt und somit V nicht irreduzibel ist. Sei nun V nicht irreduzibel. Bei $V = \emptyset$ ist $\text{Id}(V) = K[X_1, \dots, X_n]$ kein Primideal. Sei also $V \neq \emptyset$ mit der nicht-trivialen Zerlegung $V = Y \cup Z$. Sei $Y = V(\mathfrak{a}_1)$ und $Z = V(\mathfrak{a}_2)$. Wegen $Y \subset V$ gibt es einen Punkt $P \in V = V(\text{Id}(V))$, $P \notin V(\mathfrak{a}_1)$. Also gibt es auch ein $F \in \mathfrak{a}_1$, $F(P) \neq 0$, und somit $F \notin \text{Id}(V)$. Ebenso gibt es $G \in \mathfrak{a}_2$, $G \notin \text{Id}(V)$. Für einen beliebigen Punkt $Q \in V = Y \cup Z$ ist $(FG)(Q) = 0$, da F auf Y und G auf Z verschwindet. Also ist $FG \in \text{Id}(V)$ und daher ist $\text{Id}(V)$ kein Primideal. \square

Definition 4.4. Sei V eine affin-algebraische Menge. Eine affin-algebraische Teilmenge $W \subseteq V$ heißt eine *irreduzible Komponente* von V , wenn sie irreduzibel ist und wenn es keine irreduzible Teilmenge $W \subset W' \subseteq V$ gibt.

Ist V irreduzibel, so ist V selbst die einzige irreduzible Komponente von V . Wir werden später sehen, dass jede affin-algebraische Menge sich schreiben lässt als eine endliche Vereinigung von irreduziblen Komponenten.

Beispiel 4.5. Wir betrachten die Gleichung

$$F = Y^2 + X^2(X + 1)^2 = 0.$$

In den reellen Zahlen hat diese Gleichung zwei Lösungen: da ein reelles Quadrat nie negativ ist, kann F nur dann 0 sein, wenn beide Summanden null sind, und das impliziert einerseits $Y = 0$ und andererseits $X = 0$ oder $X = -1$. Insbesondere ist die reelle Lösungsmenge nicht zusammenhängend und nicht irreduzibel (und das Verschwindungsideal zur reellen Situation ist sehr groß).

Betrachtet man F dagegen über den komplexen Zahlen, so gibt es eine Faktorisierung

$$F = (Y + iX(X + 1))(Y - iX(X + 1))$$

in irreduzible Polynome. Dies zeigt zugleich, dass F als Polynom in $\mathbb{R}[X, Y]$ irreduzibel ist (obwohl das reelle Nullstellengebilde nicht irreduzibel ist). Die Nullstellenmenge über den komplexen Zahlen besteht aus den beiden Graphen $Y = \pm iX(X + 1)$, die sich in $(0, 0)$ und $(-1, 0)$ schneiden.

Bei der Gleichung $Y^2 + Z^2 + X^2(X + 1)^2$ gibt es wieder nur zwei reelle Lösungspunkte, das Polynom ist aber sowohl reell als auch komplex betrachtet irreduzibel.



Beispiel 4.6. Wir betrachten im affinen Raum \mathbb{A}_K^3 ($K = \mathbb{R}$) die beiden Zylinder

$$S_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\} \text{ und } S_2 = \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 = 1\} .$$

Das sind beides irreduzible Mengen, wie wir später sehen werden (für K unendlich). Wie sieht ihr Durchschnitt aus? Der Durchschnitt wird beschrieben durch das Ideal \mathfrak{a} , das durch $X^2 + Y^2 - 1$ und $Y^2 + Z^2 - 1$ erzeugt wird. Zieht man die eine Gleichung von der anderen ab, so erhält man

$$X^2 - Z^2 = (X - Z)(X + Z)\mathfrak{a} .$$

Die beiden einzelnen Faktoren gehören aber nicht zu \mathfrak{a} , da beispielsweise $(1, 0, -1)$ ein Punkt des Schnittes ist, an dem $X - Z$ nicht verschwindet (Charakteristik $\neq 2$), und $(1, 0, 1)$ ein Punkt des Schnittes ist, an dem $X + Z$ nicht verschwindet. Die Komponenten des Schnittes werden vielmehr beschrieben durch

$$\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a} + (X - Z) \text{ und } \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a} + (X + Z) .$$

Das sind beides Primideale, der Restklassenring ist

$$K[X, Y, Z]/(\mathfrak{b}_1) = K[X, Y, Z]/(\mathfrak{a} + (X - Z)) = K[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1) .$$

Um die zweite Gleichung einzusehen, eliminiert man Z mit der hinteren Gleichung, und die beiden Zylindergleichungen werden dann identisch. Ebenso ist die Argumentation für das andere Ideal. Geometrisch gesprochen heißt

dies, dass ein Punkt des Durchschnittes $S_1 \cap S_2$ in der Ebene $E_1 = V(Z - X)$ oder in der Ebene $E_2 = V(Z + X)$ liegt. Es ist

$$E_1 \cap S_1 = E_1 \cap S_1 \cap S_2 = E_1 \cap S_2$$

und ebenso für E_2 , da auf diesen Ebenen die beiden Zylindergleichungen identisch werden.

Wie sehen die Durchschnitte in den Ebenen aus? Wir betrachten die Ebene E_1 mit den Koordinaten Y und $U = Z + X$. Es ist dann $X = \frac{1}{2}((Z + X) - (Z - X))$ und damit kann man die erste Zylindergleichung als

$$\left(\frac{1}{2}((Z + X) - (Z - X))\right)^2 + Y^2 = 1$$

schreiben. Auf der Ebene E_1 , die ja durch $Z = X$ festgelegt ist, wird aus dieser Gleichung

$$\left(\frac{1}{2}U\right)^2 + Y^2 = 1,$$

also $\frac{1}{4}U^2 + Y^2 = 1$. Dies ist die Gleichung einer *Ellipse*, was auch anschaulich klar ist. Man beachte, dass in der obigen Berechnung des Restklassenringes $K[X, Y, Z]/(\mathfrak{b}_1)$ aber eine Kreisgleichung auftritt. Dies sollte deshalb nicht überraschen, da Kreis und Ellipse durch eine lineare Variablentransformation ineinander überführbar sind und dass daher insbesondere die Restklassenringe isomorph sind. Als *metrisches Gebilde* sind Kreis und Ellipse verschieden, und der Durchschnitt der beiden Zylinder besteht aus zwei Ellipsen. Bei einer *orthonormalen Variablentransformation* bleibt die metrische Struktur erhalten. Die Variablen $Y, (X + Z), (X - Z)$ definieren aber keine orthonormale Transformation.

Halten wir also fest: Der Durchschnitt der beiden Zylinder ist

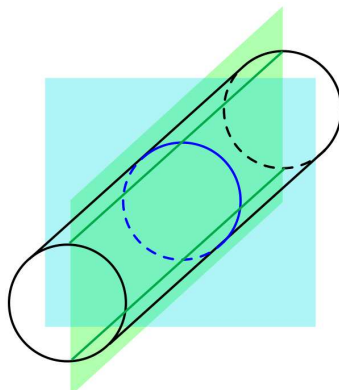
$$S_1 \cap S_2 = V(\mathfrak{b}_1) \cup V(\mathfrak{b}_2),$$

wobei $\mathfrak{b}_1 = (X^2 + Y^2 - 1, X - Z)$ und $\mathfrak{b}_2 = (X^2 + Y^2 - 1, X + Z)$ zwei Ellipsen beschreiben.

Wie liegen diese beiden Ellipsen zueinander? Dazu berechnen wir ihren Durchschnitt, der durch die Summe von \mathfrak{b}_1 und \mathfrak{b}_2 beschrieben wird. Es ist

$$\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 = (X^2 + Y^2 - 1, X - Z, X + Z) = (Y^2 - 1, X, Z).$$

Die Lösungsmenge davon besteht aus den beiden Punkten $(0, 1, 0)$ und $(0, -1, 0)$.



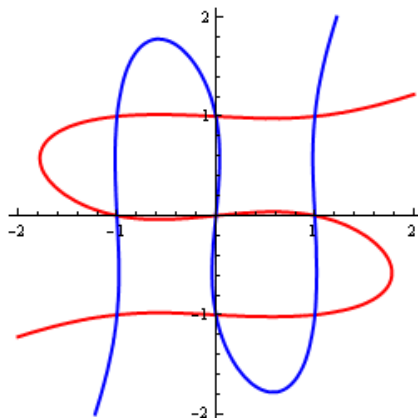
Zur Anzahl der Punkte auf Kurven

Wir haben bereits gesehen, dass der Schnitt einer Kurven mit einer Geraden nur aus endlich vielen Punkten besteht, es sei denn, die Gerade sei selbst eine Komponente der Kurve (siehe Lemma 1.6). Dies wollen wir zunächst auf den Schnitt von zwei beliebigen ebenen Kurven verallgemeinern. Als Hilfsmittel benötigen wir die folgende Definition.

Definition 4.7. Sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring in einer Variablen über K . Dann nennt man den Quotientenkörper $Q(K[X])$ den *rationalen Funktionenkörper* über K (oder *Körper der rationalen Funktionen* über K). Er wird mit $K(X)$ bezeichnet.

Satz 4.8. Sei K ein Körper und seien $F, G \in K[X, Y]$ zwei Polynome ohne gemeinsamen nichtkonstanten Faktor. Dann gibt es nur endlich viele Punkte P_1, \dots, P_n mit $P_i \in V(F, G)$.

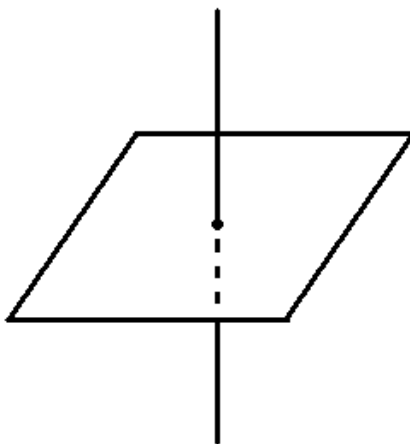
Beweis. Wir betrachten $F, G \in K[X, Y]$ als Elemente in $K(X)[Y]$, wobei $K(X)$ den Körper der rationalen Funktionen in X bezeichne. Es haben dann nach Aufgabe 4.10 auch F und G keinen gemeinsamen Teiler in $K(X)[Y]$. Da dieser Ring ein Hauptidealbereich ist, erzeugen sie zusammen das Einheitsideal, d.h. es gibt Polynome $A, B \in K(X)[Y]$ mit $AF + BG = 1$. Multiplikation mit dem Hauptnenner von A und B ergibt in $K[X, Y]$ die Gleichung $\tilde{A}F + \tilde{B}G = H$ mit $H \in K[X]$. Eine gemeinsame Nullstelle in \mathbb{A}_K^2 von F und von G muss also eine Nullstelle von H sein. Es gibt also nur endlich viele Werte für X , für die eine gemeinsame Nullstelle vorliegt. Wenn man die Rollen von X und von Y vertauscht, so sieht man, dass es auch nur endlich viele Werte für Y gibt, an denen eine gemeinsame Nullstelle vorliegen kann. Damit kann es überhaupt nur endlich viele gemeinsame Nullstellen geben. \square



4. ARBEITSBLATT

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 4.1. Finde ein Ideal, dessen Nullstellenmenge das folgende Gebilde ist.



Aufgabe 4.2. Sei $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine Teilmenge, die aus endlich vielen Punkten bestehe. Zeige: V ist genau dann irreduzibel, wenn V einpunktig ist.

Aufgabe 4.3. Skizziere ein Beispiel einer *zusammenhängenden*, aber nicht irreduziblen affin-algebraischen Teilmenge.

Aufgabe 4.4. Betrachte die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} mit der metrischen Topologie. Ist \mathbb{R} irreduzibel?

Aufgabe 4.5. Sei p eine Primzahl und $\mathbb{Z}/(p)$ der zugehörige Restklassenkörper. Zeige: Jede Quadrik der Form

$$F = aX^2 + bY^2 + c = 0$$

mit $a, b \neq 0$ hat mindestens eine Lösung in $\mathbb{Z}/(p)$.

Aufgabe 4.6. Erkläre, wo der Beweis zu Satz 4.8 zusammenbricht, wenn man ihn auf mehr als zwei Variablen ausdehnen will.

Aufgabe 4.7. Seien R und S kommutative Ringe und sei $\varphi : R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Sei \mathfrak{p} ein Primideal in S . Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal in R ist.

Zeige durch ein Beispiel, dass das Urbild eines maximalen Ideales kein maximales Ideal sein muss.

In den folgenden Aufgabe werden die Begriffe *abgeschlossene Abbildung* und *offene Abbildung* verwendet.

Eine stetige Abbildung

$$f : X \longrightarrow Y$$

zwischen topologischen Räumen X und Y heißt *abgeschlossen*, wenn Bilder von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen sind.

Sie heißt *offen*, wenn Bilder von offenen Mengen wieder offen sind.

Aufgabe 4.8. Zeige, dass die Projektion

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}^1, (x, y) \longmapsto x,$$

nicht abgeschlossen in der Zariski-Topologie ist.

Aufgabe 4.9. Zeige, dass eine ebene algebraische Kurve über den komplexen Zahlen \mathbb{C} nicht kompakt in der metrischen Topologie ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 4.10. (3 Punkte)

Berechne in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ den Schnitt des Zylinders $V(x^2 + y^2 - 1)$ mit der Kugel mit Mittelpunkt $P = (0, 0, 0)$ und Radius r in Abhängigkeit von r . Wann ist der Durchschnitt leer, wann irreduzibel?

Man darf verwenden, dass der reelle Kreis irreduzibel ist.

Aufgabe 4.11. (6 Punkte)

Sei p eine Primzahl ≥ 3 und $\mathbb{Z}/(p)$ der zugehörige Restklassenkörper. Es sei ein Polynom $F \in \mathbb{Z}/(p)[X, Y]$ der Form

$$F = \alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2 + \delta X + \epsilon Y + \eta$$

gegeben. Zeige, dass für das zugehörige Nullstellengebilde $V(F) \subseteq \mathbb{A}_K^2$ (wenn α, β, γ nicht alle null sind, so ist das eine Quadrik) die folgenden drei Alternativen bestehen.

- (1) $V(F)$ besitzt mindestens einen Punkt.
- (2) $F = c$ mit einer Konstanten $c \neq 0$.
- (3) Es gibt eine Variablentransformation derart, dass das Polynom in den neuen Koordinaten die Gestalt $Z^2 - u$ mit einem Nichtquadrat $u \in \mathbb{Z}/(p)$ besitzt.

Aufgabe 4.12. (3 Punkte)

Sei V eine irreduzible, affin-algebraische Menge mit mindestens zwei Punkten und seien $P_1, \dots, P_m \in V$ endlich viele Punkte darin. Zeige, dass dann auch $V \setminus \{P_1, \dots, P_m\}$ (in der induzierten Topologie) irreduzibel ist.

Aufgabe 4.13. (4 Punkte)

Sei R ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper $Q(R)$. Zeige: Wenn $F, G \in R[X]$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen, so besitzen sie aufgefasst in $Q(R)[X]$ ebenfalls keinen gemeinsamen Teiler.

(Man darf sich auf Hauptidealbereiche R beschränken.)

Aufgabe 4.14. (3 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen. Begründe, ob

$$V(X^2 + Y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^2$$

irreduzibel ist oder nicht.

Aufgabe 4.15. (4 Punkte)

Zeige, dass die Projektion

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^1, (x, y) \longmapsto x,$$

offen in der Zariski-Topologie ist.

Aufgabe 4.16. (4 Punkte)

Zeige, dass die affine Ebene \mathbb{A}_K^2 mit der Zariski-Topologie kompakt ist.

5. VORLESUNG - POLYNOMIALE ABBILDUNGEN

Das Hauptziel dieser Vorlesung ist zu zeigen, dass eine ebene algebraische Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper unendlich viele Elemente besitzt. Dazu brauchen wir einige Vorbereitungen über die homogene Zerlegung von Polynomen und über polynomiale Abbildungen, insbesondere Variablentransformationen.

Homogene Komponenten

Definition 5.1. Sei S ein kommutativer Ring und $R = S[X_1, \dots, X_n]$ der Polynomring über R in n Variablen. Dann heißt zu einem Monom

$$G = X^\nu = X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n}$$

die Zahl

$$|\nu| = \sum_{j=1}^n \nu_j$$

der *Grad* von G . Zu einem Polynom $F = \sum_{\nu} a_{\nu} X^{\nu} \neq 0$ heißt das Maximum

$$\max\{|\nu| : a_{\nu} \neq 0\}$$

der *Grad* von F .

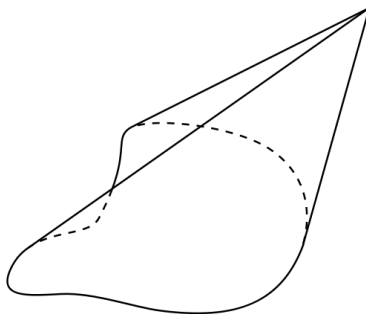
Definition 5.2. Sei S ein kommutativer Ring und $R = S[X_1, \dots, X_n]$ der Polynomring über R in n Variablen. Dann heißt zu einem Polynom $F \in R$ mit $F = \sum_{\nu} a_{\nu} X^{\nu}$ die Zerlegung

$$F = \sum_{i=0}^d F_i$$

mit

$$F_i = \sum_{\nu, |\nu|=i} a_{\nu} X^{\nu}$$

die *homogene Zerlegung* von F . Die F_i nennt man die *homogenen Komponenten* von F zum Grad i . Das Polynom F selbst heißt *homogen*, wenn in der homogenen Zerlegung von F nur ein F_i vorkommt.



Die Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms F ist ein (Geraden-)Kegel durch den Nullpunkt. D.h. mit einem Punkt P gehört auch die ganze Gerade durch P und 0 zu $V(F)$.

Beispiel 5.3. Das Polynom

$$F = 4X^3YZ^2 + 2X^2Y^5 + 5XYZ^7 - 3X^4YZ^4 + X^8 - Y^7 + 2Y^6Z^3 + X + 5$$

hat den Grad 9 und die homogenen Komponenten sind

$$F_9 = 5XYZ^7 - 3X^4YZ^4 + 2Y^6Z^3,$$

$$F_8 = X^8,$$

$$F_7 = 2X^2Y^5 - Y^7,$$

$$F_6 = 4X^3YZ^2,$$

$$F_5 = F_4 = F_3 = F_2 = 0,$$

$$F_1 = X \text{ und } F_0 = 5.$$

Wenn man es als Polynom in $(K[Y, Z])[X]$ auffasst und sich nur dafür interessiert, in welcher Potenz X vorkommt, so spricht man vom X -Grad. Der X -Grad von F ist 8. Es gibt natürlich auch eine homogene Zerlegung entlang der X -Graduierung; dabei ist beispielsweise die Komponente zum X -Grad 0 gleich $-Y^7 + 2Y^6Z^3 + 5$ und zum X -Grad 1 gleich $5XYZ^7 + X$.

Zur Anzahl der Punkte auf Kurven II

Der folgende Satz heißt Noethersche Normalisierung (für Kurven).

Satz 5.4. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \in K[X, Y]$ ein nicht-konstantes Polynom vom Grad d , das die algebraische Kurve $C = V(F)$ definiert. Dann gibt es eine lineare Koordinatentransformation derart, dass in den neuen Koordinaten \tilde{X}, \tilde{Y} das transformierte Polynom die Form*

$$\tilde{F} = \tilde{X}^d + \text{Terme von kleinerem Grad in } \tilde{X}$$

besitzt.

Beweis. Wir schreiben F in homogener Zerlegung als

$$F = F_d + F_{d-1} + \dots + F_1 + F_0$$

mit den homogenen Komponenten

$$F_i = \sum_{a+b=i} c_{a,b} X^a Y^b.$$

Ein homogenes Polynom in zwei Variablen hat die gleichen Faktorisierungseigenschaften wie ein Polynom in einer Variablen. Da wir uns über einem algebraisch abgeschlossenen Körper befinden, gibt es eine Faktorisierung

$$F_d = c(Y - e_1 X) \cdots (Y - e_k X) X^{d-k}.$$

Da c eine d -te Wurzel besitzt können wir durch Streckung der Variablen erreichen, dass $c = 1$ ist. Da K insbesondere unendlich ist, finden wir ein e , das von allen e_j verschieden ist. Wir schreiben die Gleichung in den neuen Variablen

$$\tilde{Y} = Y - eX \text{ und } \tilde{X} = X$$

und erhalten eine Gleichung \tilde{F} , wo die Linearfaktoren von \tilde{F}_d die Gestalt

$$\begin{aligned} Y - e_j X &= Y - eX + eX - e_j X \\ &= \tilde{Y} - (e_j - e)X \\ &= \tilde{Y} - (e_j - e)\tilde{X} \end{aligned}$$

(mit $e_j - e \neq 0$) bzw. $\tilde{X} = X$ haben. Multipliziert man dies aus so sieht man, dass \tilde{X}^d mit einem bestimmten Vorfaktor aus K vorkommt, den wir wieder durch Streckung als 1 annehmen können. Dann hat \tilde{F}_d die Gestalt $\tilde{X}^d +$ Terme, in denen maximal \tilde{X}^{d-1} vorkommt. Die homogenen Komponenten von kleinerem Grad behalten auch ihren Grad, so dass in \tilde{F} nur noch weitere Monome vom \tilde{X} -Grad $\leq d - 1$ gibt. \square

Korollar 5.5. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \in K[X, Y]$ ein nicht-konstantes Polynom, das die algebraische Kurve $C = V(F)$ definiert. Dann besitzt C unendlich viele Elemente.*

Beweis. Aufgrund von Satz 5.4 können wir annehmen, dass F die Gestalt hat

$$F = X^d + P_{d-1}(Y)X^{d-1} + \dots + P_1(Y)X + P_0(Y)$$

mit Polynomen $P_i(Y) \in K[Y]$. Zu jedem beliebig vorgegebenen Wert $a \in K$ für Y ergibt sich also ein normiertes Polynom in X vom Grad d . Da der Körper algebraisch abgeschlossen ist, gibt es jeweils (mindestens) eine Nullstelle in X . D.h. zu jedem $a \in K$ gibt es ein $b \in K$ derart, dass (a, b) eine Nullstelle von F ist, also zur Kurve gehört. Da K unendlich ist, gibt es also unendlich viele Punkte auf der Kurve. \square

Der Beweis zeigt genauer, dass jede Kurve mindestens so viele Punkte besitzt wie der algebraisch abgeschlossene Grundkörper.

Beispiel 5.6. Die durch $xy = 1$ gegebene Hyperbel lässt sich unter Verwendung der linearen Transformation $x = u + v$, $y = u$ wegen

$$xy - 1 = (u + v)u - 1 = u^2 + vu - 1$$

auch als $V(u^2 + vu - 1)$ beschreiben. In den neuen Variablen u, v kann man v beliebig vorgeben und erhält stets mindestens eine (fast immer zwei) Lösung der Kurvengleichung.

Polynomiale Abbildungen zwischen affinen Räumen

Wir betrachten nun Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{A}_K^r &\longrightarrow \mathbb{A}_K^n, (t_1, \dots, t_r) \longmapsto (\varphi_1(t_1, \dots, t_r), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_r)) \\ &= (x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

wobei die Komponentenfunktionen $\varphi_i \in K[X_1, \dots, X_r]$ Polynome sind. Die Abbildung wird also in jeder Komponenten durch ein Polynom in r Variablen gegeben. Der Fall $n = 1$ ist der eines Polynoms in r Variablen, der Fall $r = 1$ und $n = 2$ ist der Fall der polynomialen Parametrisierung von algebraischen Kurven. Später werden wir allgemeiner Morphismen zwischen affin-algebraischen Mengen definieren.

Eine wichtige „Begleiterscheinung“ einer polynomialen Abbildung $\varphi: \mathbb{A}_K^r \rightarrow \mathbb{A}_K^n$ ist, dass sie einen *K-Algebra-Homomorphismus* zwischen den zugehörigen Polynomringen in die entgegengesetzte Richtung induziert, nämlich den durch $X_i \mapsto \varphi_i$ definierten *Einsetzungshomomorphismus*. Diesen bezeichnen wir mit

$$\tilde{\varphi}: K[X_1, \dots, X_r] \longrightarrow K[T_1, \dots, T_r], F \longmapsto F \circ \varphi = F\left(\frac{\varphi_i}{X_i}\right)$$

(die Schreibweise $\frac{\varphi_i}{X_i}$ bedeutet, dass die Variable X_i durch φ_i zu ersetzen ist). Als Funktion auf \mathbb{A}_K^r betrachtet ist $F \circ \varphi$ die *hintereinandergeschaltete Abbildung*

$$\mathbb{A}_K^r \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}_K^n \xrightarrow{F} \mathbb{A}_K^1.$$

Für die Nullstellenmenge $V(F) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ gilt dabei

$$\varphi^{-1}(V(F)) = V(\tilde{\varphi}(F)).$$

Die einfachsten polynomialen Abbildungen sind, neben den *konstanten Abbildungen*, die *affin-linearen Abbildungen*, die durch affin-lineare Polynome gegeben sind, also

$$\varphi_i = a_{i1}T_1 + \dots + a_{ir}T_r + c_i.$$

Man beachte, dass dies keine linearen Abbildungen sind, da der Nullpunkt nicht auf den Nullpunkt gehen muss, sondern auch *Verschiebungen* zugelassen sind. Eine affin-lineare Abbildung ist die Hintereinanderschaltung einer linearen Abbildung und einer Verschiebung. Im Fall $r = n$ betrachtet man eine solche affin-lineare Abbildung, wenn sie zusätzlich bijektiv ist, als eine (*Koordinaten- oder Variablen-*)*Transformation* des Raumes.

Definition 5.7. Sei K ein Körper. Dann nennt man eine Abbildung $\varphi: \mathbb{A}_K^n \rightarrow \mathbb{A}_K^n$ der Form

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = M \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} + (v_1, \dots, v_n),$$

wobei M eine invertierbare Matrix ist, eine *affin-lineare Variablentransformation*.

Man kann sich dabei darüber streiten, ob bei einer linearen Variablentransformation im Raum etwas bewegt wird oder ob sich nur die Koordinaten ändern. Jedenfalls sind solche Transformationen wichtige Hilfsmittel, um ein Polynom, ein algebraisches Gleichungssystem oder eine affin-algebraische Menge auf eine einfachere Gestalt zu bringen. Unter einer Variablentransformation wird eine affin-algebraische Menge $V = V(F_1, \dots, F_m)$ zu $\tilde{V} = V(\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_m)$ (mit $\tilde{F}_i = \tilde{\varphi}(F_i)$) transformiert, und zwar ist dann \tilde{V} das Urbild unter der Abbildung φ .

Definition 5.8. Zwei affin-algebraische Mengen $V, \tilde{V} \subseteq \mathbb{A}_K^n$ heißen *affin-linear äquivalent*, wenn es eine affin-lineare Variablentransformation φ gibt mit $\varphi^{-1}(V) = \tilde{V}$.

Dies ist also ein Begriff, der Bezug darauf nimmt, wie die Situation eingebettet ist. Wir werden später sehen, dass die Parabel und eine Gerade in der Ebene „isomorph“ sind (da sie beide isomorph zur affinen Geraden sind), aber nicht linear äquivalent.

Die wesentlichen algebraischen und topologischen Eigenschaften einer affin-algebraischen Menge bleiben unter einer affin-linearen Variablentransformation erhalten: Irreduzibilität, Singularitäten (später), Überschneidungen, Zusammenhang, Kompaktheit. Dagegen verändern sich typische Eigenschaften der reell-metrischen Geometrie: Winkel, Längen und Längenverhältnisse, Volumina, Formen. Diese zuletzt genannten Begriffe sind nicht relevant für die

algebraische Geometrie. Wir werden von nun an ohne große Betonung eine Situation in eine gewünschte Gestalt transformieren, so fern das möglich ist.

Satz 5.9. *Sei K ein Körper und seien $V, \tilde{V} \subseteq \mathbb{A}_K^n$ zwei affin-algebraische Teilmengen, die affin-linear äquivalent seien. Es seien $\text{Id}(V), \text{Id}(\tilde{V})$ die zugehörigen Verschwindungsideale. Dann sind die Restklassenringe (als K -Algebren) isomorph, also*

$$K[X_1, \dots, X_n]/\text{Id}(V) \cong K[X_1, \dots, X_n]/\text{Id}(\tilde{V}).$$

Beweis. Nach Definition von affin-linear äquivalent gibt es eine affin-lineare Variablentransformation

$$\varphi : \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^n, P \longmapsto \varphi(P),$$

mit $\varphi^{-1}(V) = \tilde{V}$. Es sei $\tilde{\varphi}$ der zugehörige Automorphismus des Polynomrings $K[X_1, \dots, X_n]$. Dabei ist

$$\tilde{\varphi}^{-1}(\text{Id}(\tilde{V})) = \text{Id}(V).$$

Nach dem Isomorphiesatz folgt die Isomorphie der Restklassenringe. \square

Bemerkung 5.10. In diesem Satz kommt zum ersten Mal ein wichtiges Prinzip der algebraischen Geometrie zum Ausdruck, nämlich, dass das algebraische Objekt, das zu einer Nullstellenmenge gehört, der *Restklassenring des Polynomrings nach dem Verschwindungsideal* ist. Dies ist eine „intrinsische Invariante“ der Nullstellenmenge, d.h., unabhängig von einer Einbettung. Unter dieser Betrachtungsweise rückt auch die Noethersche Normalisierung im ebenen Fall in ein neues Licht. Man kann unter den Voraussetzungen der Aussage annehmen, dass die Kurvengleichung die Form

$$F = X^d + P_{d-1}(Y)X^{d-1} + \dots + P_1(Y)X + P_0(Y)$$

besitzt. Wenn man dieses Polynom „gleich null setzt“, so bedeutet dies eine *Ganzheitsgleichung* für X . Genauer, über dem Polynomring $K[Y]$ in einer Variablen ist die Restklasse von X im Restklassenring $K[X, Y]/(F)$ ganz. Diese Begriffe sind vielleicht aus der elementaren Zahlentheorie bekannt und werden auch hier wieder eine wichtige Rolle spielen. Da X über $K[Y]$ den Polynomring erzeugt, liegt überhaupt eine *ganze* (sogar *endliche*) Ringerweiterung

$$K[Y] \longrightarrow K[X, Y]/(X^d + P_{d-1}(Y)X^{d-1} + \dots + P_1(Y)X + P_0(Y))$$

vor. Damit kann man den Noetherschen Normalisierungssatz auch so formulieren, dass sich über einem algebraisch abgeschlossenen Körper zu jeder algebraischen Kurve der zugehörige Restklassenring als endliche Erweiterung des Hauptidealbereiches $K[Y]$ realisieren lässt. Dies ist eine direkte Analogie zu den Ganzheitsringen der Zahlentheorie, die ebenfalls endliche Erweiterungen über dem Hauptidealbereich \mathbb{Z} sind.

Unter beliebigen polynomialen Abbildungen zwischen affinen Räumen können sich, im Gegensatz zu affin-linearen Transformationen, viele algebraische Eigenschaften ändern, die Dimension kann sich ändern, Singularitäten können entstehen, etc. Dagegen überträgt sich die Irreduzibilität auf (den Zariski-Abschluss des) das Bild der Abbildung.

Satz 5.11. *Es sei K ein unendlicher Körper und*

$$\varphi : \mathbb{A}_K^r \longrightarrow \mathbb{A}_K^n$$

sei eine durch n Polynome in r Variablen gegebene Abbildung. Dann ist der Zariski-Abschluss des Bildes der Abbildung irreduzibel.

Beweis. Sei $B = \varphi(\mathbb{A}_K^r)$ das Bild der Abbildung. Nach Lemma 3.10 ist

$$\overline{B} = V(\text{Id}(B)).$$

Nun gilt für $P = \varphi(Q)$ mit $Q \in \mathbb{A}_K^r$ und für $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ die Beziehung

$$F(P) = F(\varphi(Q)) = (F \circ \varphi)(Q),$$

wobei $F \circ \varphi \in K[T_1, \dots, T_r]$ das Polynom ist, das sich ergibt, wenn man in F die Variable X_i durch die i -te Koeffizientenfunktion $\varphi_i \in K[T_1, \dots, T_r]$ ersetzt. Daher ist $F(P) = 0$ genau dann, wenn $(F \circ \varphi)(Q) = 0$ ist, und F verschwindet auf ganz B genau dann, wenn $F \circ \varphi$ auf dem ganzen \mathbb{A}_K^r verschwindet. Da K unendlich ist, bedeutet dies, dass $F \circ \varphi$ das Nullpolynom ist. Daher gilt, dass $F \in \text{Id}(B)$ ist genau dann, wenn F unter dem zugehörigen Ringhomomorphismus

$$\tilde{\varphi} : K[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow K[T_1, \dots, T_r]$$

auf 0 abgebildet wird. Damit ist $\text{Id}(B)$ das Urbild eines Primideals (nämlich des Nullideals) und somit nach Aufgabe 4.7 selbst ein Primideal. Aufgrund von Lemma 4.3 ist $V(\text{Id}(B))$ irreduzibel. \square

5. ARBEITSBLATT

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 5.1. Sei $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ ein homogenes Polynom mit Nullstellenmenge $V(F)$. Zeige, dass für jeden Punkt $P \in V(F)$ und jeden Skalar $\lambda \in K$ auch $\lambda P \in V(F)$ ist.

Aufgabe 5.2. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \in K[X, Y]$ ein homogenes Polynom. Zeige: F zerfällt in Linearfaktoren.

Aufgabe 5.3. Sei K ein Körper und $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ ein homogenes Polynom. Es sei $F = GH$ ein Faktorzerlegung. Zeige, dass G und H ebenfalls homogen sind.

Aufgabe 5.4. Zeige, dass ein homogenes Polynom unter einer linearen Variablentransformation homogen vom gleichen Grad bleibt, und dass dies bei einer affin-linearen Variablentransformation nicht sein muss.

Die folgenden zwei Aufgaben dienen dem Verständnis von Satz 5.4 und Korollar 5.5.

Aufgabe 5.5. Wende den Beweis zu Satz 5.4 auf das Polynom Y an.

Aufgabe 5.6. Sei $F \in \mathbb{C}[X, Y]$ ein nicht-konstantes Polynom. Zeige, dass die zugehörige algebraische Kurve $C = V(F)$ überabzählbar viele Elemente besitzt.

Aufgabe 5.7. Berechne das Bild \tilde{F} des Polynoms

$$F = X^2Y + 3XY - Y^3$$

unter dem durch

$$X \mapsto T^2 + S - 3, Y \mapsto 3TS + S^2 - T$$

definierten Einsetzungshomomorphismus

$$K[X, Y] \longrightarrow K[S, T].$$

Aufgabe 5.8. Es sei K ein unendlicher Körper und es sei $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ ein Polynom mit der zugehörigen Abbildung

$$F: \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^1.$$

Zeige mit und ohne Satz 5.11, dass das Bild von F einpunktig oder unendlich ist.

Aufgabe 5.9. Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen und

$$P_1, \dots, P_n \in \mathbb{A}_K^2$$

n Punkte in der affinen Ebene. Zeige, dass es genau dann eine polynomiale Abbildung

$$\varphi: \mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2$$

mit bild $\varphi = \{P_1, \dots, P_n\}$ gibt, wenn $1 \leq n \leq q$ ist.

Aufgabe 5.10.*

Man gebe ein Beispiel für eine polynomiale Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^1$$

derart, dass das Urbild von einem Punkt reduzibel ist, das Urbild von allen anderen Punkten aber irreduzibel.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5.11. (3 Punkte)

Wie viele Monome vom Grad d gibt es im Polynomring in einer, in zwei und in drei Variablen?

Aufgabe 5.12. (3 Punkte)

Wende den Beweis zu Satz 5.4 auf die algebraische Kurve an, die zur rationalen Funktion

$$Y = \frac{X^2 - 2X}{X^2 - 1}$$

gehört.

Aufgabe 5.13. (3 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2, (x, y) \longmapsto (x, xy).$$

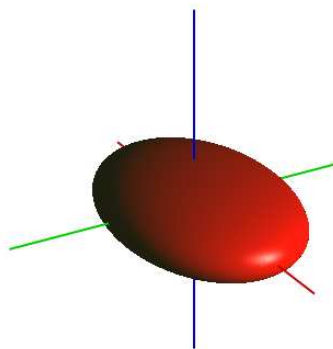
Bestimme das Bild und die Fasern dieser Abbildung.

Aufgabe 5.14. (3 Punkte)

Betrachte das *Ellipsoid*

$$E = V(2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 5) = \{(x, y, z) : 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 5\}.$$

Finde eine affin-lineare Variablentransformation (über \mathbb{R}) derart, dass das Bild von E unter der Abbildung die *Standardkugel* $V(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ wird.



Ein Ellipsoid: In der algebraischen Geometrie ist damit die Oberfläche gemeint.

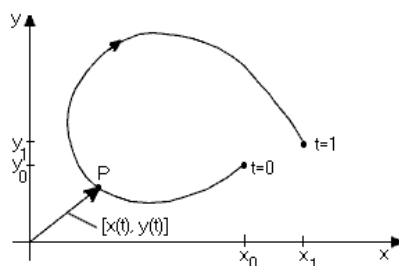
Aufgabe 5.15. (4 Punkte)

Seien V und \tilde{V} affin-algebraische Mengen in \mathbb{A}_K^2 zu $K = \mathbb{Z}/(2)$. Zeige, dass diese beiden Mengen affin-linear äquivalent sind genau dann, wenn sie die gleiche Anzahl besitzen.

Zeige ebenso, dass dies bei $K = \mathbb{Z}/(p)$ für $p \geq 3$ und auch für $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}/(2)}^n$ für $n \geq 3$ nicht gilt.

6. VORLESUNG - PARAMETRISIERUNGEN

Ebene polynomiale Parametrisierungen



Eine parametrisierte Kurve kann man sich als einen Bewegungsablauf vorstellen.

Wir betrachten jetzt Abbildungen $\varphi: \mathbb{A}_K^1 \rightarrow \mathbb{A}_K^2$, die durch zwei Polynome $P, Q \in K[T]$ in einer Variablen gegeben sind. Das Bild einer solchen Abbildung liegt in einer affinen algebraischen Kurve, wie der folgende Satz zeigt. Man spricht auch von *parametrisierten Kurven* oder genauer von *polynomial parametrisierten Kurven*. Es konkurrieren hier zwei Standpunkte, wie man

eine algebraische Kurve beschreiben kann. Die Punkte einer durch eine Kurvengleichung gegebenen Kurve sind nur implizit gegeben. Man kann zwar zu jedem Punkt der Ebene leicht überprüfen, ob er auf der Kurve liegt, es ist aber im Allgemeinen schwierig, Punkte auf der Kurve zu finden oder explizit anzugeben. Eine parametrisierte Kurve ist hingegen explizit gegeben, zu jedem Punkt der affinen Geraden kann man den Bildpunkt einfach ausrechnen und erhält so die Kurvenpunkte explizit. Es ist aber nicht jede algebraische Kurve durch Polynome parametrisierbar.

Satz 6.1. *Sei K ein Körper und seien $P, Q \in K[T]$ zwei Polynome. Dann gibt es ein Polynom $F \in K[X, Y]$, $F \neq 0$, mit $F(Q, P) = 0$. D.h. das Bild einer polynomial parametrisierten Kurve liegt in einer ebenen algebraischen Kurve $C = V(F)$. Wenn K unendlich ist und (P, Q) nicht beide konstant sind, so ist der Zariski-Abschluss des Bildes eine irreduzible Kurve C .*

Beweis. Es seien d und e die Grade von P und Q . Wir berechnen die Monome

$$P^i Q^j.$$

Dies sind Polynome in T vom Grad $di + ej$. Zu $i \leq n$ und $j \leq m$ gibt es $(n+1)(m+1)$ solche Monome. Die Monome $P^i Q^j$, $i \leq n$, $j \leq m$, leben also allesamt in dem $dn + em + 1$ -dimensionalen K -Vektorraum, der von $1 = T^0, T^1, T^2, \dots, T^{dn+em}$ erzeugt wird. Bei $(n+1)(m+1) > dn + em + 1$ muss es also eine nicht-triviale lineare Abhängigkeit zwischen diesen $P^i Q^j$ geben. Diese ergibt ein Polynom $F(X, Y) \neq 0$ mit $F(P, Q) = 0$.

Die angegebene numerische Bedingung $(n+1)(m+1) > dn + em + 1$ lässt sich mit n, m hinreichend groß erfüllen.

Von nun an sei K unendlich. Der Zariski-Abschluss des Bildes $B = \varphi(\mathbb{A}_K^1)$ ist $V(\text{Id}(B))$ nach Lemma 3.10 und irreduzibel nach Satz 5.11. Da K unendlich ist und die Abbildung nicht konstant ist, muss wegen der Irreduzibilität auch $V(\text{Id}(B))$ unendlich viele Punkte enthalten. Nach Lemma 4.3 ist $\text{Id}(B)$ ein Primideal und enthält nach dem ersten Teil ein $F \in \text{Id}(B)$, $F \neq 0$. Da $K[X, Y]$ faktoriell ist, muss auch ein Primfaktor von F dazu gehören, so dass wir annehmen können, dass F ein Primpolynom ist. Wir haben die Inklusion

$$B = \overline{B} = V(\text{Id}(B)) = V(F).$$

Für ein $H \in \text{Id}(B)$ ist

$$V(\text{Id}(B)) \subseteq V(H) \cap V(F)$$

unendlich, so dass es nach Satz 4.8 einen gemeinsamen nichtkonstanten Faktor von H und F geben muss. Da F prim ist, muss H ein Vielfaches von F sein und $\text{Id}(B) = (F)$. \square

Beispiel 6.2. Wir betrachten die Kurve, die durch die Parametrisierung

$$x = t^2 + t + 1 \text{ und } y = 2t^2 + 3t - 1$$

gegeben ist. Es ist $x - 1 = t^2 + t$ und $y + 1 = 2t^2 + 3t$. Eine einfache Addition ergibt

$$(y + 1) - 2(x - 1) = 3t - 2t = t.$$

Daher können wir schreiben

$$x - 1 = t^2 + t = (y - 2x + 3)^2 + (y - 2x + 3).$$

Ausmultiplizieren ergibt insgesamt die Gleichung

$$y^2 + 4x^2 - 4xy - 15x + 7y + 13 = 0.$$

Beispiel 6.3. Wir betrachten die durch

$$P = t^2 - 1 \text{ und } Q = t^3 - t = t(t^2 - 1)$$

gegebene Abbildung

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2.$$

Für die beiden Punkte $t = \pm 1$ ergibt sich der Wert $(0, 0)$. Für alle anderen Stellen $t \neq \pm 1$ kann man schreiben

$$t = \frac{t^3 - t}{t^2 - 1} = \frac{Q(t)}{P(t)}.$$

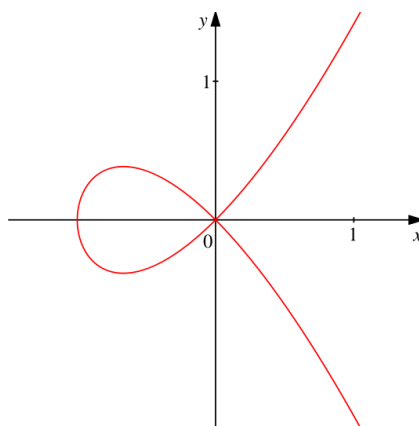
D.h. dass t aus den Bildwerten rekonstruierbar ist, und das bedeutet, dass die Abbildung dort injektiv ist. Die Bildkurve ist also eine Kurve, die sich an genau einer Stelle überschneidet.

Wir bestimmen die Kurvengleichung, und schreiben $x = t^2 - 1$ und $y = t^3 - t$. Es ist $t^2 = x + 1$ und

$$y^2 = t^2 x^2 = (x + 1)x^2 = x^3 + x^2.$$

Das beschreibende Polynom ist also

$$Y^2 - X^3 - X^2.$$



Beispiel 6.4. Wir betrachten die durch

$$X^2 + Y^2 - Z^2 - Z^3 = 0$$

gegebene Fläche im \mathbb{A}_K^3 . Diese Fläche wird auch auf der Seite des Osnabrücker Fachbereiches gezeigt, siehe [1]. Wenn man mit einer durch $aX + bY$ gegebenen Ebene (also einer Ebene, die durch eine Grundgerade in der $X - Y$ -Ebene durch den Nullpunkt gegeben ist) schneidet, so erhält man immer eine Gleichung der Form $W^2 - Z^2 - Z^3 = 0$, siehe Beispiel 6.3. Die Fläche entsteht, wenn man diese Kurve um die Z -Achse dreht.

Rationale Parametrisierungen

Betrachten wir eine rationale Funktion

$$Y = \frac{P}{Q}$$

mit Polynomen $P, Q \in K[X]$ in einer Variablen. Hier hat man in natürlicher Weise sofort eine neue Form der Parametrisierung, indem man die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^1 \supseteq D(Q) \longrightarrow \mathbb{A}_K^2, x \longmapsto \left(x, \frac{P(x)}{Q(x)} \right),$$

betrachtet. Dabei ist $D(Q)$ der Definitionsbereich der Abbildung, und zwar besteht $D(Q) = \mathbb{A}_K^1 \setminus V(Q)$ aus allen Punkten, wo das Nennerpolynom nicht null ist. Offenbar kann man mit dieser Abbildung wieder alle Punkte des Graphen der rationalen Funktion erfassen, d.h. sie leistet ebenso wie eine polynomiale Parametrisierung eine explizite Beschreibung der Kurve. Es ist also zur Beschreibung von Kurven sinnvoll, auch Parametrisierungen zuzulassen, bei denen die Komponentenfunktionen rational sind.

Definition 6.5. Zwei rationale Funktionen $\varphi_1 = \frac{P_1}{Q_1}$ und $\varphi_2 = \frac{P_2}{Q_2}$ mit $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in K[T]$, $Q_1, Q_2 \neq 0$, heißen eine *rationale Parametrisierung* einer algebraischen Kurve $C = V(F)$ ($F \in K[X, Y]$ nicht konstant), wenn

$$F(\varphi_1(T), \varphi_2(T)) = 0$$

ist und (φ_1, φ_2) nicht konstant ist.

Man beachte, dass die Gleichheit in der vorstehenden Definition im rationalen Funktionenkörper zu verstehen ist, also in $K(T)$. Bei unendlichem K ist dies äquivalent damit, dass diese Gleichheit gilt für alle Werte $t \in K$, für die die Nennerpolynome definiert sind.

Definition 6.6. Eine ebene algebraische Kurve $C = V(F)$ heißt *rational*, wenn sie irreduzibel ist und es eine rationale Parametrisierung für sie gibt.

Das folgende einfache Beispiel zeigt, dass man mit rationalen Funktionen mehr Kurven parametrisieren kann, als wenn man nur mit Polynomen arbeitet. Es sei aber schon hier erwähnt, dass dieser Unterschied im Kontext der projektiven Geometrie wieder verschwindet.

Beispiel 6.7. Wir betrachten die *Hyperbel* $H = V(XY - 1)$ und behaupten, dass es keine polynomiale Parametrisierung davon gibt. Dies folgt einfach daraus, dass zu zwei Polynomen $P(t)$ und $Q(t)$ die Bedingung, für jedes t auf H zu liegen, gerade

$$P(t) \cdot Q(t) = 1 \text{ für alle } t \in \mathbb{A}_K^1$$

bedeutet, bzw., dass $P(t) \cdot Q(t) = 1$ ist im Polynomring $K[t]$ (was im Fall eines unendlichen Körpers äquivalent ist; bei einem endlichen Körper ist die zweite Identität die „richtige“ Bedingung). Das bedeutet aber, dass diese Polynome invers zueinander sind und daher Einheiten sind. Im Polynomring sind aber lediglich die Konstanten $\neq 0$ Einheiten. Also sind beide Polynome konstant und damit ist die dadurch definierte Abbildung konstant, und es liegt keine polynomiale Parametrisierung vor. Dagegen ist

$$\mathbb{A}_K^1 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{A}_K^2, t \longmapsto \left(t, \frac{1}{t} \right),$$

eine rationale Parametrisierung der Hyperbel.

Wir wollen zeigen, dass das Bild einer nicht-konstanten rationalen Abbildung stets eine algebraische Gleichung erfüllt, also stets eine rationale Parametrisierung einer algebraischen Kurve liefert. Im polynomialen Fall ergab sich eine algebraische Gleichung aus einem Abzählargument (es musste eine Gleichung geben, da die Anzahl der Monome in zwei Variablen „schneller mit dem Grad wächst“ als die in einer Variablen). Wir werden ein ähnliches Argument verwenden, allerdings in Kombination mit einem weiteren Trick, der „Homogenisierung“. Bei diesem Trick wird unter Hinzunahme einer weiteren Variablen (das ist der Preis, den man dabei zahlen muss) eine nicht-homogene Situation homogen gemacht. Diesen Prozess verwenden wir hier rein algebraisch, dahinter steht aber das Zusammenspiel zwischen affiner und projektiver Geometrie.

Definition 6.8. Sei $F \in K[X_1, \dots, X_n]$, $F \neq 0$, ein Polynom in n Variablen mit der homogenen Zerlegung

$$F = \sum_{i=0}^d F_i$$

und sei Z eine weitere Variable. Dann nennt man das homogene Polynom

$$\hat{F} = \sum_{i=0}^d F_i Z^{d-i}$$

vom Grad d die *Homogenisierung* von F .

Aus der Homogenisierung kann man das ursprüngliche Polynom zurückgewinnen, wenn man die zusätzliche Variable gleich 1 setzt. Man spricht von *dehomogenisieren*.

Lemma 6.9. *Es seien $P_1, P_2, P_3 \in K[S, T]$ drei homogene Polynome. Dann gibt es ein homogenes Polynom $F \in K[X, Y, Z]$, $F \neq 0$, mit*

$$F(P_1, P_2, P_3) = 0.$$

Beweis. Dies folgt aus einem ähnlichen Abzählargument wie im Beweis zu Satz 6.1. □

Beispiel 6.10. Wir betrachten die Abbildung

$$(S, T) \mapsto (S^2, T^2, ST) = (X, Y, Z),$$

die durch homogene Polynome (sogar durch Monome) gegeben ist. Es ist einfach, eine algebraische Relation für das Bild zu finden, es ist nämlich

$$Z^2 = (ST)^2 = S^2T^2 = XY,$$

d.h. das Bild der Abbildung liegt in $V(Z^2 - XY)$. Siehe auch Aufgabe 6.8.

Satz 6.11. *Es seien zwei rationale Funktionen $\varphi_1 = \frac{P_1}{Q_1}$ und $\varphi_2 = \frac{P_2}{Q_2}$ mit $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in K[T]$, $Q_1, Q_2 \neq 0$, gegeben, die nicht beide konstant seien. Dann gibt es ein nichtkonstantes Polynom $F \in K[X, Y]$ mit*

$$F(\varphi_1(T), \varphi_2(T)) = 0.$$

Das bedeutet, dass φ_1 und φ_2 eine rationale Parametrisierung definieren.

Beweis. Wir können durch Übergang zu einem Hauptnenner annehmen, dass die rationale Abbildung durch

$$\varphi_1 = \frac{P_1}{Q} \text{ und } \varphi_2 = \frac{P_2}{Q}$$

mit $P_1, P_2, Q \in K[T]$, $Q \neq 0$ gegeben ist. Es seien $H_1, H_2, H_3 \in K[T, S]$ die Homogenisierungen von diesen Polynomen. Dann gibt es nach Lemma 6.9 ein homogenes Polynom F , $F \neq 0$, vom Grad d mit

$$F(H_1, H_2, H_3) = 0.$$

Wir betrachten

$$\frac{1}{Z^d} F(X, Y, Z) = F\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}, \frac{Z}{Z}\right),$$

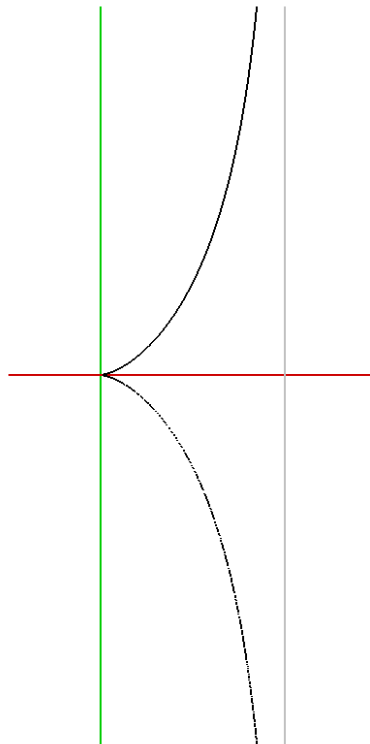
welches ein Polynom in den beiden rationalen Funktionen $\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}$ ist. Für diesen Übergang ist es wichtig, dass F homogen ist. Einsetzen der homogenen Polynome ergibt

$$0 = F\left(\frac{H_1}{H_3}, \frac{H_2}{H_3}, 1\right).$$

Dies ist eine Gleichheit im Quotientenkörper von $K[S, T]$. Wenn man darin $S = 1$ setzt (also dehomogenisiert), so erhält man

$$0 = F\left(\frac{P_1}{Q}, \frac{P_2}{Q}\right),$$

also eine Gleichung für die ursprünglichen rationalen Funktionen. \square



Die Zissoide des Diokles (im Bild schwarz) ist rational parametrisierbar.

Bemerkung 6.12. Man kann einen Schritt weiter gehen und sich fragen, ob es noch andere Möglichkeiten gibt, eine algebraische Kurve $C = V(F)$ durch eine Abbildung $\varphi: K \rightarrow K^2$ zu beschreiben, wo φ aus einer größeren Funktionenklasse sein darf. Ein wichtiger Satz ist hier der *Satz über implizite Funktionen*, der für $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ besagt, dass falls die partiellen Ableitung von F an einem Punkt der Kurve nicht beide null sind, dass es dann eine (unendlich oft und sogar analytisch) differenzierbare Abbildung φ gibt, die die Kurve in einer gewissen kleinen offenen Umgebung des Punktes beschreibt. Eine algebraische Version des Satzes über implizite Funktionen findet sich im Potenzreihenansatz wieder, den wir später behandeln werden.

6. ARBEITSBLATT

Aufwärmataufgaben

Aufgabe 6.1. Bestimme für die parametrisierte Kurve

$$x = -3t^2 + 4t - 2 \text{ und } y = 2t^2 + 5t - 3$$

eine Kurvengleichung.

Aufgabe 6.2.*

Sei K ein Körper. Betrachte die durch

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2, t \longmapsto (t + t^2, t^3) = (x, y),$$

definierte Parametrisierung. Bestimme eine (nichttriviale) algebraische Gleichung, die für alle Bildpunkte dieser Abbildung erfüllt ist. Man gebe auch einen Punkt in der affinen Ebene an, der nicht auf der Bildkurve liegt.

Aufgabe 6.3. Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und $a \in K$ von null verschieden. Zeige, dass das Polynom

$$X^2 + Y^2 + a \in K[X, Y]$$

irreduzibel ist.

Aufgabe 6.4. Beweise Lemma 6.9.

Aufgabe 6.5. Sei $P = (a, b)$ ein Punkt in der affinen Ebene und L und L' verschiedene Geraden durch P . Es sei $C = V(F)$, $F \in K[X, Y]$, eine ebene algebraische Kurve. Beschreibe explizit eine Variablentransformation (einen Koordinatenwechsel) derart, dass in den neuen Koordinaten P der Nullpunkt wird und die Geraden zum Achsenkreuz werden. Wie lautet die Kurvengleichung in den neuen Koordinaten?

Aufgabe 6.6. Zeige, dass für affin-algebraische Mengen $V, V' \subseteq \mathbb{A}_K^n$ die Beziehung der affin-linearen Äquivalenz eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 6.7. Sei $\varphi : \mathbb{A}_K^2 \rightarrow \mathbb{A}_K^2$ eine polynomiale Abbildung und sei C eine ebene rationale Kurve. Es sei ferner vorausgesetzt, dass C durch φ nicht auf einen einzigen Punkt abgebildet wird. Zeige, dass dann $\overline{\varphi(C)}$ ebenfalls eine rationale Kurve ist.

Aufgabe 6.8. Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \supseteq D(s) \longrightarrow \mathbb{A}_K^3, (s, t) \longmapsto (s, t^2/s, t) = (x, y, z).$$

Bestimme eine algebraische Gleichung F für das Bild. Untersuche die Abbildung auf Injektivität und Surjektivität (als Abbildung nach $V(F)$). Vergleiche diese Abbildung mit den in Aufgabe 6.8 diskutierten Abbildungen.

Aufgabe 6.9. Es sei K ein Körper und $K[X_1, \dots, X_n]$ der Polynomring über K in n Variablen und $K[X_1, \dots, X_n, Z]$ der Polynomring in $n + 1$ Variablen. Zu $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ sei $\hat{F} \in K[X_1, \dots, X_n, Z]$ die Homogenisierung (bezüglich Z) und zu $G \in K[X_1, \dots, X_n, Z]$ sei \tilde{G} die (durch $Z \mapsto 1$ gegebene) Dehomogenisierung von G . Zeige, dass $\tilde{\hat{F}} = F$, aber nicht $\hat{\tilde{G}} = G$ gelten muss.

Aufgabe 6.10. Es sei K ein Körper und $K[X_1, \dots, X_n, Z]$ der Polynomring über K in $n + 1$ Variablen. Es seien $G, H \in K[X_1, \dots, X_n, Z]$ zwei homogene Polynome vom gleichen Grad. Für die Dehomogenisierungen (bezüglich Z) gelte $\tilde{G} = \tilde{H}$. Zeige, dass dann $G = H$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Die folgende Aufgabe erfordert eventuell den Einsatz eines Computers.

Aufgabe 6.11. (6 Punkte)

Bestimme für die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2, t \longmapsto (t^2 + t^3, 2t^2 - t^4),$$

eine algebraische Gleichung der Bildkurve.

Aufgabe 6.12. (5 Punkte)

Wir betrachten die beiden Abbildungen

$$(s, t) \longmapsto (s^2, t^2, st) = (x, y, z) \text{ und } (s, t) \longmapsto (s, st^2, st) = (x, y, z).$$

Zeige, dass das Bild der beiden Abbildungen die gleiche algebraische Gleichung F erfüllt. Untersuche die Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität (als Abbildung nach $V(F)$). Welche Abbildung liefert eine „bessere“ Beschreibung von $V(F)$?

Aufgabe 6.13. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $F \in K[X, Y]$ ein irreduzibles Polynom. Die Nullstellenmenge $V(F)$ sei unendlich. Dann ist $V(F)$ eine irreduzible affin-algebraische Menge.

Man gebe auch ein Beispiel, dass diese Aussage in drei Variablen falsch ist.

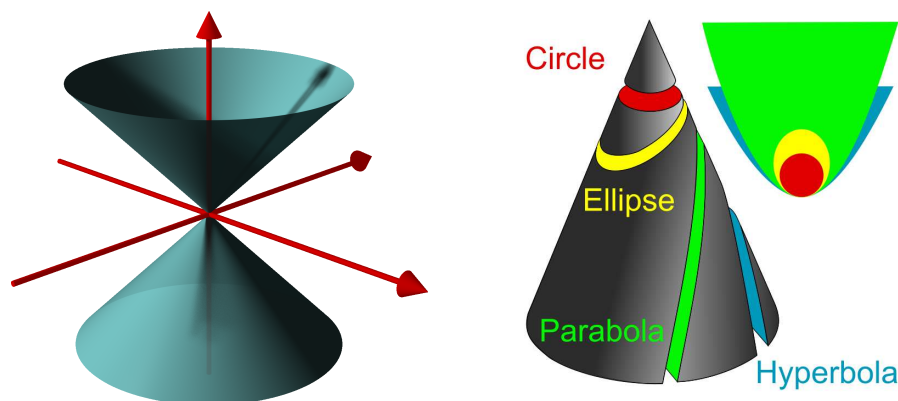
7. VORLESUNG - KEGELSCHNITTE

Kegelschnitte und Quadriken

Der *Standardkegel* im dreidimensionalen affinen Raum ist gegeben durch die homogene Gleichung

$$Z^2 = X^2 + Y^2$$

Das kann man sich so vorstellen, dass z den Radius eines Kreises vorgibt, der in der zur $x - y$ -Ebene parallelen Ebene durch den Punkt $(0, 0, z)$ liegt. Jeden Schnitt dieses Kegels mit einer affinen Ebenen E nennt man einen *Kegelschnitt*.



Definition 7.1. Ein *Kegelschnitt* C ist der Durchschnitt des Standardkegels $V(Z^2 - X^2 - Y^2)$ mit einer affinen Ebene $V(aX + bY + cZ + d)$ (nicht alle $a, b, c = 0$), also

$$C = V(Z^2 - X^2 - Y^2) \cap V(aX + bY + cZ + d).$$

Die Theorie der Kegelschnitte ist ein klassisches Thema, über das schon Apollonios von Perge eine Arbeit geschrieben hat. Da die Ebene durch eine Gleichung $aX + bY + cZ + d = 0$ gegeben wird, kann man nach einer Variablen linear auflösen und erhält eine neue Gleichung in zwei Variablen für den Kegelschnitt. Dies ist eine affin-lineare Variablensubstitution, daher hat die neue Gleichung ebenfalls den Grad zwei.

Wir betrachten daher generell *affine Quadriken* in zwei Variablen.

Definition 7.2. Ein Polynom der Form

$$F = \alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2 + \delta X + \epsilon Y + \eta \text{ mit } \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \eta \in K,$$

wobei mindestens einer der Koeffizienten α, β, γ ungleich null ist, heißt eine *quadratische Form in zwei Variablen* (über K) oder eine *Quadrik in zwei Variablen*. Das zugehörige Nullstellengebilde

$$V(F) \subseteq \mathbb{A}_K^2$$

nennt man ebenfalls *Quadrik*.

Wir interessieren uns dafür, wie viele verschiedene Typen von Quadriken es gibt. Die Antwort hängt vom Grundkörper ab. Darüber hinaus muss man festlegen, welchen Äquivalenzbegriff man jeweils verwenden möchte. Zu zwei Quadriken

$$F, G \in K[X, Y]$$

sind die folgenden Äquivalenzbegriffe untersuchenswert.

- F und G sind als Polynome *affin äquivalent*, d.h. es gibt eine (bijektive) affin-lineare Variablentransformation

$$\varphi : K[X, Y] \longrightarrow K[X, Y], X \longmapsto rX + sY + t, Y \longmapsto \tilde{r}X + \tilde{s}Y + \tilde{t},$$

derart, dass $G = \varphi(F)$ ist.

- Die Hauptideale (F) und (G) sind *affin äquivalent*, d.h. es gibt eine (bijektive) affin-lineare Variablentransformation φ derart, dass $(G) = \varphi((F))$ ist.

- Die Restklassenringe

$$K[X, Y]/(F) \text{ und } K[X, Y]/(G)$$

sind als K -Algebren isomorph.

- Die Nullstellenmengen $V(F)$ und $V(G)$ sind affin-linear äquivalent.

Der erste Äquivalenzbegriff ist stärker als der zweite, und der zweite ist stärker als die beiden letzten. Ein wesentlicher Unterschied zwischen (1) und (2) ist, dass man bei (2) immer mit einer Einheit multiplizieren darf (das ändert auch nicht das Nullstellengebilde). Über einem Körper, der nicht algebraisch abgeschlossen ist, kann die Äquivalenz in (4) sehr grob sein, da alle F mit leerem Nullstellengebilde im Sinne von (4) äquivalent sind.

Bei $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ interessiert man sich auch dafür, ob topologische Eigenschaften der zugehörigen Nullstellengebilde übereinstimmen. Wir werden hier für zwei Quadriken F und G die verschiedenen Äquivalenzbegriffe parallel betrachten, aber vor allem an (2) interessiert sein.

Lemma 7.3. Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Es sei

$$F = \alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2 + \delta X + \epsilon Y + \eta$$

eine Quadrik. Dann gibt es eine Variablentransformation der affinen Ebene derart, dass das transformierte Polynom in den neuen Variablen die Form

$$G = \gamma Y^2 + H(X) \text{ mit } H(X) = aX^2 + bX + c$$

hat. Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper kann man (durch eine Variablentransformation) $\gamma = 1$ erreichen. Wenn man sich für das erzeugte Ideal bzw. das Nullstellengebilde interessiert, so kann man (durch Division) ebenfalls $\gamma = 1$ erreichen.

Beweis. Zunächst reduzieren wir auf den Fall, wo $\gamma \neq 0$ ist. Bei $\gamma = 0$ und $\alpha \neq 0$ kann man X und Y vertauschen. Bei $\alpha = \gamma = 0$ muss $\beta \neq 0$ sein. Dann kann man durch $X \mapsto X + Y$, $Y \mapsto Y$ erreichen, dass der Koeffizient von Y^2 nicht null ist. Sei also im Folgenden $\gamma \neq 0$.

Wir schreiben die Gleichung als

$$\gamma Y^2 + (\beta X + \epsilon)Y + \tilde{H}(X),$$

wobei \tilde{H} ein Polynom in X vom Grad ≤ 2 ist. Durch quadratisches Ergänzen kann man das schreiben als

$$\gamma \left(Y + \frac{\beta X + \epsilon}{2\gamma} \right)^2 + \tilde{H}(X) - \frac{(\beta X + \epsilon)^2}{4\gamma}.$$

In den neuen Variablen $Y + (\beta X + \epsilon)/2\gamma$ und X schreibt sich die Gleichung als

$$G = \gamma Y^2 + H(X) \text{ mit } H(X) = aX^2 + bX + c.$$

Bei K algebraisch abgeschlossen besitzt γ eine Quadratwurzel, so dass man durch $Y \mapsto Y/\sqrt{\gamma}$ den Koeffizient zu 1 machen kann. Der andere Zusatz ist klar. \square

Klassifikation von reellen und komplexen Quadriken

Beispiel 7.4. Sei $K = \mathbb{R}$. Wir wollen die reellen Quadriken klassifizieren, und zwar hauptsächlich hinsichtlich der affin-linearen Äquivalenz für die erzeugten Hauptideale. D.h. wir dürfen affine Variablentransformationen durchführen und teilen. Aufgrund von Lemma 7.3 kann man annehmen, dass die beschreibende Gleichung die Form

$$Y^2 = aX^2 + bX + c$$

hat. Bei $a = b = 0$ kann man durch eine Transformation $Y \mapsto \sqrt{c}Y$ (bei $c > 0$) bzw. $Y \mapsto \sqrt{-c}Y$ (bei $c < 0$) und anschließende Division durch $\pm c$ erreichen, dass die rechte Seite gleich 1, -1 oder 0 ist.

Bei $a = 0$ und $b \neq 0$ kann man $bX + c$ als neue Variable nehmen, und erhält die Gleichung $Y^2 = X$.

Sei nun $a \neq 0$. Dann kann man durch eine Transformation $X \mapsto X/\sqrt{a}$ bzw. $X \mapsto X/\sqrt{-a}$ erreichen, dass $a = \pm 1$ ist. Durch quadratisches Ergänzen

kann man b zu 0 machen. Bei $c = 0$ kann man auf $Y^2 = \pm X^2$ transformieren. Sei also $c \neq 0$. Dann kann man durch eine simultane Transformation $X \mapsto uX$, $Y \mapsto uY$ ($u = \sqrt{\pm c}$) und anschließende Division erreichen, dass $c = \pm 1$ ist. Wir haben also noch die Möglichkeiten $Y^2 = \pm X^2 \pm 1$ zu betrachten, wobei $Y^2 - X^2 = \pm 1$ zueinander äquivalent sind.

Wir wissen also, dass jede reelle Quadrik auf eine der folgenden neun Formen gebracht werden kann.

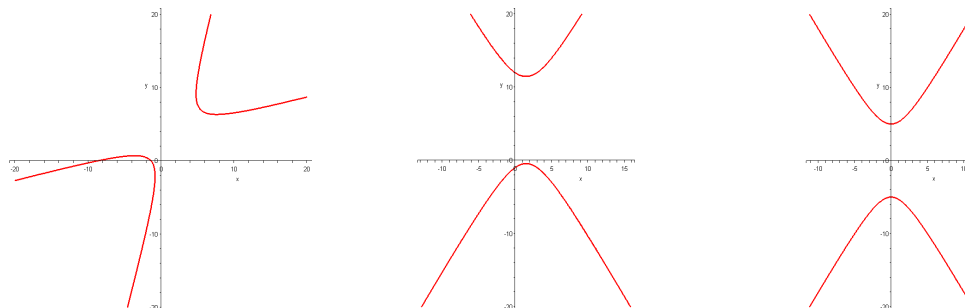
- $Y^2 = 0$ Das ist eine *verdoppelte Gerade*.
- $Y^2 = 1$ Das bedeutet $Y = \pm 1$, das sind also *zwei parallele Geraden*.
- $Y^2 = -1$ Das ist *leer*.
- $Y^2 = X$ Das ist eine *Parabel*.
- $Y^2 = X^2$ Das bedeutet $(Y - X)(Y + X) = 0$, es handelt sich also um *zwei sich kreuzende Geraden*.
- $Y^2 = -X^2$ Die einzige Lösung ist der *Punkt* $(0, 0)$.
- $Y^2 = X^2 + 1$ Das bedeutet $(Y - X)(Y + X) = 1$, das ist also eine *Hyperbel*.
- $Y^2 = -X^2 + 1$ Das ist ein *Einheitskreis*.
- $Y^2 = -X^2 - 1$ Das ist wieder *leer*.

Sind diese neun Typen alle untereinander verschieden? Das hängt davon ab, welchen Äquivalenz-Begriff man zugrunde legt. Die Typen III und IX sind beide leer, haben also identisches Nullstellengebilde. Andererseits sind die zugehörigen Restklassenringe

$$\mathbb{R}[X, Y]/(Y^2 + 1) \text{ und } \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 + 1)$$

nicht isomorph, und über den komplexen Zahlen sind die Nullstellengebilde nicht gleich. Deshalb werden sie auch hier als verschieden betrachtet. Ansonsten sind diese Nullstellengebilde meistens schon aus topologischen Gründen verschieden (z.B. ist der Einheitskreis kompakt, die Hyperbel ist nicht kompakt und hat zwei Zusammenhangskomponenten, die Parabel ist nicht kompakt mit einer Zusammenhangskomponenten, etc.). Allerdings ist die verdoppelte Gerade und die Parabel reell-topologisch gleich, und die Hyperbel und die parallelen Geraden ebenfalls. Hier sind aber jeweils die Restklassenringe und im zweiten Fall auch die komplexen Versionen verschieden. Z. B. ist $K[X, Y]/(Y^2)$ nicht reduziert, aber $K[X, Y]/(Y^2 - X) \cong K[Y]$ ist ein Integritätsbereich. Die komplexe Hyperbel ist zusammenhängend, da sie isomorph zu $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist, also zur punktierten komplexen Geraden $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{0\}$.

Die folgenden Bilder zeigen die Drehung und die Verschiebung einer Quadrik.



Beispiel 7.5. Sei $K = \mathbb{C}$. Wir wollen die komplexen Quadriken klassifizieren. Aufgrund von Lemma 7.3 kann man annehmen, dass die beschreibende Gleichung die Form

$$Y^2 = aX^2 + bX + c$$

hat. Bei $a = b = 0$ kann man durch eine Transformation $Y \mapsto \sqrt{c}Y$ und anschließende Division durch $\pm c$ erreichen, dass die rechte Seite 1 oder 0 ist.

Bei $a = 0$ und $b \neq 0$ kann man $bX + c$ als neue Variable nehmen, und erhält die Gleichung $Y^2 = X$.

Sei nun $a \neq 0$. Dann kann man durch die Transformation $X \mapsto X/\sqrt{a}$ erreichen, dass $a = 1$ ist. Durch quadratisches Ergänzen kann man b zu null machen. Schließlich kann man durch simultane Transformation $X \mapsto uX$, $Y \mapsto uY$ und anschließende Division erreichen, dass $c = 1$ ist.

Wir wissen also, dass jede komplexe Quadrik auf eine der folgenden fünf Formen gebracht werden kann:

- $Y^2 = 0$ Das ist eine *verdoppelte Gerade*.
- $Y^2 = 1$ Das bedeutet $Y = \pm 1$, das sind also *zwei parallele komplexe Geraden*.
- $Y^2 = X$ Das ist eine *komplexe Parabel*.
- $Y^2 = X^2$ Das bedeutet $(Y - X)(Y + X) = 0$, es handelt sich also um *zwei komplexe Geraden*, die sich in einem Punkt kreuzen.
- $Y^2 = X^2 + 1$ Das bedeutet $(Y - X)(Y + X) = 1$, das ist also eine *komplexe Hyperbel*.

Typ I und Typ III sind dabei komplex-topologisch betrachtet eine komplexe affine Gerade, also eine reelle Ebene und damit topologisch gleich (von komplexer Ebene zu sprechen ist im Kontext der algebraischen Geometrie gefährlich, es kann \mathbb{C} und \mathbb{C}^2 gemeint sein). Die Restklassenringe sind aber verschieden, weshalb sie hier als verschieden aufgelistet werden. Ansonsten sind alle Typen komplex-topologisch untereinander verschieden. Neben der reellen Ebene gibt es die punktierte komplexe affine Gerade (die Hyperbel,

die topologisch eine punktierte reelle Ebene ist), zwei disjunkte Geraden und zwei sich (in einem Punkt) schneidende Geraden.

Die im letzten Beispiel vorgestellte Klassifikation von komplexen Quadriken gilt über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper mit Charakteristik $\neq 2$.

Parametrisierung von Quadriken

In der elementaren Zahlentheorie lernt man, wie sich alle pythagoreischen Tripel systematisch erfassen lassen. Der Grund dafür ist, dass es eine Parametrisierung für den Einheitskreis mit rationalen Funktionen gibt. Wir zeigen jetzt, dass sich jede irreduzible Quadrik rational parametrisieren lässt.

Satz 7.6. *Sei $C = V(F)$ eine Quadrik in zwei Variablen, also*

$$F = \alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2 + \delta X + \epsilon Y + \eta$$

(mit α, β, γ nicht alle null). *Es sei vorausgesetzt, dass es mindestens einen Punkt auf der Quadrik gibt. Dann gibt es Polynome $P_1, P_2, Q \in K[T]$, $Q \neq 0$, derart, dass das Bild der rationalen Abbildung*

$$\mathbb{A}_K^1 \supseteq D(Q) \longrightarrow \mathbb{A}_K^2 \quad \text{mit } t \longmapsto \left(\frac{P_1(t)}{Q(t)}, \frac{P_2(t)}{Q(t)} \right)$$

in C liegt. Besitzt C zumindest zwei Punkte, so ist die Abbildung nicht konstant und bis auf endlich viele Ausnahmen injektiv. Ist C zusätzlich irreduzibel, so ist die Abbildung bis auf endlich viele Ausnahmen surjektiv. Insbesondere ist eine irreduzible Quadrik mit mindestens zwei Punkten eine rationale Kurve.

Beweis. Wir können durch eine Variablentransformation erreichen, dass $\alpha \neq 0$, und dann können wir durch α teilen, und annehmen, dass $\alpha = 1$ ist. Wir können durch verschieben annehmen, dass der Nullpunkt $0 = (0, 0)$ auf der Kurve liegt. Dann ist $\eta = 0$. Wenn zwei sich kreuzende Geraden vorliegen, so können wir durch verschieben annehmen, dass der Nullpunkt nicht der Kreuzungspunkt ist (aber auf einer der Geraden liegt).

Die Idee ist, zu einem Punkt $H = (t, 1)$ die Gerade durch 0 und H zu betrachten und den Schnitt dieser Geraden mit C zu betrachten. Dieser Schnitt besteht aus maximal zwei Punkten (es sei denn, der Schnitt ist die volle Gerade), und da 0 einer der Punkte ist, ist der andere Punkt, den es geben muss, eindeutig bestimmt.

Sei also $H = (t, 1)$ gegeben. Die Gerade durch H und durch 0 besteht aus allen Punkten (at, a) , $a \in K$. Die Schnittpunkte mit C erhält man also, wenn man $(x, y) = (at, a)$ in F einsetzt und nach den Lösungen in a sucht. Einsetzen ergibt die Bedingung

$$F(at, a) = (at)^2 + \beta(ata) + \gamma a^2 + \delta at + \epsilon a.$$

Die Lösung $a = 0$ entspricht dem Nullpunkt, die wir schon kennen, die zweite Lösung ist

$$a_2 = \frac{-\delta t - \epsilon}{t^2 + \beta t + \gamma}.$$

Dieser Ausdruck ist wohldefiniert, wenn $Q(t) = t^2 + \beta t + \gamma \neq 0$ ist (was maximal zwei Werte für t ausschließt).

Zu a_2 gehört auf C der Punkt

$$a_2(t, 1) = (a_2 t, a_2) = \left(t \frac{-\delta t - \epsilon}{t^2 + \beta t + \gamma}, \frac{-\delta t - \epsilon}{t^2 + \beta t + \gamma} \right),$$

so dass

$$P_1 = -t(\delta t + \epsilon) \text{ und } P_2 = -\delta t - \epsilon$$

zu setzen ist.

Dies Abbildung ist auf der durch $D(Q)$ gegebenen Zariski-offenen Menge wohldefiniert (und diese Menge ist nicht leer, sobald der Körper mindestens drei Elemente besitzt).

Von nun an sei vorausgesetzt, dass C mindestens zwei Punkte besitzt. Bei $\delta = \epsilon = 0$ hat F die Gestalt $F = X^2 + \beta XY + \gamma Y^2$. Da wir vorausgesetzt haben, dass es mindestens zwei Punkte auf C gibt, folgt, dass F das Produkt von zwei homogenen Linearformen ist. Wenn F das Quadrat einer Linearform ist, so liegt geometrisch einfach eine „verdoppelte Gerade“ vor, die sich direkt (bijektiv) parametrisieren lässt. Andernfalls ist F das Produkt von zwei verschiedenen homogenen Linearformen und die zugehörigen Geraden verlaufen beide durch den Nullpunkt, was wir ausgeschlossen haben. In diesem Fall kann also nicht sowohl δ als auch ϵ gleich 0 sein.

Wir haben also nur noch die Situation zu betrachten, wo $\delta t + \epsilon$ nicht das Nullpolynom ist. Daraus folgt, dass die Abbildung auf ihrem Definitionsbereich bis auf endlich viele Ausnahmen injektiv ist, da sich bei $\delta t + \epsilon \neq 0$ wegen

$$t = \frac{P_1}{Q} \cdot \frac{Q}{P_2}$$

aus dem Bild das Urbild t rekonstruieren lässt.

Um zu zeigen, dass die Abbildung surjektiv bis auf endlich viele Ausnahmen ist, brauchen wir die Voraussetzung, dass C irreduzibel ist. Dies bedeutet insbesondere, dass C nicht die Vereinigung von zwei Geraden ist. Sei $P \in C$, und die y -Koordinate von P sei nicht null (es gibt maximal zwei Punkte mit y -Koordinate null). Dann hat die Gerade durch P und 0 einen Schnittpunkt $H = (t, 1)$ mit der Parametrisierungsgeraden $V(Y - 1)$. Bis auf endlich viele Werte von t ist die Abbildung in diesem Punkt H definiert und P ist dann der Bildpunkt der Abbildung. Wegen der Irreduzibilität liegen auf den Ausnahmegeraden nur endlich viele Punkte von C , daher werden fast alle Punkte erreicht. \square

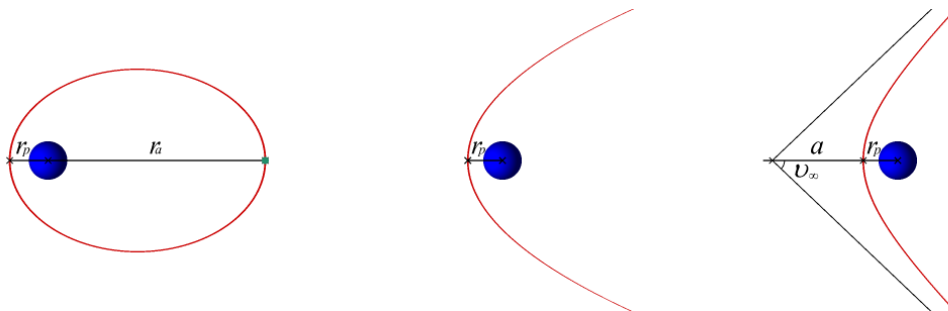


Johannes Kepler (1571-1630)

Die (singularitätenfreien) Kegelschnitte sind auch die Bewegungsbahnen von Himmelskörpern. Die möglichen Himmelsbahnen wurden erstmals von Johannes Kepler beschrieben. Das zugrunde liegende Gesetz ist, dass die Beschleunigung zu jedem Zeitpunkt proportional zur Gravitationskraft zwischen dem zentralen Massenpunkt (dem Stern, der Sonne) und dem bewegten Massenpunkt (dem Planeten, dem Kometen) ist. Die Anziehungskraft selbst hängt von den beiden Massen und dem Quadrat ihrer Entfernung ab. Es gibt „gebundene“ (Ellipsen) und „ungebundene“ Bahnen (Parabel, Hyperbel). Kreis und Ellipse können durch eine lineare Variablentransformation ineinander überführt werden. Man beachte, dass die rationalen Parametrisierungen nicht die „physikalischen Parametrisierungen“ sind. Letztere beschreiben wirklich den Bewegungsablauf, d.h. der Parameter ist dort die Zeit und die Ableitung an einem Zeitpunkt ist die Momentangeschwindigkeit. Die rationalen Parametrisierungen beschreiben „nur“ die Bahn. Der Kreis wird bekanntlich durch

$$(x, y) = (\cos t, \sin t)$$

gleichmäßig (mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag) durchlaufen.



Bemerkung 7.7. Die Parametrisierung einer Quadrik hängt nicht vom Grundkörper ab, denn die Terme, die die Abbildung definieren, sind immer dieselben. Allerdings kann über einem endlichen Körper der Definitionsbereich einer rationalen Abbildung leer sein. Wenn man aber zu einem größeren endlichen Körper \mathbb{F}_q übergeht, so hat die Abbildung stets einen nichtleeren Definitionsbereich.

Geometrisch gesprochen rühren die Definitionslücken der Parametrisierung daher, dass die konstruierten Geraden außer dem Nullpunkt keinen weiteren Schnittpunkt mit der Quadrik besitzen, oder aber die volle Gerade auf der Quadrik liegt (was nur im reduziblen Fall oder bei einer verdoppelten Geraden sein kann). Die Ausnahmемenge der Punkte der Quadrik, die nicht im Bild der Abbildung liegen, sind die Punkte auf der x -Achse (insbesondere der Nullpunkt), und, im reduziblen Fall, die Punkte auf der Geraden, die ganz auf der Quadrik liegt und durch den Nullpunkt geht.

7. ARBEITSBLATT

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 7.1. Transformiere die Quadrik

$$2x^2 + xy - 3y^2 + 5x - y + 3$$

auf eine reelle Standardgestalt.

Aufgabe 7.2. Parametrisiere die durch

$$F = 2x^2 - xy + 3y^2 + x - 5y$$

definierte Quadrik mit Hilfe des Nullpunktes und der Geraden $V(y - 1)$.

Aufgabe 7.3.* (Punkte)

Betrachte die beiden Kreise

$$X^2 + Y^2 = 1 \text{ und } 4X^2 + 3Y^2 = 9.$$

Zeige, dass die beiden Kreise über \mathbb{R} affin-linear äquivalent sind, aber nicht über \mathbb{Q} .

Tipp: Eine Argumentationsmöglichkeit ergibt sich aus Satz 68.2 (Mathematik (Osnabrück 2009-2011)).

Aufgabe 7.4.*

Sei $F = (0, 0)$ der Nullpunkt in der reellen Ebene und $G = V(X - 1)$. Es sei $e > 0$ eine reelle Zahl. Bestimme eine algebraische Gleichung für die Menge der Punkte $P = (x, y)$ mit der Eigenschaft, dass der Abstand $d(P, F)$ proportional mit Proportionalitätsfaktor \sqrt{e} zum (senkrechten) Abstand $d(P, G)$ ist.

Zeigen Sie, indem Sie die Gleichung geeignet transformieren, dass bei $e < 1$ eine Ellipse, bei $e = 1$ eine Parabel und bei $e > 1$ eine Hyperbel vorliegt.

Aufgabe 7.5. Sei K ein unendlicher Körper und sei $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ ein von null verschiedenes Polynom. Zeige, dass dann die Nullstellenmenge $V(F)$ nicht der gesamte affine Raum \mathbb{A}_K^n ist.

(Aus dieser Aufgabe folgt auch Aufgabe 3.12).

Aufgabe 7.6. Bestimme für das Bild der Abbildung

$$\mathbb{A}_K^1 \setminus \{-1, 0, 1\} \longrightarrow \mathbb{A}_K^2, t \longmapsto \left(\frac{t}{t^2 - 1}, \frac{1}{t} \right)$$

eine nichttriviale algebraische Gleichung.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 7.7. (9 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2, (u, v) \longmapsto (u^2 + uv, v - u^2) = (x, y).$$

Bestimme zu den drei folgenden Scharen aus parallelen Geraden die Bildkurven der Geraden unter dieser Abbildung (man gebe sowohl eine Parametrisierung als auch eine Kurvengleichung).

- (1) Die zur u -Achse parallelen Geraden,
- (2) die zur v -Achse parallelen Geraden,
- (3) die zur Antidiagonalen parallelen Geraden.

Bestimme zu jeder Schar, ob sich die Bildkurven überschneiden.

Aufgabe 7.8. (6 Punkte)

Finde für die verschiedenen reellen Quadriken eine Realisierung als Kegelschnitt, also als Schnitt einer Ebene mit dem Kegel $V(x^2 + y^2 - z^2)$, oder beweise, dass es eine solche Realisierung nicht gibt.

Aufgabe 7.9. (6 Punkte)

Wir betrachten die beiden Restklassenringe

$$R = \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1) \text{ und } S = \mathbb{R}[X, Y]/(XY - 1).$$

Zeige: S ist ein Hauptidealbereich, R hingegen nicht.

(Das sind die Ringe, die zum reellen Kreis und zur reellen Hyperbel gehören.)

Tipp: Man betrachte für R das Ideal $(X - 1, Y)$.

Aufgabe 7.10. (4 Punkte)

Parametrisiere die durch

$$F = x^2 + 2xy - y^2 + x - 3y + 4$$

definierte Quadrik $C = V(F)$ mit Hilfe des Punktes $(1, 2) \in C$ und der y -Achse. Führe keine Variablentransformation durch.

Aufgabe 7.11. (3 Punkte)

Betrachte die durch

$$C = V(X^{d+1} - Y^d)$$

definierte algebraische Kurve C ($d \geq 1$). Zeige, dass man mit dem Nullpunkt und der Geraden $V(X - 1)$ eine Parametrisierung von C erhält mit der im Beweis zu Satz 7.6 beschriebenen Methode.

Aufgabe 7.12. (6 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \in K[X, Y]$ ein irreduzibles Polynom. Zeige, dass die Kurve $V(F)$ genau dann rational ist, wenn es einen injektiven K -Algebra-Homomorphismus

$$Q(K[X, Y]/(F)) \longrightarrow K(T)$$

gibt.

(Hier steht links der Quotientenkörper und rechts der rationale Funktionenkörper.)

8. VORLESUNG - MECHANISCHE KURVEN

Mechanisch definierte algebraische Kurven



Es sei S eine feste Stange (man denke an ein mechanisches Maschinenteil) mit zwei fixierten Punkten $P_1, P_2 \in S$ (man denke an Gelenke). Diese Stange kann sich in der Ebene (dem \mathbb{R}^2) bewegen, wobei die beiden Punkte sich jeweils in zwei bestimmten Bahnen B_1 und B_2 (man denke an Schienen) befinden müssen. Die Bahnen können dabei recht einfach gegeben sein, etwa durch Geraden oder durch Kreise. Bei einer Dampfmaschine hat man ein drehbares Rad und eine gerade Schiene, die durch eine Stange gekoppelt sind. Wie beschreibt man den zugehörigen Bewegungsprozess? Was sind die erlaubten *Konfigurationen des Systems*? Wenn man einen Punkt P der Stange fixiert, wie sieht die *Bewegungsbahn* (oder *Trajektorie*) dieses Punktes aus?

Für die Extremfälle $P = P_1$ und $P = P_2$ sind die Bewegungsbahnen Teilmengen (in der Regel echte) von B_1 und B_2 . Für Punkte dazwischen erwartet man eine *stetige Deformation* der einen Bahn in die andere.

Situation 8.1. Seien B_1 und B_2 zwei ebene algebraische Kurven, die durch die Gleichungen $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$ beschrieben werden, $F_1, F_2 \in K[X, Y]$. Sei S eine „bewegliche Gerade“ (eine Stange) mit zwei Punkten $P_1, P_2 \in S$, $P_1 \neq P_2$, die voneinander den Abstand d haben. Das *mechanische System*, das durch alle Lagen von S in der Ebene gegeben ist, bei denen gleichzeitig $P_1 \in B_1$ und $P_2 \in B_2$ ist, wird folgendermaßen beschrieben.

Eine Lage der Stange in der Ebene ist eindeutig bestimmt, wenn für die beiden Punkte die Lage festgelegt ist (dies berücksichtigt noch nicht die Abstandsbedingung), also durch vier Variablen $(P_1, P_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2)$. Eine *erlaubte Konfiguration* muss dann die folgenden drei algebraischen Bedingungen erfüllen.

- (1) $F_1(x_1, y_1) = 0$
- (2) $F_2(x_2, y_2) = 0$
- (3) $(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 = d^2$ (Abstandsbedingung)

Es handelt sich also um drei algebraische Gleichungen in vier Variablen, als Lösungsmenge erwartet man also eine Kurve im \mathbb{A}_K^4 . Ein Punkt $P \in S$ wird durch den Abstand zu P_1 bzw. P_2 beschrieben. Da sich diese Punkte im mechanischen System bewegen, setzen wir die Koordinaten für den *mitbewegten Punkt* P an als

$$P = P_1 + u(P_2 - P_1)$$

(der Abstand von P zu P_1 ist also $\|u(P_2 - P_1)\| = |ud|$) und schreiben seine Koordinaten als

$$(x, y) = (x_1, y_1) + u(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (ux_2 + (1-u)x_1, uy_2 + (1-u)y_1)$$

Man kann dann das gesamte mechanische System (durch eine lineare Transformation) in den vier Variablen x_1, y_1, x, y ausdrücken, indem man bei ($u \neq 0$)

$$x_2 = \frac{x - (1-u)x_1}{u} \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{y - (1-u)y_1}{u}$$

in den Gleichungen ersetzt. In den neuen Variablen erhält man die drei Gleichungen

- (1) $F_1(x_1, y_1) = 0$
- (2) $F_2\left(\frac{x - (1-u)x_1}{u}, \frac{y - (1-u)y_1}{u}\right) = 0$
- (3) $(y - y_1)^2 + (x - x_1)^2 = u^2 d^2$

Die zu P gehörende Trajektorie kann man grundsätzlich dadurch erhalten, dass man aus diesem Gleichungssystem die Variablen x_1 und x_2 „eliminiert“, was eine algebraische Gleichung für x und y ergibt. Dies ist allerdings leichter gesagt als getan, häufig ist es sinnvoller, durch geschickte Manipulationen das Gleichungssystem zu vereinfachen.

Bemerkung 8.2. Manchmal interessiert man sich auch für die Situation, wo sich mit der Stange eine ganze Ebene mitbewegt, und für die Trajektorien von solchen Punkten. Dies ist etwa der Fall, wenn auf der Stange weitere Maschinenteile montiert sind. In diesem Fall kann man jeden Punkt der Ebene bzgl. P_1 und P_2 ansetzen als

$$(x, y) = (x_1, y_1) + u(x_2 - x_1, y_2 - y_1) + v(y_2 - y_1, -x_2 + x_1).$$

Es wird also der Punkt P_1 als Ursprung der bewegten Ebene, die Verbindungsgerade zu P_2 als erste Koordinatenachse und die dazu senkrechte Achse als zweite Koordinatenachse genommen.

Das gesamte mechanische (Stangen-)System wird also durch vier Variablen mit drei Gleichungen beschrieben. Die sichtbare Wirkungsweise, nämlich der Bewegungsablauf eines fixierten Punktes P auf S , liefert aber eine Trajektorie in der affinen Ebene.

Wir betrachten einige Beispiele.

Zwei Geraden als Bahnen

Beispiel 8.3. Seien L_1 und L_2 zwei Geraden in der reellen Ebene \mathbb{R}^2 und sei S eine bewegliche Gerade (eine Stange) mit zwei Punkten P_1, P_2 , die voneinander den Abstand d haben. Erlaubte Konfigurationen des Systems sind diejenigen Lagen von S , für die gleichzeitig $P_1 \in L_1$ und $P_2 \in L_2$ gelten. Die Geraden seien durch $L_1 = \{(x, y) \mid a_1x + b_1y = c_1\}$ und $L_2 = \{(x, y) \mid a_2x + b_2y = c_2\}$ festgelegt.

Die erlaubten Konfigurationen werden dann gemäß der Situationsbeschreibung durch die drei Bedingungen festgelegt:

- (1) $a_1x_1 + b_1y_1 = c_1$
- (2) $a_2x_2 + b_2y_2 = c_2$
- (3) $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = d^2$

Die Lösungsmenge der beiden linearen Gleichungen sind (einzeln betrachtet) dreidimensionale Unterräume. Die Lösungsmenge der dritten Gleichung kann man auffassen als das Produkt eines Kreises (in den Variablen $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$) mit einer affinen Ebene. Das ist eine Art von Zylinder, wobei allerdings die Fasern zweidimensional sind. Wie kann man die gemeinsame Nullstellenmenge beschreiben, und wie sieht die Trajektorie des mechanischen Systems aus, die ein Punkt $P \in S$ erzeugt?

Durch eine Variablentransformation kann man annehmen, dass die erste Gerade die x -Achse ist, also durch die Gleichung $y = 0$ definiert ist, und die andere durch $ax + by = c$. Das liefert für das System die Bedingung $y_1 = 0$, und das bedeutet, dass man die Variable y_1 eliminieren kann. Man gelangt dann zu einem System mit den drei Variablen x_1, x_2, y_2 und den zwei Bedingungen

- (1) $(x_2 - x_1)^2 + y_2^2 = d^2$
- (2) $ax_2 + by_2 = c$

Parallele Geraden



Wenn die zweite Gerade parallel zur ersten ist, so ist $a = 0$ und man kann die zweite Gleichung nach y_2 auflösen und erhält $y_2 = \frac{c}{b} = e$ ($b \neq 0$, sonst liegt keine Gerade vor). Die Zahl e ist der Abstand der parallelen Geraden. Man kann nun auch y_2 eliminieren, und übrig bleibt die einzige Gleichung $(x_2 - x_1)^2 + e^2 = d^2$, also

$$(x_2 - x_1)^2 = d^2 - e^2 = (d - e)(d + e).$$

Bei $e > d$ gibt es hierfür keine Lösung (der konstante Abstand der parallelen Geraden ist größer als der Koppelungsabstand auf der Stange).

Bei $e = d$ ergibt sich die Bedingung $x_1 = x_2$. Dies entspricht der Situation, wo der Parallelabstand der Geraden genau gleich dem Koppelungsabstand ist. Dann sind die einzigen erlaubten Konfigurationen diejenigen, wo die Stange senkrecht zu den beiden Geraden ist. Die Lösungsmenge ist also eine Gerade. Für jeden Punkt auf der Stange ist die Trajektorie einfach eine weitere parallele Gerade.

Sei nun $e < d$. Dann ist

$$x_2 - x_1 = \pm \sqrt{(d - e)(d + e)}.$$

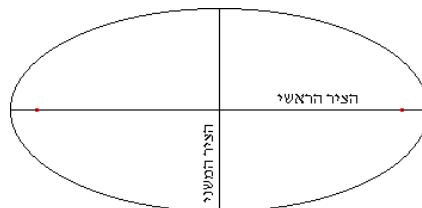
Die Lösungsmenge besteht aus zwei disjunkten Geraden. Dies entspricht den beiden unterschiedlichen Einhängungen, die nicht ineinander überführt werden können. Das mechanische System besteht also aus zwei Zusammenhangskomponenten. Für einen Punkt auf der Stange ergibt sich aber bei beiden Einhängungen die gleiche Trajektorie, nämlich eine parallele Gerade, die in gewissem Sinne doppelt durchlaufen wird. Hier besteht also die Lösungsmenge des vollen mechanischen Systems aus zwei (parallelen) affinen Geraden im vierdimensionalen affinen Raum, deren Trajektorien zu einem fixierten Punkt aber nur eine Gerade ist.

Nicht parallele Geraden

Wir betrachten nun den Fall, wo die beiden Geraden nicht parallel sind. Dann treffen sie sich und die Lösungsmenge kann nicht leer sein. Wir können durch eine weitere lineare Transformation annehmen, dass der Schnittpunkt gleich dem Nullpunkt $(0, 0)$ ist. Die zweite Gleichung wird dann durch $x_2 = ey_2$ beschrieben. Damit kann man x_2 eliminieren und erhält in den beiden Variablen x_1, y_2 die einzige Gleichung

$$(ey_2 - x_1)^2 + y_2^2 = d^2.$$

Der Konfigurationsraum des mechanischen Systems spielt sich also in einer (durch $y_1 = 0$ und $x_2 = ey_2$ definierten) Ebene ab und wird durch eine Quadrik beschrieben. Betrachtet man $ey_2 - x_1$ als eine neue Variable, so sieht man, dass es sich um eine Ellipse (in den Koordinaten x_1, y_2 ; in den Koordinaten $ey_2 - x_1, y_2$ ist es ein Kreis) handelt.



Wie sehen die Trajektorien aus? Sei P derjenige Punkt auf der Stange, der durch $P_1 + t(P_2 - P_1)$ gegeben ist. Nach der Situationsbeschreibung hat der Punkt P die Koordinaten

$$((1-t)x_1 + tey_2, ty_2),$$

wobei $(ey_2 - x_1)^2 + y_2^2 = d^2$ sein muss. In den Extremfällen $t = 0$ und $t = 1$ ergeben sich $(x_1, 0)$ (x_1 beliebig) bzw. (ey_2, y_2) (y_2 beliebig) als Lösungsmenge. Hierbei muss nach wie vor $(ey_2 - x_1)^2 + y_2^2 = d^2$ erfüllt sein, d.h. es muss zu gegebenem x_1 (bzw. y_2) eine Lösung der Gleichung in der anderen Variablen geben. Die gibt es, wenn x_1 (bzw. y_2) hinreichend klein ist. Insgesamt ergeben sich also gewisse Strecken auf den Ausgangsgeraden. Die Punkte P_1 und P_2 müssen ja auf ihren Bahnen bleiben, und können sich von der anderen Geraden nicht beliebig weit entfernen.

Sei also $t \neq 0, 1$. Aus dem Ansatz

$$(x, y) = ((1-t)x_1 + tey_2, ty_2)$$

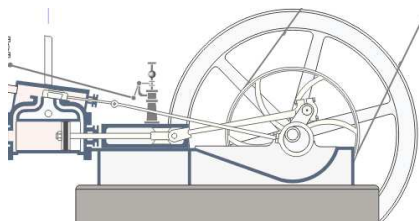
folgt $y_2 = \frac{y}{t}$ und $x_1 = \frac{x - tey_2}{1-t} = \frac{x - ey}{1-t}$ (das Urbild ist also eindeutig festgelegt). Die Gleichung wird dann zu

$$\left(\frac{ey}{t} - \frac{x - ey}{1-t} \right)^2 + \frac{y^2}{t^2} = d^2,$$

was wieder die Gleichung einer Ellipse ist.

Gerade und Kreis als Bahnen

Wir betrachten nun den Fall, wo die eine Bahn eine Gerade und die zweite Bahn ein Kreis ist. Dies ist die Situation bei einer Dampfmaschine (insbesondere, wenn die Gerade durch den Kreismittelpunkt verläuft).



Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass die Gerade durch $y = 0$ gegeben ist. Die Koordinaten des Punktes auf der Geraden sind dann

$$P_1 = (x_1, y_1) = (x_1, 0).$$

Für den Kreis kann man annehmen, dass er den Mittelpunkt $(0, b)$ und den Radius r besitzt. Der Kreisbahnpunkt $P_2 = (x_2, y_2)$ erfüllt dann die Bedingung $x_2^2 + (y_2 - b)^2 = r^2$. Das gesamte mechanische System wird also durch die zwei Bedingungen

$$\begin{aligned} (1) \quad & x_2^2 + (y_2 - b)^2 = r^2 \\ (2) \quad & (x_2 - x_1)^2 + y_2^2 = d^2 \end{aligned}$$

beschrieben, wobei d wieder der Koppelungsabstand sei. Betrachtet man diese zwei Gleichungen in den Koordinaten x_2, y_2 und $x_2 - x_1$, so sieht man, dass es sich um den Schnitt von zwei Zylindern handelt wie in Beispiel 4.6. Die erlaubten Stangenkonfigurationen des mechanischen Systems lassen sich also in drei geeigneten Koordinaten als der Durchschnitt von zwei Zylindern deuten. Dabei müssen allerdings weder die Radien übereinstimmen noch müssen die Innenachsen der Zylinder sich treffen. Ein solcher Durchschnitt und die zugehörigen Trajektorien können schon relativ kompliziert sein.

In den folgenden Beispielen brauchen wir ein Lemma, das eine einfache *Eliminationssituation* beschreibt.

Lemma 8.4. *Sei R ein Integritätsbereich und seien*

$$F_1 = a_1X^2 + b_1X + c_1 \text{ und } F_2 = a_2X^2 + b_2X + c_2$$

zwei quadratische Polynome in einer Variablen über R mit $a_1 \neq 0$ und (a_1, b_1) und (a_2, b_2) linear unabhängig. Dann gehört zum Ideal $(F_1, F_2) \cap R$ das Element

$$(a_2c_1 - a_1c_2)^2 - b_1(-a_2c_1b_2 - c_2a_2b_1 + a_1b_2c_2) + c_1(a_1b_2^2 - 2a_2b_1b_2).$$

Beweis. Wir haben zunächst

$$a_2F_1 - a_1F_2 = (a_2b_1 - a_1b_2)X + a_2c_1 - a_1c_2.$$

Daraus ergibt sich der Ausdruck (dieses Argument ist nicht ganz richtig, es lässt sich aber auch rigoroser durchführen)

$$X = -\frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}.$$

Wir setzen das in F_1 ein und multiplizieren mit dem Quadrat des Nenners und erhalten

$$a_1(a_2c_1 - a_1c_2)^2 - b_1(a_2c_1 - a_1c_2)(a_2b_1 - a_1b_2) + c_1(a_2b_1 - a_1b_2)^2.$$

Hier kommt im zweiten Summand $-b_1a_2c_1a_2b_1$ und im dritten Summand $c_1a_2^2b_1^2$ vor; diese beiden Summanden heben sich weg, in allen übrigen Monomen kommt a_1 vor. Wir können also a_1 wegekürzen und übrig bleibt

$$(a_2c_1 - a_1c_2)^2 - b_1(-a_2c_1b_2 - c_2a_2b_1 + a_1b_2c_2) + c_1(a_1b_2^2 - 2a_2b_1b_2).$$

□

Beispiel 8.5. Wir betrachten das mechanische Koppelungssystem, das durch den Einheitskreis und die dazu tangentielle Gerade durch $(0, 1)$ mit dem Koppelungsabstand $d = 2$ definiert ist, also durch den Geradenbahnpunkt und Kreisbahnpunkt

$$P_1 = (x_1, 1) \text{ und } P_2 = (x_2, y_2)$$

mit den beiden Bedingungen

$$(1) \ x_2^2 + y_2^2 = 1$$

$$(2) \ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - 1)^2 = 4.$$

Es handelt sich also um den Schnitt von zwei Zylindern, allerdings mit unterschiedlichen Radien und auch mit Innenachsen, die sich nicht treffen. Interessant sind die beiden Geraden

$$G_1 = V(x_2, y_2 + 1)$$

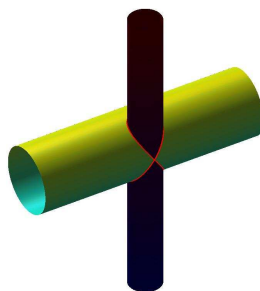
und

$$G_2 = V(x_2 - x_1, y_2 + 1),$$

die sich im Punkt

$$P = (0, 0, -1)$$

schneiden. Die Gerade G_1 liegt auf dem einen Zylinder und schneidet den anderen Zylinder tangential, und umgekehrt. Das geometrische Bild ist, dass der kleinere Zylinder aus dem größeren eine „gebogene Acht“ herausstanzt, wobei P der Kreuzungspunkt der Acht ist.



Die erlaubten Stangenkonfigurationen lassen sich folgendermaßen gewinnen. Zu jedem Kreispunkt gibt es zwei Möglichkeiten, wie die Stange liegen kann, mit der Ausnahme des Kreisbahnpunktes $(0, -1)$, wo der Geradenbahnpunkt $(0, 1)$ sein muss.

Wir starten mit der Situation, wo der Punkt $(0, 1)$ der Kreisbahnpunkt ist, und wo $(-2, 1)$ der Geradenbahnpunkt ist (die Stange liegt also links auf der Geraden), und lassen den Kreisbahnpunkt im Uhrzeigersinn um den Kreis wandern. Der Kreisbahnpunkt zieht dann den Geradenbahnpunkt hinter sich her, bis er unten bei $(0, -1)$ angekommen ist. Die Stange ist dann der vertikale Durchmesser des Kreises (der Geradenbahnpunkt ist dann in $(0, 1)$ und der

Kreisbahnpunkt ganz unten). Ab dann wandert der Kreisbahnpunkt auf dem linken Kreisbogen nach oben und schiebt dabei die Stange weiter nach rechts, bis der Geradenbahnpunkt bei $(2, 1)$ ankommt.

Die andere Möglichkeit, wo der Punkt $(0, 1)$ der Kreisbahnpunkt ist, ist die, wo die Stange rechts auf der Geraden liegt (mit $(2, 1)$ als Geradenbahnpunkt). Der Kreisbahnpunkt bewegt sich erneut im Uhrzeigersinn. Dabei schiebt er den Geradenbahnpunkt zuerst nach rechts bis zu einem gewissen Extremum, bei dem die Stange senkrecht zum Kreis im Kreisbahnpunkt steht. Von da an zieht der Kreisbahnpunkt den Geradenbahnpunkt zurück nach links, wobei sich die Stange aufrichtet, bis sie den vertikalen Durchmesser des Kreises einnimmt. Weiter wandert der Kreisbahnpunkt auf dem linken Kreisbogen wieder nach oben, wobei er den Geradenbahnpunkt bis zum Extremum nach links schiebt, und im letzten Stück wieder nach $(-2, 1)$ zieht.

Insbesondere wird der vertikale Durchmesser des Kreises zweimal von der Stange eingenommen, diese Stangenkonfiguration entspricht also dem Kreuzungspunkt der Acht.

Wir wollen nun die Trajektorie zum Mittelpunkt der Stange berechnen, also zu

$$\begin{aligned} P &= P_1 + \frac{1}{2}(P_2 - P_1) \\ &= (x_1, 1) + \frac{1}{2}(x_2 - x_1, y_2 - 1) \\ &= \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2} \right) \\ &=: (x, y). \end{aligned}$$

Wir interessieren uns für eine Gleichung für x und y , und führen die Variable $z = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$ ein. Dann ist

$$x_1 = x + z, \quad x_2 = x - z \quad \text{und} \quad y_2 = 2y - 1$$

und das Gleichungssystem schreibt sich in den neuen Variablen als

$$(x - z)^2 + (2y - 1)^2 = 1 \quad \text{und} \quad (-2z)^2 + (2y - 2)^2 = 4,$$

wobei man letzteres als $z^2 + (y - 1)^2 = 1$ schreiben kann bzw. als $z^2 + y^2 - 2y = 0$. Die erste Gleichung ergibt ausgerechnet

$$z^2 - 2zx + x^2 + 4y^2 - 4y = 0.$$

Damit ergibt sich nach Lemma 8.4 (mit $a_1 = a_2 = 1$ und $b_1 = 0$) die Gleichung

$$\begin{aligned} (c_1 - c_2)^2 + c_1 b_2^2 &= (y^2 - 2y - x^2 - 4y^2 + 4y)^2 + (y^2 - 2y)(2x)^2 \\ &= (-3y^2 + 2y - x^2)^2 + (y^2 - 2y)(2x)^2 \\ &= 9y^4 + x^4 + 4y^2 - 12y^3 + 6x^2y^2 - 4x^2y + 4x^2y^2 - 8x^2y \\ &= 9y^4 + 10x^2y^2 + x^4 - 12y^3 - 12x^2y + 4y^2. \end{aligned}$$

Das ist eine Quartik (Kurve vom Grad vier) mit zwei Singularitäten.

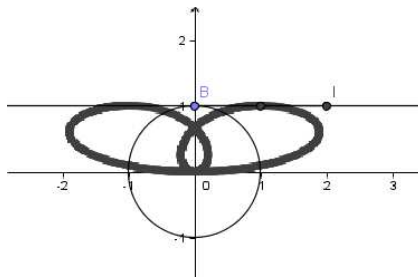


Bild zur Übung

Beispiel 8.6. Wir betrachten das mechanische System aus Einheitskreis und x -Achse, wo der Koppelungsabstand $d = 1$ ist. Das mechanische System wird dann durch die zwei Gleichungen

$$(1) \quad x_2^2 + y_2^2 = 1$$

$$(2) \quad (x_2 - x_1)^2 + y_2^2 = 1$$

beschrieben. Es handelt sich um den Durchschnitt von zwei Zylindern mit gleichem Radius und sich treffenden Innenachsen, d.h. wir können auf die Ergebnisse von Beispiel 4.6 zurückgreifen. Dort wurde gezeigt, dass der Durchschnitt durch zwei Ellipsen gegeben ist, die sich in zwei Punkten schneiden. Diese Beschreibung muss sich auch im Kontext des mechanischen Systems wiederfinden. Welche Stangenkonfigurationen entsprechen der einen Ellipse, welche der anderen, welche Konfigurationen liegen auf beiden?

Machen wir uns also einen Überblick über die erlaubten Konfigurationen. Wenn der Geradenpunkt (also der Punkt auf der Geradenbahn) der Kreismittelpunkt ist, so ist jeder Punkt des Kreises als Kreisbahnpunkt erlaubt. Die radialen Strahlen des Kreises bilden also eine Schar von erlaubten Stangenkonfigurationen, und diese bilden zusammen die eine Ellipse. Die andere Ellipse entspricht der Menge der Stangenkonfigurationen, bei denen der Geradenbahnpunkt von -2 nach $+2$ läuft und dabei den Kreisbahnpunkt im oberen oder unteren Kreisbogen vor sich herschiebt bzw. hinterherzieht. Es gibt zwei Stangenkonfigurationen, die zu beiden Familien gehören, nämlich die mit dem Kreismittelpunkt als Geradenbahnpunkt und $(0, 1)$ bzw. $(0, -1)$ als Kreisbahnpunkt. In einer solchen Stangenkonfiguration kann das mechanische System nicht nur vorwärts und rückwärts laufen, sondern wesentlich die Richtung wechseln.

Wie sehen die Trajektorien eines Punktes auf der bewegten Stange aus? Die Gesamtrajektorie ist die Vereinigung der beiden Trajektorien, die zu den beiden irreduziblen Komponenten des Systems gehören. Wie viele Selbstdurchdringungspunkte gibt es?

Für einen Punkt $P = P_1 + u(P_2 - P_1)$ der Koppelungsstange sind die Koordinaten gleich

$$(z_1, z_2) = (x_1 + u(x_2 - x_1), uy_2).$$

Bei $u = 0$ ist die Trajektorie das reelle Intervall $[-2, 2]$, und bei $u = 1$ ist es der Einheitskreis. Sei also nun $u \neq 0, 1$. Die Projektion der radialen Komponenten des Systems ist einfach der Kreis mit Radius u . Die Projektion der anderen Ellipse ist wieder eine Ellipse, die den Kreis in unterschiedlicher Weise schneiden kann. Siehe auch Aufgabe 8.1.

8. ARBEITSBLATT

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.1. (6 Punkte)

Es sei $C \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ der Schnitt von zwei Zylindern mit Radius eins (C ist also die Vereinigung von zwei Ellipsen). Wir betrachten die durch einen Vektor $v = (a, b, c) \neq 0$ definierte senkrechte Projektion

$$p_v : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2.$$

Man charakterisiere, in Abhängigkeit von a, b, c , die möglichen Bilder unter diesen Projektionen.

Aufgabe 8.2. (4 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2, (x, y) \longrightarrow (x^2, y^2) = (u, v).$$

Wie sieht das Bild der Ebene und wie das Bild des Einheitskreises unter dieser Abbildung für $K = \mathbb{R}$ und wie für $K = \mathbb{C}$ aus? Im reellen Fall, wenn der Kreis einmal durchlaufen wird, wie oft wird das Bild durchlaufen?

Aufgabe 8.3. (4 Punkte)

Sei $\varphi : \mathbb{A}_K^r \rightarrow \mathbb{A}_K^n$ eine polynomiale Abbildung und sei $T \subseteq \mathbb{A}^r$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Gleichheit

$$\overline{\varphi(T)} = \overline{\varphi(\overline{T})}$$

gilt.

Aufgabe 8.4. (3 Punkte)

Zeige, dass die Aussage von Aufgabe 8.3 nicht gilt ohne die Voraussetzung, dass die Abbildung polynomial ist.

Aufgabe 8.5. (6 Punkte)

Betrachte in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ die beiden Nullstellenmengen

$$K = V(X^2 + Y^2 - 1) \text{ und } C = V(X^4 + Y^4 - 1).$$

Zeige, dass es eine polynomiale Abbildung in zwei Variablen gibt, die die eine Nullstellenmenge surjektiv auf die andere abbildet. Zeige, dass diese Abbildung schon über \mathbb{Q} definiert ist, dort aber nicht surjektiv ist. Zeige ferner, dass es über \mathbb{Q} überhaupt keine surjektive polynomiale Abbildung von C nach K geben kann und dass es nur die konstanten polynomialen Abbildungen von K nach C gibt.

Aufgabe 8.6. (10 Punkte)

Schreibe eine Computeranimation, die die Stangenkonfiguration bzw. die zugehörigen Trajektorien aus Beispiel 8.5 darstellt.

9. VORLESUNG - HILBERTS BASISSATZ

Noethersche Ringe

Unser Ziel ist es zu zeigen, dass wenn R ein noetherscher Ring ist, dass dann auch der Polynomring $R[X]$ ein noetherscher Ring ist (Hilbertscher Basissatz). Dies gilt dann auch für die Hinzunahme von mehreren (endlich vielen) Variablen und insbesondere für Polynomringe in endlich vielen Variablen über einem Körper. Wir erinnern an den Begriff des noetherschen Ringes.



Emmy Noether (1882-1935)

Definition 9.1. Ein kommutativer Ring R heißt *noethersch*, wenn jedes Ideal darin endlich erzeugt ist.

Proposition 9.2. Für einen kommutativen Ring R sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1) R ist noethersch.
- (2) Jede aufsteigende Idealkette

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \dots$$

wird stationär, d.h. es gibt ein n mit $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+1} = \dots$

Beweis. (1) \Rightarrow (2). Sei

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \dots$$

eine aufsteigende Idealkette in R . Wir betrachten die Vereinigung $\mathfrak{a} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}_n$, die wieder ein Ideal in R ist. Da R noethersch ist, ist \mathfrak{a} endlich erzeugt, d.h. $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_k)$. Da diese f_i in der Vereinigung der Ideale \mathfrak{a}_n liegen, und da die Ideale aufsteigend sind, muss es ein n geben derart, dass $f_1, \dots, f_k \in \mathfrak{a}_n$ liegt. Wegen

$$(f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{a}_{n+m} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}_n \subseteq (f_1, \dots, f_k)$$

für $m \geq 0$ muss hier Gleichheit gelten, so dass die Idealkette ab n stationär ist.

(2) \Rightarrow (1). Sei \mathfrak{a} ein Ideal in R . Wir nehmen an, \mathfrak{a} sei nicht endlich erzeugt, und konstruieren sukzessive eine unendliche echt aufsteigende Idealkette $\mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}$, wobei die \mathfrak{a}_n alle endlich erzeugt sind. Sei dazu

$$\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{a}$$

bereits konstruiert. Da \mathfrak{a}_n endlich erzeugt ist, aber \mathfrak{a} nicht, ist die Inklusion $\mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{a}$ echt und es gibt ein Element

$$f_{n+1} \in \mathfrak{a}, f_{n+1} \notin \mathfrak{a}_n$$

Dann setzt das Ideal $\mathfrak{a}_{n+1} := \mathfrak{a}_n + (f_{n+1})$ die Idealkette echt aufsteigend fort. \square

Lemma 9.3. Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist auch jeder Restklassenring R/\mathfrak{b} noethersch.

Beweis. Sei $\mathfrak{a} \subseteq R/\mathfrak{b}$ ein Ideal und sei $\tilde{\mathfrak{a}} \subseteq R$ das Urbildideal davon. Dieses ist endlich erzeugt nach Voraussetzung, also $\tilde{\mathfrak{a}} = (f_1, \dots, f_n)$. Die Restklassen dieser Erzeuger, also $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$, bilden ein Idealerzeugendensystem von \mathfrak{a} : Für ein Element $\bar{g} \in \mathfrak{a}$ gilt ja $g = \sum_{i=1}^n r_i f_i$ in R und damit $\bar{g} = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \bar{f}_i$ in R/\mathfrak{b} . \square

Der Hilbertsche Basissatz

Wie viele grundlegende Aussagen der kommutativen Algebra geht der Hilbertsche Basissatz, dem wir uns jetzt zuwenden, auf David Hilbert zurück, genauer auf seine Arbeit von 1890, „Ueber die Theorie der algebraischen Formen“.



David Hilbert (1862-1943)

Satz 9.4. *Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist auch der Polynomring $R[X]$ noethersch.*

Beweis. Sei \mathfrak{b} ein Ideal im Polynomring $R[X]$. Zu $n \in \mathbb{N}$ definieren wir ein Ideal \mathfrak{a}_n in R durch

$$\mathfrak{a}_n = \{c \in R \mid \text{es gibt } F \in \mathfrak{b} \text{ mit } F = cX^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_1X + c_0\}.$$

Die Menge \mathfrak{a}_n besteht also aus allen Leitkoeffizienten von Polynomen vom Grad n aus \mathfrak{b} . Es handelt sich dabei offensichtlich um Ideale in R (wobei wir hier 0 als Leitkoeffizient zulassen). Ferner ist $\mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{a}_{n+1}$, da man ja ein Polynom F vom Grad n mit Leitkoeffizient c mit der Variablen X multiplizieren kann, um ein Polynom vom Grad $n+1$ zu erhalten, das wieder c als Leitkoeffizient besitzt. Da R noethersch ist, muss diese aufsteigende Idealkette stationär werden; sei n so, dass $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+1} = \dots$ ist.

Zu jedem $i \leq n$ sei nun $\mathfrak{a}_i = (c_{i1}, \dots, c_{ik_i})$ ein endliches Erzeugendensystem, und es seien

$$F_{ij} = c_{ij}X^i + \text{Terme von kleinerem Grad}$$

zugehörige Polynome aus \mathfrak{b} (die es nach Definition der \mathfrak{a}_i geben muss).

Wir behaupten, dass \mathfrak{b} von allen $\{F_{ij} \mid 0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k_i\}$ erzeugt wird. Dazu beweisen wir für jedes $G \in \mathfrak{b}$ durch Induktion über den Grad von G , dass es als Linearkombination mit diesen F_{ij} darstellbar ist. Für G konstant, also $G \in R$, ist dies klar. Sei nun der Grad von G gleich d und die Aussage sei für kleineren Grad bewiesen. Wir schreiben

$$G = cX^d + c_{d-1}X^{d-1} + \dots + c_1X + c_0.$$

Es ist $c \in \mathfrak{a}_d$ und damit kann man c schreiben als R -Linearkombination der $c_{ij}, 0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k_i$. Bei $d \leq n$ kann man c sogar schreiben als R -Linearkombination der $c_{dj}, j = 1, \dots, k_d$, sagen wir $c = \sum_{j=1}^{k_d} r_j c_{dj}$. Dann ist $G - \sum_{j=1}^{k_d} r_j F_{dj} \in \mathfrak{b}$ und hat einen kleineren Grad, sodass man darauf die Induktionsvoraussetzung anwenden kann. Bei $d > n$ ist

$$c = \sum_{i=0, \dots, n, j=1, \dots, k_i} r_{ij} c_{ij}.$$

Damit gehört

$$G - \sum_{i=0, \dots, n, j=1, \dots, k_i} r_{ij} X^{d-i} F_{ij}$$

ebenfalls zu \mathfrak{b} und hat einen kleineren Grad, so dass man wieder die Induktionsvoraussetzung anwenden kann. \square

Korollar 9.5. *Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist auch $R[X_1, \dots, X_n]$ noethersch.*

Beweis. Dies folgt durch induktive Anwendung des Hilbertschen Basissatzes auf die Kette

$$\begin{aligned} R \subset R[X_1] \subset (R[X_1])[X_2] &= R[X_1, X_2] \subset (R[X_1, X_2])[X_3] \\ &= R[X_1, X_2, X_3] \subset \dots \subset R[X_1, \dots, X_n]. \end{aligned}$$

\square

Korollar 9.6. *Sei K ein Körper. Dann ist $K[X_1, \dots, X_n]$ noethersch.*

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Korollar 9.5. \square

Der Hilbertsche Basissatz bedeutet insbesondere, dass jede abgeschlossene Untervarietät $V \subset \mathbb{A}_K^n$ in einem affinen Raum durch endlich viele Polynome beschrieben werden kann. Jedes algebraische Nullstellengebilde ist also bereits das Nullstellengebilde von endlich vielen Polynomen.

Korollar 9.7. *Sei $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine affin-algebraische Menge. Dann gibt es eine Abbildung*

$$\varphi : \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^m,$$

die komponentenweise durch Polynome $F_i \in K[X_1, \dots, X_n]$ gegeben ist, also $\varphi = (F_1, \dots, F_m)$, derart, dass V das Urbild des Nullpunktes $0 \in \mathbb{A}_K^m$ ist.

Beweis. Es sei \mathfrak{a} ein beschreibendes Ideal für V , also $V = V(\mathfrak{a})$. Nach dem Hilbertschen Basissatz gibt es $F_1, \dots, F_m \in K[X_1, \dots, X_n]$ mit $\mathfrak{a} = (F_1, \dots, F_m)$. Damit ist insbesondere

$$V = V(\mathfrak{a}) = V(F_1) \cap \dots \cap V(F_m).$$

Diese F_i kann man zu einer Abbildung

$$\varphi = (F_1, \dots, F_m) : \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^m$$

zusammenfassen. Dann ist $\varphi(P) = 0$ genau dann, wenn alle Komponentenfunktionen null sind, und das ist genau dann der Fall, wenn $P \in V(F_i)$ ist für alle i . \square

Definition 9.8. Es sei R ein kommutativer Ring. Eine R -Algebra A heißt *von endlichem Typ* (oder *endlich erzeugt*), wenn sie die Form

$$A = R[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$$

besitzt.

Eine endlich erzeugte R -Algebra besitzt also eine Darstellung als Restklassenring einer Polynomalgebra über R in endlich vielen Variablen. Eine solche Darstellung ist keineswegs eindeutig.

Korollar 9.9. *Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist jede R -Algebra von endlichem Typ ebenfalls noethersch. Insbesondere ist für einen Körper K jede K -Algebra von endlichem Typ noethersch.*

Beweis. Dies folgt aus Korollar 9.5 und aus Lemma 9.3. \square

Zerlegung in irreduzible Komponenten

Aus dem Hilbertschen Basissatz folgt, dass eine aufsteigende Idealkette

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \dots$$

in $K[X_1, \dots, X_n]$ stationär werden muss. Dies hat für absteigende Ketten von affin-algebraischen Teilmengen in einem affinen Raum folgende Konsequenz.

Satz 9.10. *In einem affinen Raum \mathbb{A}_K^n wird jede absteigende Folge von abgeschlossenen Mengen*

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots$$

stationär.

Beweis. Sei

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots$$

eine absteigende Kette von affin-algebraischen Teilmengen im \mathbb{A}_K^n . Daraus folgt nach Lemma 3.7 $\text{Id}(V_i) \subseteq \text{Id}(V_{i+1})$ für die zugehörigen Verschwindungsideale. Nach Korollar 9.6 wird diese Idealkette stationär, sagen wir für

$i \geq i_0$. Nach Lemma 3.8 (3) ist $V_i = V(\text{Id}(V_i))$. Daraus folgt dann aber für $i \geq i_0$, dass

$$V_i = V(\text{Id}(V_i)) = V(\text{Id}(V_{i+1})) = V_{i+1},$$

sodass die absteigende Kette stationär werden muss. \square

Es ergibt sich daraus durch Übergang zu den Komplementen, dass jede aufsteigende Kette von Zariski-offenen Mengen in einem affinen Raum stationär wird. Eine solche Topologie nennt man auch *noethersch* (generell nennt man eine (partielle) Ordnung, für die jede aufsteigende Kette stationär wird, noethersch). Für einen noetherschen Raum gilt: jede nicht-leere Teilmenge von offenen Mengen (abgeschlossenen Mengen) besitzt ein maximales (minimales) Element. Dies kann man vorteilhaft als Beweisprinzip einsetzen (*Beweis durch noethersche Induktion*): Man möchte zeigen, dass eine gewisse Eigenschaft E für alle abgeschlossenen Teilmengen gilt, und man betrachtet die Menge derjenigen abgeschlossenen Teilmengen, die E nicht erfüllen. Man möchte zeigen, dass die Menge leer ist, und nimmt an, dass sie nicht leer ist. Dann besitzt sie auch ein minimales Element, und dies muss man dann zum Widerspruch führen. Die Gültigkeit dieses Beweisprinzips beruht darauf, dass man in einer nicht-leeren Menge ohne einem minimalen Element eine unendlich absteigende Kette konstruieren kann. Ein typisches Beispiel für dieses Beweisprinzip liefert der Beweis der folgenden Aussage.

Satz 9.11. *Sei $V \subset \mathbb{A}_K^n$ eine affin-algebraische Menge. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung*

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_k$$

mit irreduziblen Mengen V_i mit $V_i \not\subseteq V_j$ für $i \neq j$.

Beweis. Die Existenz beweisen wir durch noethersche Induktion. Angenommen, nicht jede affin-algebraische Menge habe eine solche Zerlegung. Dann gibt es auch eine minimale Teilmenge, sagen wir V , ohne eine solche Zerlegung. V kann nicht irreduzibel sein, sondern es gibt eine nicht-triviale Darstellung $V = V_1 \cup V_2$. Da V_1 und V_2 echte Teilmengen von V sind, gibt es für diese beiden jeweils endliche Darstellungen als Vereinigung von irreduziblen Teilmengen. Diese beiden vereinigen sich zu einer endlichen Darstellung von V , was ein Widerspruch ist. Zur Eindeutigkeit. Seien

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_k = W_1 \cup \dots \cup W_m$$

zwei Zerlegungen in irreduzible Teilmengen (jeweils ohne Inklusionsbeziehung). Es ist

$$V_1 = V_1 \cap V = V_1 \cap (W_1 \cup \dots \cup W_m) = (V_1 \cap W_1) \cup \dots \cup (V_1 \cap W_m).$$

Da V_1 irreduzibel ist, muss $V_1 \subseteq W_j$ für ein j sein. Umgekehrt ist mit dem gleichen Argument $W_j \subseteq V_i$ für ein i , woraus $i = 1$ und $V_1 = W_j$ folgt. Ebenso findet sich V_2 etc. in der Zerlegung rechts wieder, sodass die Zerlegung eindeutig ist. \square

Moduln

Definition 9.12. Sei R ein kommutativer Ring und $M = (M, +, 0)$ eine *additiv* geschriebene kommutative Gruppe. Man nennt M einen *R -Modul*, wenn es eine Operation

$$R \times M \longrightarrow M, (r, v) \longmapsto rv = r \cdot v,$$

(*Skalarmultiplikation* genannt) gibt, die folgende Axiome erfüllt (dabei seien $r, s \in R$ und $u, v \in M$ beliebig):

- (1) $r(su) = (rs)u$,
- (2) $r(u + v) = (ru) + (rv)$,
- (3) $(r + s)u = (ru) + (su)$,
- (4) $1u = u$.

Definition 9.13. Sei R ein kommutativer Ring und M ein R -Modul. Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt *Unterm modul*, wenn sie eine Untergruppe von M ist und wenn für jedes $u \in U$ und $r \in R$ gilt, dass auch $ru \in U$ ist.

Definition 9.14. Sei R ein kommutativer Ring und M ein R -Modul. Eine Familie $v_i \in M$, $i \in I$, heißt *Erzeugendensystem* für M , wenn es für jedes Element $v \in M$ eine Darstellung

$$v = \sum_{i \in J} r_i v_i$$

gibt, wobei $J \subseteq I$ endlich ist und $r_i \in R$.

Definition 9.15. Sei R ein kommutativer Ring und M ein R -Modul. Der Modul M heißt *endlich erzeugt* oder *endlich*, wenn es ein endliches Erzeugendensystem v_i , $i \in I$, für ihn gibt (also mit einer endlichen Indexmenge).

Ein kommutativer Ring R selbst ist in natürlicher Weise ein R -Modul, wenn man die Ringmultiplikation als Skalarmultiplikation interpretiert. Die Ideale sind dann genau die R -Unterm odulen von R . Die Begriffe Ideal-Erzeugendensystem und Modul-Erzeugendensystem stimmen für Ideale überein.

9. ARBEITSBLATT

Aufwärm aufgaben

Aufgabe 9.1. Begründe, warum der Ring

$$\mathbb{Z}[X, Y, Z, W]/(XY - ZW, 5X^8 - YZ^3 + 2WXY)$$

noethersch ist.

Aufgabe 9.2. Sei R ein kommutativer Ring und sei

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \dots$$

eine aufsteigende Kette von Idealen. Zeige, dass die Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}_n$ ebenfalls ein Ideal ist. Zeige ebenso durch ein einfaches Beispiel, dass die Vereinigung von Idealen im Allgemeinen kein Ideal sein muss.

Aufgabe 9.3. Sei K ein Körper und sei

$$K[X_n, n \in \mathbb{N}]$$

der Polynomring über K in unendlich vielen Variablen. Man beschreibe darin ein nicht endlich erzeugtes Ideal und eine unendliche, echt aufsteigende Idealkette.

Aufgabe 9.4. Man gebe ein Beispiel eines nicht-noetherschen Ringes, dessen Reduktion ein Körper ist.

Aufgabe 9.5. Wir betrachten auf- und absteigende Ketten von affin-algebraischen Mengen in \mathbb{A}_K^n und von Idealen in $K[X_1, \dots, X_n]$. Zeige die folgenden Aussagen. a) Für einen endlichen Körper wird jede aufsteigende Kette

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots$$

von affin-algebraischen Mengen stationär. b) Für einen unendlichen Körper und $n \geq 1$ wird nicht jede aufsteigende Kette

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots$$

von affin-algebraischen Mengen stationär. c) Für (einen beliebigen Körper und) $n \geq 1$ wird nicht jede absteigende Idealkette

$$\mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \dots$$

stationär. d) Für einen unendlichen Körper und $n \geq 1$ gibt es echt absteigende Ketten von affin-algebraischen Mengen beliebiger Länge.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.6. (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei I ein Ideal mit dem Restklassenring $S = R/I$. Zeige, dass die Ideale von S eindeutig denjenigen Idealen von R entsprechen, die I umfassen.

Zeige, dass das Gleiche gilt für Primideale, Radikalideale und maximale Ideale.

Aufgabe 9.7. (4 Punkte)

Zeige, dass \mathbb{Q} keine Algebra von endlichem Typ über \mathbb{Z} ist.

Aufgabe 9.8. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $A = K[X, Y]$. Finde eine K -Unteralgebra von A , die nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 9.9. (4 Punkte)

Es seien $F, G \in K[X_1, \dots, X_n]$ Polynome und $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Diskutiere, wie sich die verschiedenen Äquivalenzbegriffe aus der siebten Vorlesung für F und G (und für $V(F)$ und $V(G)$) unter dem Körperwechsel verhalten.

Aufgabe 9.10. (4 Punkte)

Bestimme zum Ideal

$$I = (10, 6x^2 + 8, 4x^3 - 12)$$

in $\mathbb{Z}[x]$ die im Beweis zum Hilbertschen Basissatz konstruierte Idealkette und das zugehörige Erzeugendensystem von I . Schreibe die obigen Erzeuger als Linearkombination mit dem konstruierten Erzeugendensystem.

Aufgabe 9.11. (4 Punkte)

Sei R ein noetherscher Integritätsbereich. Zeige, dass sich jedes Element aus R als ein Produkt von irreduziblen Elementen schreiben lässt.

10. VORLESUNG - HILBERTS NULLSTELLENSATZ I

Noethersche Moduln

Wir wollen zeigen, dass für einen noetherschen Ring R und einen endlich erzeugten R -Modul jeder R -Untermodule wieder endlich erzeugt ist. Solche Moduln nennt man noethersch.

Definition 10.1. Sei R ein kommutativer Ring und M ein R -Modul. Dann heißt M *noethersch*, wenn jeder R -Untermodule von M endlich erzeugt ist.

Für $M = R$ stimmt dies mit der Definition eines noetherschen Ringes überein, da ja die R -Untermodule von R gerade die Ideale sind.

In den folgenden Aussagen verwenden wir folgende Sprech- bzw. Schreibweise.

Definition 10.2. Sei R ein kommutativer Ring und seien M_1, M_2, M_3 R -Moduln. Man nennt ein Diagramm der Form

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

eine *kurze exakte Sequenz* von R -Moduln, wenn M_1 ein R -Untermodul von M_2 ist, und wenn M_3 ein Restklassenmodul von M_2 ist, der isomorph zu M_2/M_1 ist.

Lemma 10.3. Sei R ein kommutativer Ring und

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln. Dann ist M genau dann noethersch, wenn sowohl M_1 als auch M_3 noethersch sind.

Beweis. Sei zunächst M noethersch, und $U \subseteq M_1$ ein Untermodul. Dann ist U direkt auch ein Untermodul von M , also nach Voraussetzung endlich erzeugt. Sei nun $V \subseteq M_3$ ein Untermodul des Restklassenmoduls. Das Urbild von V in M unter der Restklassenabbildung sei \tilde{V} . Dieser Modul ist nach Voraussetzung endlich erzeugt, und die Bilder eines solchen Erzeugendensystems erzeugen auch den Bildmodul V .

Seien nun die äußeren Moduln M_1 und M_3 noethersch, und sei $U \subseteq M$ ein Untermodul. Es sei $U_3 \subseteq M_3$ der Bild-Untermodul davon. U_3 wird von endlich vielen Elementen s_1, \dots, s_n erzeugt, und wir können annehmen, dass diese $s_i = \bar{r}_i$ die Bilder von Elementen $r_i \in U$ sind. Betrachte $U \cap M_1$. Dies ist ein Untermodul von M_1 , und daher endlich erzeugt, sagen wir von t_1, \dots, t_k , die wir als Elemente in U auffassen. Wir behaupten, dass

$$r_1, \dots, r_n, t_1, \dots, t_k$$

ein Erzeugendensystem von U bilden. Sei dazu $m \in U$ ein beliebiges Element. Dann ist $\bar{m} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{r}_i$ und daher geht das Element $m - \sum_{i=1}^n a_i r_i$ rechts auf null. Dann gehört es aber zum Kern der Restklassenabbildung, also zu M_1 . Andererseits gehört dieses Element auch zu U , also zum Durchschnitt $M_1 \cap U$, der ja von den t_1, \dots, t_k erzeugt wird. Also kann man schreiben

$$m - \sum_{i=1}^n a_i r_i = \sum_{j=1}^k b_j t_j$$

bzw. $m = \sum_{i=1}^n a_i r_i + \sum_{j=1}^k b_j t_j$. □

Satz 10.4. Sei R ein noetherscher kommutativer Ring und M ein endlich erzeugter R -Modul. Dann ist M ein noetherscher Modul.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Anzahl n der Modul-Erzeuger von M . Bei $n = 0$ liegt der Nullmodul vor. Sei $n = 1$. Dann gibt es eine surjektive Abbildung $R \rightarrow M \cong R/\mathfrak{a}$ vor. Nach Lemma 10.3 ist aber ein Restklassenmodul eines noetherschen Moduls wieder noethersch, und der Ring selbst ist nach Voraussetzung noethersch, also ist M noethersch.

Sei nun $n \geq 2$ und die Aussage für kleinere n bereits bewiesen. Sei m_1, \dots, m_n ein Erzeugendensystem von M . Wir betrachten den durch m_1, \dots, m_{n-1} erzeugten R -Untermodul, den wir mit M_1 bezeichnen. Dieser Untermodul gibt Anlass zu einer kurzen exakten Sequenz, nämlich

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M/M_1 =: M_3 \longrightarrow 0.$$

Hier wird der linke Modul von $n-1$ Elementen erzeugt und ist nach Induktionsvoraussetzung noethersch. Der rechte Modul wird von der Restklasse von m_n , also von einem Element erzeugt, ist also auch noethersch. Nach Lemma 10.3 ist dann M noethersch. \square

Hilbertscher Nullstellensatz - algebraische Version

Wir wollen die algebraische Version des Hilbertschen Nullstellensatzes beweisen. Dazu benötigen wir die folgenden beiden Lemmata.

Lemma 10.5. *Sei R ein noetherscher kommutativer Ring und A eine endlich erzeugte R -Algebra. Es sei $B \subseteq A$ eine R -Unteralgebra, über der A endlich (als B -Modul) sei. Dann ist auch B eine endlich erzeugte R -Algebra.*

Beweis. Wir schreiben $A = R[x_1, \dots, x_n]$ und $A = Ba_1 + \dots + Ba_m$ mit $a_i \in A$. Wir setzen

$$x_i = \sum_{j=1}^m b_{ij} a_j \quad \text{und} \quad a_i a_j = \sum_{k=1}^m b_{ijk} a_k$$

mit Koeffizienten $b_{ij}, b_{ijk} \in B$. Wir betrachten die von diesen Koeffizienten erzeugte R -Unteralgebra S von B und den S -Modul $\tilde{A} = Sa_1 + \dots + Sa_m$. Die Produkte $a_i a_j$ gehören wieder zu diesem Modul, daher ist \tilde{A} sogar eine S -Algebra. Weil die x_i ebenfalls zu \tilde{A} gehören, gilt sogar $A = \tilde{A}$. Dies bedeutet, dass A ein endlicher S -Modul ist. Nach Korollar 9.9 ist S ein noetherscher Ring und nach Satz 10.4 ist der S -Untermodul $B \subseteq A$ ebenfalls endlicher S -Modul. Die Kette $R \subseteq S \subseteq B$ zeigt schließlich, dass B eine endlich erzeugte R -Algebra ist. \square

Lemma 10.6. *Sei K ein Körper und $R = K(X)$ der zugehörige rationale Funktionenkörper. Dann ist R keine endlich erzeugte K -Algebra.*

Beweis. Sei angenommen, dass die rationalen Funktionen $F_i = \frac{P_i}{Q_i}$, $i = 1, \dots, n$, ein endliches Erzeugendensystem von $K(X)$ bilden, mit $P_i, Q_i \in K[X]$, $Q_i \neq 0$. Durch Übergang zu einem Hauptnenner kann man annehmen, dass $Q_i = Q$ konstant ist. Die Annahme bedeutet also insbesondere, dass der Körper der rationalen Funktionen sich durch Nenneraufnahme an nur einem Element ergeben würde. Da Q keine Konstante ist (sonst

wäre $K[X] = K(X)$, was nicht der Fall ist), ist $Q - 1 \neq 0$ und daher ist $\frac{1}{Q-1} \in K(X)$. Also gibt es eine Darstellung

$$\frac{1}{Q-1} = \frac{P}{Q^s}$$

mit einem geeigneten s . Daraus folgt $Q^s = (Q-1)P$. Da Q^s und $Q-1$ das Einheitsideal erzeugen, folgt daraus, dass bereits $Q-1$ das Einheitsideal erzeugt, also selbst eine Einheit ist. Dann wäre Q aber doch eine Konstante, was es nicht ist. \square

Die folgende Aussage ist die algebraische Version des Hilbertschen Nullstellensatzes.

Satz 10.7. *Sei K ein Körper und sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, die (als K -Algebra) endlich erzeugt sei. Dann ist L endlich über K .*

Beweis. Wir setzen $L = K[x_1, \dots, x_n]$. Sei K_i der Quotientenkörper von $K[x_1, \dots, x_i]$ (innerhalb von L). Wir haben also eine Körperkette

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_{n-1} \subseteq K_n = L.$$

Wir wollen zeigen, dass L endlich über K ist, und dazu genügt es nach Satz 2.8 (Körper- und Galoistheorie (Osnabrück 2011)) zu zeigen, dass jeder Schritt in der Körperkette endlich ist. Sei angenommen, dass $K_i \subseteq K_{i+1}$ nicht endlich ist, aber alle folgenden Schritte endlich sind. Wir wenden Lemma 10.5 auf

$$K \subseteq K_{i+1} \subseteq L$$

an und erhalten, dass K_{i+1} endlich erzeugt über K ist. Dann ist insbesondere K_{i+1} auch endlich erzeugt über K_i . Andererseits ist K_{i+1} der Quotientenkörper von $K_i[x_{i+1}]$. Wir haben also eine Kette

$$K_i \subseteq K_i[x_{i+1}] \subseteq Q(K_i[x_{i+1}]) = K_{i+1},$$

wo K_{i+1} endlich erzeugt über K_i ist, aber nicht endlich. Wäre x_{i+1} algebraisch über K_i , so auch endlich, und dann wäre $K_i[x_{i+1}]$ bereits ein Körper nach Aufgabe 10.1. Dann wäre die letzte Kette insgesamt endlich, im Widerspruch zur Wahl von i . Also ist x_{i+1} transzendent über K_i . Dann ist aber $K_i[x_{i+1}]$ isomorph zu einem Polynomring in einer Variablen und $Q(K_i[x_{i+1}])$ ist isomorph zum rationalen Funktionenkörper über K_i . Dieser ist aber nach Lemma 10.6 nicht endlich erzeugt, so dass sich erneut ein Widerspruch ergibt. \square

Satz 10.8. *Sei K ein Körper und seien A und B zwei K -Algebren von endlichem Typ. Es sei $\varphi : A \rightarrow B$ ein K -Algebra-Homomorphismus. Dann ist für jedes maximale Ideal \mathfrak{m} aus B auch das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ ein maximales Ideal.*

Beweis. Sei \mathfrak{m} ein maximales Ideal aus B . Wir wissen, dass unter jedem Ringhomomorphismus das Urbild eines Primideals wieder prim ist, also ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ zunächst ein Primideal, das wir \mathfrak{p} nennen. Wir erhalten induzierte Ringhomomorphismen

$$K \longrightarrow A/\mathfrak{p} \longrightarrow B/\mathfrak{m} = L,$$

wobei L ein Körper ist und wobei beide Homomorphismen injektiv und von endlichem Typ sind. Da die Gesamtabbildung von endlichem Typ ist und K und L Körper sind, folgt nach Satz 10.7, dass diese Abbildung endlich ist. Wir wollen zeigen, dass A/\mathfrak{p} ein Körper ist. Dies folgt aber aus Aufgabe 10.2. \square

Satz 10.9. *Sei K ein Körper und sei A eine K -Algebra von endlichem Typ. Dann ist jedes Radikal in A der Durchschnitt von maximalen Idealen.*

Beweis. Nach Aufgabe 10.5 ist jedes Radikal der Durchschnitt von Primidealen. Es genügt also zu zeigen, dass jedes Primideal in einer endlich erzeugten Algebra der Durchschnitt von maximalen Idealen ist. Sei \mathfrak{p} ein Primideal und $f \notin \mathfrak{p}$. Dann ist \mathfrak{p} ein Primideal in der Nenneraufnahme $B := A_f$. Es gibt ein (in A_f) maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset A_f$ oberhalb von $\mathfrak{p}A_f$. Wir fassen A_f als endlich erzeugte K -Algebra auf und betrachten

$$\varphi: A \longrightarrow A_f.$$

Dann ist $\mathfrak{p} \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ und $f \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$. Nach Satz 10.8 ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ maximal. \square

Satz 10.10. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei A eine endlich erzeugte K -Algebra. Dann ist jeder Restklassenkörper von A isomorph zu K . Anders formuliert: Jedes maximale Ideal ist ein Punktideal.*

Beweis. Sei \mathfrak{m} ein maximales Ideal der endlich erzeugten K -Algebra A und betrachte

$$K \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{m} =: L.$$

Hier ist L ein Körper und zugleich eine endlich erzeugte K -Algebra. Nach Satz 10.7 muss also L eine endliche K -Algebra sein. Da K algebraisch abgeschlossen ist, muss $K = L$ sein. \square

Für den Polynomring $K[X_1, \dots, X_n]$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K bedeutet das, dass alle maximalen Ideale die Form $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ besitzen. Die maximalen Ideale entsprechen also den Koordinatentupeln $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_K^n$. Dies ist mit Punktideal gemeint.

10. ARBEITSBLATT

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 10.1. Sei K ein Körper und sei A eine kommutative K -Algebra, die als K -Modul endlich sei. Zeige, dass ein Element $f \in A$ genau dann eine Einheit ist, wenn es ein Nichtnullteiler ist.

Aufgabe 10.2. Seien K und L Körper, sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei A , $K \subseteq A \subseteq L$, ein Zwischenring. Zeige, dass dann A ebenfalls ein Körper ist.

Aufgabe 10.3. Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R -Modul. Dann ist M genau dann noethersch, wenn jede aufsteigende Kette

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

von R -Untermoduln stationär wird.

Die folgenden Aufgaben verwenden den Begriff des artinschen Moduls, der „dual“ zum Begriff des noetherschen Moduls ist.

Sei R ein kommutativer Ring. Ein R -Modul M heißt *artinsch*, wenn jede absteigende Kette

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \dots$$

von R -Untermoduln stationär wird.

Ein kommutativer Ring R heißt *artinsch*, wenn er als R -Modul artinsch ist.

Aufgabe 10.4. Es sei A ein artinscher Integritätsbereich. Man zeige, dass A ein Körper ist. Man gebe ein Beispiel eines artinschen kommutativen Ringes, der kein Körper ist.

Aufgabe 10.5. Sei \mathfrak{a} ein Radikal in einem kommutativen Ring. Zeige, dass \mathfrak{a} der Durchschnitt von Primidealen ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 10.6. (3 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $F \in K[X, Y]$ ein nicht-konstantes Polynom. Zeige, dass der Restklassenring

$$K[X, Y]/(F)$$

eine endliche $K[T]$ -Algebra ist.

Aufgabe 10.7. (5 Punkte)

Seien R, S, T kommutative Ringe und seien $\varphi : R \rightarrow S$ und $\psi : S \rightarrow T$ Ringhomomorphismen derart, dass S endlich über R und T endlich über S ist. Zeige, dass dann auch T endlich über R ist.

Aufgabe 10.8. (5 Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring und sei

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von A -Moduln. Man zeige, dass N genau dann artinsch ist, wenn M und P artinsch sind.

Aufgabe 10.9. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und A eine endliche K -Algebra. Zeige: Dann ist A artinsch.

Aufgabe 10.10. (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und M ein R -Modul. Zeige: Wenn M artinsch und $\phi : M \rightarrow M$ R -linear und injektiv ist, so ist ϕ ein Isomorphismus. Formuliere und beweise auch eine analoge Aussage für den Fall, dass M noethersch ist.

11. VORLESUNG - HILBERTS NULLSTELLENSATZ II

Hilbertscher Nullstellensatz - geometrische Version

Wir wollen nun die geometrische Version des Hilbertschen Nullstellensatzes beweisen, der für den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers eine eindeutige Beziehung zwischen den affin-algebraischen Mengen im affinen Raum \mathbb{A}_K^n und den Radikalidealen im Polynomring stiftet.

Satz 11.1. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $V = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine affin-algebraische Menge, die durch das Ideal \mathfrak{a} beschrieben werde. Es sei $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ ein Polynom, das auf V verschwindet. Dann gehört F zum Radikal von \mathfrak{a} , d.h. es gibt ein $r \in \mathbb{N}$ mit $F^r \in \mathfrak{a}$.*

Beweis. Angenommen, F gehöre nicht zum Radikal von \mathfrak{a} . Dann gibt es nach Satz 10.9 auch ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset K[X_1, \dots, X_n]$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ und mit $F \notin \mathfrak{m}$. Nach Satz 10.10 ist

$$\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$$

für gewisse $a_1, \dots, a_n \in K$. Die Eigenschaft $F \notin \mathfrak{m}$ bedeutet, dass F im zugehörigen Restekörper nicht 0 ist, und das bedeutet $F(a_1, \dots, a_n) \neq 0$. Wegen $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ ist aber (a_1, \dots, a_n) ein Punkt von V , so dass dort nach Voraussetzung F verschwindet. Das ist also ein Widerspruch. \square

Satz 11.2. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit dem Polynomring $K[X_1, \dots, X_n]$ und dem affinen Raum \mathbb{A}_K^n . Dann gibt es eine natürliche Korrespondenz zwischen affin-algebraischen Mengen in \mathbb{A}_K^n und Radikalidealen in $K[X_1, \dots, X_n]$. Dabei gehen Radikale auf ihre Nullstellengebilde und affin-algebraische Mengen auf ihre Verschwindungsideale.*

Beweis. Sei $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ affin-algebraisch. Dann gilt $V = V(\text{Id}(V))$ nach Lemma 3.8. Für ein Radikal $I \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ gilt die Inklusion $I \subseteq \text{Id}(V(I))$ ebenfalls nach Lemma 3.8. Die umgekehrte Inklusion, also $\text{Id}(V(I)) \subseteq I$ ist der Inhalt des Hilbertschen Nullstellensatzes. \square

Korollar 11.3. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $F_i \in K[X_1, \dots, X_n]$, $i \in I$, Polynome mit*

$$\mathbb{A}_K^n = \bigcup_{i \in I} D(F_i).$$

Dann erzeugen die F_i das Einheitsideal in $K[X_1, \dots, X_n]$.

Beweis. Sei \mathfrak{b} das von den F_i erzeugte Ideal. Die Voraussetzung besagt, dass

$$\bigcap_{i \in I} V(F_i) = V(\mathfrak{b})$$

leer ist. Dann ist $V(1) \subseteq V(\mathfrak{b})$, da ja $V(1)$ ebenfalls leer ist. Aus dem Hilbertschen Nullstellensatz folgt, dass eine Potenz von 1, also 1 selbst, zu \mathfrak{b} in $K[X_1, \dots, X_n]$ gehört. D.h. dass \mathfrak{b} das Einheitsideal ist. \square

Der Hilbertsche Nullstellensatz, wie wir ihn für den affinen Raum und den Polynomring formuliert haben, gilt entsprechend für jedes $V(\mathfrak{a})$ und den zugehörigen Restklassenring $K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$.

Korollar 11.4. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $R = K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$ eine endlich erzeugte K -Algebra mit Nullstellengebilde $V =$*

$V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$. Es sei \mathfrak{b} ein Ideal in R und $F \in R$ ein Element, das auf $V(\mathfrak{b}) \subseteq V$ verschwindet. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $F^r \in \mathfrak{b}$ in R .

Beweis. Die Verschwindungsbedingung $V(\mathfrak{b}) \subseteq V(F)$ in $V = V(\mathfrak{a})$ besagt zurückübersetzt in den affinen Raum, dass dort $V(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}) \subseteq V(F)$ gilt, wobei jetzt F ein repräsentierendes Polynom aus $K[X_1, \dots, X_n]$ und \mathfrak{b} das Urbildideal in $K[X_1, \dots, X_n]$ sei. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $F^r \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Dies bedeutet modulo \mathfrak{a} , dass in R die Beziehung $F^r \in \mathfrak{b}$ gilt. \square

Korollar 11.5. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $V = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine affin-algebraische Menge, die durch das Ideal \mathfrak{a} beschrieben werde. Es seien $F_i \in K[X_1, \dots, X_n]$, $i \in I$, Polynome mit

$$V = \bigcup_{i \in I} D(F_i).$$

Dann erzeugen die F_i das Einheitsideal in $K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$.

Beweis. Sei \mathfrak{b} das von allen F_i , $i \in I$, erzeugte Ideal in $K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$. Die Voraussetzung besagt, dass

$$V(\mathfrak{b}) = \bigcap_{i \in I} V(F_i)$$

(auf V) leer ist. Dann ist $V(1) \subseteq V(\mathfrak{b})$, da ja $V(1)$ ebenfalls leer ist. Aus dem Hilbertschen Nullstellensatz folgt, dass eine Potenz von 1, also 1 selbst, zu \mathfrak{b} in $K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$ gehört. \square

Korollar 11.6. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $V = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine affin-algebraische Menge, die durch das Ideal \mathfrak{a} beschrieben werde. Es sei $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ ein Polynom, das auf V keine Nullstelle besitzt. Dann ist F im Restklassenring $K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$ eine Einheit.

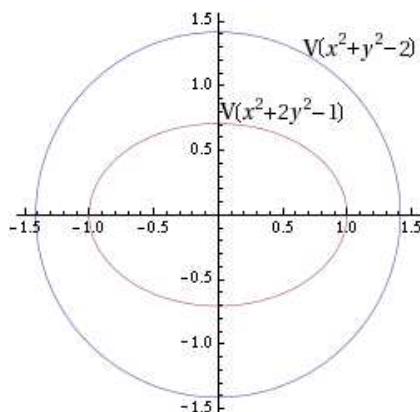
Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Korollar 11.5. \square

Korollar 11.7. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien V_1 und V_2 zwei affin-algebraische Mengen in \mathbb{A}_K^n . Dann gilt

$$\text{Id}(V_1 \cap V_2) = \text{rad}(\text{Id}(V_1) + \text{Id}(V_2)).$$

Beweis. Sei $\mathfrak{a}_1 = \text{Id}(V_1)$ und $\mathfrak{a}_2 = \text{Id}(V_2)$. Die Aussage ergibt sich aus $\text{rad}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) = \text{Id}(V(\text{rad}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2))) = \text{Id}(V(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)) = \text{Id}(V(\mathfrak{a}_1) \cap V(\mathfrak{a}_2))$, wobei die erste Gleichung auf dem Hilbertschen Nullstellensatz beruht. \square

Auch diese Eigenschaften gelten nicht ohne die Voraussetzung algebraisch abgeschlossen, wie das folgende Beispiel zeigt.



Beispiel 11.8. Wir betrachten die beiden algebraischen Kurven

$$V_1 = V(X^2 + Y^2 - 2) \text{ und } V_2 = V(X^2 + 2Y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}_K^2.$$

Bei $K = \mathbb{R}$ sind das beides irreduzible Quadriken. Der Durchschnitt wird beschrieben durch das Ideal

$$(X^2 + Y^2 - 2, X^2 + 2Y^2 - 1) = (Y^2 + 1, X^2 - 3).$$

Da das Polynom $Y^2 + 1$ im Reellen keine Nullstelle hat, ist der Durchschnitt $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ leer. Das Verschwindungsideal des (leeren) Durchschnittes ist natürlich das Einheitsideal, die Summe der beiden Verschwindungsideale ist aber nicht das Einheitsideal.

Es folgt, dass die Funktion $X^2 + 2Y^2 - 1$ auf $V(X^2 + Y^2 - 2)$ keine Nullstelle besitzt, also dort überall eine Einheit ist, aber dass sie keine Einheit im Koordinatenring 1 ist.

Der Koordinatenring zu einer affin-algebraischen Menge

Sei $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine affin-algebraische Menge mit Verschwindungsideal $\text{Id}(V)$. Ein Polynom $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ definiert eine Funktion auf dem affinen Raum und induziert damit eine Funktion auf der Teilmenge V .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_K^n & \xrightarrow{F} & K \\ \uparrow & \nearrow & \\ V & & \end{array}$$

Dabei induziert ein Element aus dem Verschwindungsideal (nach Definition) die Nullfunktion auf V , und zwei Polynome $G, H \in K[X_1, \dots, X_n]$, deren Differenz zum Verschwindungsideal gehören, induzieren auf V die gleiche Funktion. Es ist daher naheliegend, den Restklassenring $K[X_1, \dots, X_n]/\text{Id}(V)$ als Ring der polynomialen (oder algebraischen) Funktion auf V zu betrachten.

Definition 11.9. Zu einer affin-algebraischen Menge $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ mit Verschwindungsideal $\text{Id}(V)$ nennt man

$$R(V) = K[X_1, \dots, X_n] / \text{Id}(V)$$

den *Koordinatenring* von V .

Dieser Begriff ist nicht völlig unproblematisch, insbesondere, wenn K nicht algebraisch abgeschlossen ist, siehe die Beispiele weiter unten. Wir erwähnen zunächst einige elementare Eigenschaften.

Proposition 11.10. *Sei $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine affin-algebraische Menge und sei $R = K[X_1, \dots, X_n] / \text{Id}(V)$ der zugehörige Koordinatenring. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) R ist reduziert.
- (2) $V = \emptyset$ genau dann, wenn R der Nullring ist.
- (3) V ist irreduzibel genau dann, wenn R ein Integritätsbereich ist.
- (4) V besteht aus einem einzigen Punkt genau dann, wenn $R = K$ ist.
- (5) Ist K algebraisch abgeschlossen, und $V = V(\mathfrak{a})$, so ist $R = K[X_1, \dots, X_n] / \text{rad}(\mathfrak{a})$.

Beweis. Es sei $I = \text{Id}(V)$ das Verschwindungsideal zu V .

- (1). Dies folgt aus Lemma 3.14 und Aufgabe 3.6.
- (2). $V = \emptyset$ ist äquivalent zu $1 \in I$, und das ist äquivalent zu $R = 0$.
- (3). Dies folgt aus Lemma 4.3 und Lemma (siehe die Übersicht zur Restklassenbildung).
- (4). Sei $V = \{P\}$, $P = (a_1, \dots, a_n)$. Dann ist $I = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ und der Koordinatenring ist

$$K[X_1, \dots, X_n] / (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \cong K.$$

Umgekehrt, wenn der Koordinatenring K ist, so muss der zugehörige Restklassenhomomorphismus ein Einsetzungshomomorphismus $X_i \mapsto a_i$ sein, und das Verschwindungsideal zu V muss ein Punktideal sein, und es ist $P = (a_1, \dots, a_n) \in V$. Wenn es noch einen weiteren Punkt $Q \in V$, $Q \neq P$, gibt, so hat man einen Widerspruch, da nicht alle $X_i - a_i$ in Q verschwinden.

- (5). Bei K algebraisch abgeschlossen ist $\text{Id}(V) = \text{rad}(\mathfrak{a})$ nach dem Hilbertschen Nullstellensatz. \square

Satz 11.11. *Sei K ein unendlicher Körper. Dann ist das Verschwindungsideal des affinen Raumes \mathbb{A}_K^n das Nullideal und der zugehörige Koordinatenring ist der Polynomring $K[X_1, \dots, X_n]$.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Anzahl der Variablen. Bei $n = 1$ folgt die Aussage daraus, dass ein Polynom vom Grad d maximal d Nullstellen besitzt. Zum Induktionsschritt sei $F \in K[X_1, \dots, X_n]$

ein Polynom, das an allen Punkten von $\mathbb{A}_K^n = K^n$ verschwindet. Wir schreiben F als

$$F = P_d X_n^d + P_{d-1} X_n^{d-1} + \dots + P_1 X_n + P_0$$

mit Polynomen $P_d, \dots, P_0 \in K[X_1, \dots, X_{n-1}]$. Wir müssen zeigen, dass $F = 0$ ist, was äquivalent zu $P_i = 0$ ist für alle $i = 0, \dots, d$. Sei also (ohne Einschränkung) angenommen, dass P_d nicht das Nullpolynom ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist es dann auch nicht die Nullfunktion, d.h. es gibt einen Punkt (a_1, \dots, a_{n-1}) mit $P_d(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq 0$. Damit ist $F(a_1, \dots, a_{n-1})$ ein Polynom in der einen Variablen X_n vom Grad d und ist nach dem Fall einer Variablen nicht die Nullfunktion. \square

Beispiel 11.12. Satz 11.11 ist nicht richtig für endliche Körper. Für einen endlichen Körper besteht ein affiner Raum nur aus endlich vielen Punkten und es gibt viele Polynome, die auf all diesen Punkten verschwinden. Typische Beispiele werden gegeben durch die Polynome $X_i^q - X_i$, wobei q die Anzahl der Körperelemente bezeichne.

Beispiel 11.13. Sei $R = \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2)$. Da Quadrate im Reellen nie negativ sind, besteht die Nullstellenmenge des Polynoms $X^2 + Y^2$ einzig aus dem Nullpunkt, $V(X^2 + Y^2) = \{(0, 0)\}$. Das zugehörige Verschwindungsideal ist das maximale Ideal (X, Y) , und der zugehörige Restklassenring (der Koordinatenring) ist dann $\mathbb{R}[X, Y]/(X, Y) \cong \mathbb{R}$. Der Koordinatenring kann also vom Restklassenring, mit dem man startet und dessen Ideal das Nullstellengebilde definiert, sehr verschieden sein.

11. ARBEITSBLATT

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 11.1. Skizziere die Graphen der Funktionen x und y auf $V(xy)$.

Man mache sich klar, dass das Produkt xy die Nullfunktion ist.

Aufgabe 11.2. Betrachte die Hyperbel $V(xy - 1)$ über dem Körper $K = \mathbb{Z}/(11)$. Bestimme das Inverse von $4x^3$ im zugehörigen Koordinatenring.

Aufgabe 11.3. Sei R ein kommutativer Ring und sei $f_j, j \in J$, eine Familie von Elementen in R . Es sei angenommen, dass die f_j zusammen das Einheitsideal erzeugen. Zeige, dass es eine endliche Teilfamilie $f_j, j \in J_0 \subseteq J$ gibt, die ebenfalls das Einheitsideal erzeugt.

Aufgabe 11.4. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ zwei Radikalideale. Zeige, dass die Nullstellengebilde $V(\mathfrak{a})$ und $V(\mathfrak{b})$ genau dann affin-linear äquivalent sind, wenn es eine affin-lineare Variablentransformation gibt, die die beiden Ideale ineinander überführt.

Aufgabe 11.5. Es sei K ein Körper und $V, W \subseteq \mathbb{A}_K^n$ seien zwei affin-algebraische Mengen. Es sei $V \subseteq W$ vorausgesetzt. Man definiere einen K -Algebra-Homomorphismus zwischen den beiden Koordinatenringen $R(V)$ und $R(W)$ und beschreibe dessen wichtigste Eigenschaften. Man gebe ein Beispiel von zwei affin-algebraischen Mengen, die nicht ineinander enthalten sind, von denen aber die Koordinatenringe isomorph sind.

Aufgabe 11.6. Es sei K ein Körper mit q Elementen und sei $V = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine affin-algebraische Menge. Zeige, dass der Koordinatenring von V nicht gleich $K[x_1, \dots, x_n]/(x_1^q - x_1, \dots, x_n^q - x_n) + \mathfrak{a}$ sein muss.

Aufgabe 11.7. Es sei K ein Körper der Charakteristik null. Wir betrachten den Schnitt von einem Zylinder und einer Kugel, und zwar

$$C = V(X^2 + Y^2 - 1) \cap V((X - 3)^2 + Y^2 + Z^2 - 7) \subseteq \mathbb{A}_K^3.$$

Zeige, dass man den Koordinatenring von C als Restklassenring eines Polynomrings in zwei Variablen schreiben kann.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 11.8. (4 Punkte)

Sei $F \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ und sei $U \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ eine Teilmenge, die in der metrischen Topologie offen und nicht leer sei. Es sei $F|_U = 0$ die Nullfunktion. Zeige, dass dann F das Nullpolynom ist.

Aufgabe 11.9. (3 Punkte)

Beweise Korollar 11.3 direkt aus Satz 10.10.

Aufgabe 11.10. (7 Punkte)

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, und R der Polynomring in n Variablen über K . Wir wollen einen alternativen Beweis einsehen, dass $\text{Id}(V(J)) = \text{rad}(J)$ für jedes Ideal J in R ist, der auf Korollar 11.3 aufbaut. Sei $f \in \text{Id}(V(J))$. Betrachte den Ring $R[T]$ und zeige, dass das Ideal

$$J' = (J, 1 - f \cdot T)$$

trivial ist. Schließe daraus, dass f im Radikal von J liegt.

Aufgabe 11.11. (3 Punkte)

Sei $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ und betrachte die dadurch definierte polynomiale Abbildung

$$\varphi: \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^{n+1}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, F(x_1, \dots, x_n)),$$

die eine Bijektion des affinen Raumes mit dem Graph von φ definiert. Zu einer affin-algebraischen Menge $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ betrachten wir das Bild $V' = \varphi(V)$. Man zeige, dass V' ebenfalls affin-algebraisch ist und man gebe ein beschreibendes Ideal an. Zeige, dass V genau dann irreduzibel ist, wenn V' irreduzibel ist.

Aufgabe 11.12. (5 Punkte)

Wir betrachten die beiden algebraischen Kurven

$$V(x^2 + y^2 - 2) \text{ und } V(x^2 + 2y^2 - 1)$$

über dem Körper $\mathbb{Z}/(7)$. Zeige, dass der Durchschnitt leer ist, und finde einen Erweiterungskörper $K \supseteq \mathbb{Z}/(7)$, über dem der Durchschnitt nicht leer ist. Berechne alle Punkte im Durchschnitt über K und über jedem anderen Erweiterungskörper. Man beschreibe auch den Koordinatenring des Durchschnitts.

Aufgabe 11.13. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und seien P_1, \dots, P_n endlich viele Punkte in der affinen Ebene \mathbb{A}_K^2 . Es seien $a_1, \dots, a_n \in K$ beliebig vorgegebene Werte. Zeige, dass es ein Polynom $F \in K[X, Y]$ gibt mit $F(P_i) = a_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.

12. VORLESUNG - DAS K-SPEKTRUM



Alexander Grothendieck (1928-)

Wie hängen affin-algebraische Mengen und deren Koordinatenringe zusammen? Hier kann man nur für nicht-endliche Grundkörper gehaltvolle Antworten erwarten, da es im endlichen Fall zu wenige Punkte gibt. Eine befriedigende Theorie erfordert sogar, dass man sich auf algebraisch abgeschlossene Körper beschränkt, oder aber - das ist der Standpunkt der von Alexander Grothendieck entwickelten Schematheorie - nicht nur K -Punkte betrachtet, sondern generell maximale Ideale und Primideale als Punkte mitberücksichtigt.

Eine erste wichtige Frage ist folgende: eine K -Algebra R von endlichem Typ besitzt mehrere, in aller Regel gleichberechtigte Darstellungen als Restklassenring einer Polynomialgebra, sagen wir

$$K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a} = R = K[X_1, \dots, X_m]/\mathfrak{b}.$$

Dazu gehören die beiden Nullstellengebilde $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ und $V(\mathfrak{b}) \subseteq \mathbb{A}_K^m$. Wie hängen diese beiden Nullstellengebilde zusammen?

Beispiel 12.1. Wir betrachten den Polynomring in einer Variablen $R = K[T]$. Ihm entspricht zunächst die affine Gerade \mathbb{A}_K^1 . Man kann R aber auch auf ganz verschiedene Arten als Restklassenring einer Polynomialgebra in mehreren Variablen erhalten. Sei beispielsweise $a \in K$, $a \neq 0$, und betrachte den Restklassenring $K[X, Y]/(aY + bX)$. Dieser Ring ist (als K -Algebra) isomorph zu R , wie die Abbildung

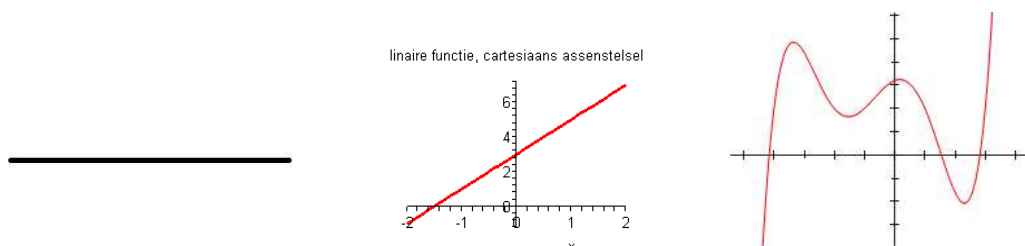
$$K[X, Y]/(aY + bX) \longrightarrow K[T], \quad X \longmapsto T, \quad Y \longmapsto -\frac{b}{a}T,$$

zeigt. Das zugehörige Nullstellengebilde $V(aX + bY)$ ist einfach die Gerade in der affinen Ebene, die durch die Gleichung $Y = -\frac{b}{a}X$ beschrieben wird.

Eine weitere Möglichkeit, den Polynomring in einer Variablen als Restklassenring darzustellen, ist durch $K[X, Y]/(Y - P(X))$ gegeben, wobei $P(X)$ ein beliebiges Polynom in der einen Variablen X ist. Der Ringhomomorphismus

$$K[X, Y]/(Y - P(X)) \longrightarrow K[T], X \longmapsto T, Y \longmapsto P(T),$$

zeigt, dass ein Isomorphismus vorliegt. Das zugehörige Nullstellengebilde ist einfach der Graph des Polynoms $P(X)$.



Der Punkt an diesem Beispiel ist, dass alle drei geometrischen Objekte die Nullstellenmengen zu verschiedenen Restklassendarstellungen von $K[T]$ sind. Vom Standpunkt der algebraischen Geometrie sind das drei gleichberechtigte Darstellungen der affinen Geraden, auch wenn sie unterschiedlich „aussehen“. In der algebraischen Geometrie muss man so hinschauen, dass sie gleich aussehen. Was man sieht sind nur verschiedene Einbettungen des „eigentlichen und wahren“ geometrischen Objektes, das zu einer K -Algebra intrinsisch gehört, nämlich das K -Spektrum.

Definition 12.2. Zu einer kommutativen K -Algebra R von endlichem Typ bezeichnet man die Menge der K -Algebra-Homomorphismen

$$\text{Hom}_K(R, K)$$

als das K -Spektrum von R . Es wird mit $K - \text{Spek}(R)$ bezeichnet.

Die Elemente in einem K -Spektrum $K - \text{Spek}(R)$ betrachten wir als Punkte und bezeichnen sie üblicherweise mit P , obwohl es definitionsgemäß Abbildungen sind, nämlich K -Algebra-Homomorphismen von R nach K . Für ein Ringelement $f \in R$ schreiben wir dann auch einfach $f(P)$ (statt $P(f)$) für den Wert von f unter dem mit P bezeichneten Ringhomomorphismus (es ist nicht unüblich, einen Punkt als eine Auswertung von Funktionen anzusehen, die in einer gewissen Umgebung des Punktes definiert sind).

Das K -Spektrum wird wieder mit einer *Zariski-Topologie* versehen, wobei zu einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ (oder zu einer beliebigen Teilmenge aus R) die Teilmenge

$$V(\mathfrak{a}) = \{P \in K - \text{Spek}(R) : f(P) = 0 \text{ für alle } f \in \mathfrak{a}\}$$

als abgeschlossen erklärt wird. In der Tat wird dadurch eine Topologie definiert, siehe Aufgabe 12.4.

Lemma 12.3. *Sei K ein Körper und sei $K[X_1, \dots, X_n]$ der Polynomring in n Variablen. Dann stehen die K -Algebra-Homomorphismen von $K[X_1, \dots, X_n]$ nach K in natürlicher Weise in Bijektion mit den Punkten aus dem affinen Raum $\mathbb{A}_K^n = K^n$, und zwar entspricht dem Punkt (a_1, \dots, a_n) der Einsetzungshomomorphismus $X_i \mapsto a_i$. Mit anderen Worten,*

$$K - \text{Spek}(K[X_1, \dots, X_n]) = \mathbb{A}_K^n.$$

Beweis. Ein K -Algebra-Homomorphismus ist stets durch ein K -Algebra Erzeugendensystem festgelegt. D.h. die Werte an den Variablen X_i legen einen K -Algebra-Homomorphismus von $K[X_1, \dots, X_n]$ nach K fest. Ein solcher Einsetzungshomomorphismus ist durch $X_i \mapsto a_i$ definiert. Zugleich ist hier jede Vorgabe von Werten (a_1, \dots, a_n) erlaubt. \square

Beispiel 12.4. Das K -Spektrum zur K -Algebra K besteht einfach aus einem Punkt, und zwar ist die Identität $K \rightarrow K$ der einzige K -Algebra-Homomorphismus von K nach K . Es gibt im Allgemeinen weitere Körperautomorphismen auf K , doch diese sind keine K -Algebra-Homomorphismen.

Entscheidend ist nun der folgende Satz, der eine bijektive Beziehung zwischen dem K -Spektrum von R und dem Nullstellengebilde stiftet, das von einer Restklassendarstellung von R herrührt.

Satz 12.5. *Sei K ein Körper und sei R eine endlich erzeugte kommutative K -Algebra mit K -Spektrum $K - \text{Spek}(R)$. Es sei $R = K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$ eine Restklassendarstellung von R mit dem zugehörigen Restklassenhomomorphismus*

$$\varphi: K[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow R$$

und dem Nullstellengebilde $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$. Dann stiftet die Abbildung

$$K - \text{Spek}(R) \longrightarrow \mathbb{A}_K^n, P \longmapsto P \circ \varphi,$$

eine Bijektion zwischen $K - \text{Spek}(R)$ und $V(\mathfrak{a})$, die bezüglich der Zariski-Topologie ein Homöomorphismus ist.

Beweis. Zunächst ist die angegebene Abbildung wohldefiniert, da die Hintereinanderschaltung

$$P \circ \varphi: K[X_1, \dots, X_n] \xrightarrow{\varphi} K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a} \cong R \xrightarrow{P} K$$

einen K -Algebra-Homomorphismus vom Polynomring nach K definiert, der nach Lemma 12.3 der Einsetzungshomomorphismus zu (a_1, \dots, a_n) ist und mit dem entsprechenden Punkt des affinen Raumes identifiziert werden kann (und zwar ist $a_i = P(\varphi(X_i))$).

Da der Homomorphismus $P \circ \varphi$ durch R faktorisiert, wird das Ideal \mathfrak{a} auf 0 abgebildet. D.h. der Bildpunkt $P \circ \varphi = (a_1, \dots, a_n)$ liegt in $V(\mathfrak{a})$, und es liegt eine Abbildung

$$K - \text{Spek}(R) \longrightarrow V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n, P \longmapsto P \circ \varphi,$$

vor, die wir als bijektiv nachweisen müssen.

Seien dazu $P_1, P_2 \in K - \text{Spek}(R)$ zwei verschiedene Punkte. Es liegen also zwei verschiedene K -Algebra-Homomorphismen vor, und da ein K -Algebra-Homomorphismus auf einem K -Algebra-Erzeugendensystem festgelegt ist, müssen sich die beiden auf mindestens einer Variablen unterscheiden. Dann ist aber auch der Wert der zugehörigen Koordinate verschieden, d.h. $P_1 \circ \varphi \neq P_2 \circ \varphi$, und die Abbildung ist injektiv.

Zur Surjektivität sei ein Punkt $(a_1, \dots, a_n) \in V(\mathfrak{a})$ vorgegeben. Der zugehörige K -Algebra-Homomorphismus

$$K[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow K, X_i \longmapsto a_i,$$

annulliert daher jedes $F \in \mathfrak{a}$, sodass dieser Ringhomomorphismus durch $K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$ faktorisiert. Dieser Ringhomomorphismus ist das gesuchte Urbild aus $K - \text{Spek}(R)$.

Zur Topologie muss man einfach nur beachten, dass für $G \in R$ und ein Urbild $\tilde{G} \in K[X_1, \dots, X_n]$ und einen Punkt $P \in K - \text{Spek}(R)$ mit Bildpunkt $\tilde{P} = P \circ \varphi \in V(\mathfrak{a})$ gilt:

$$G(P) = P(G) = P(\varphi(\tilde{G})) = (P \circ \varphi)(\tilde{G}) = \tilde{G}(\tilde{P}),$$

sodass auch die Nullstellen übereinstimmen. \square

Dieser Satz besagt also, dass man jedes K -Spektrum einer endlich erzeugten K -Algebra R mit einer Zariski-abgeschlossenen Menge eines \mathbb{A}_K^n identifizieren kann. Man spricht von einer *abgeschlossenen Einbettung*.

Korollar 12.6. *Sei K ein Körper und R eine endlich erzeugte kommutative K -Algebra mit zwei Restklassendarstellungen*

$$R \cong K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a} \text{ und } R \cong K[X_1, \dots, X_m]/\mathfrak{b}$$

mit zugehörigen Nullstellengebilden $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ und $V(\mathfrak{b}) \subseteq \mathbb{A}_K^m$. Dann sind die beiden Nullstellengebilde $V(\mathfrak{a})$ und $V(\mathfrak{b})$ mit ihrer induzierten Zariski-Topologie homöomorph zueinander.

Beweis. Nach Satz 12.5 sind beide Nullstellengebilde homöomorph zu $K - \text{Spek}(R)$, sodass sie auch untereinander homöomorph sein müssen. \square

Das K -Spektrum als Funktor

Satz 12.7. *Sei K ein Körper und seien R und S zwei kommutative K -Algebren von endlichem Typ. Es sei $\varphi: R \rightarrow S$ ein K -Algebra-Homomorphismus. Dann induziert dies eine Abbildung*

$$\varphi^*: K - \text{Spek}(S) \longrightarrow K - \text{Spek}(R), P \longmapsto P \circ \varphi.$$

Diese Abbildung ist stetig bezüglich der Zariski-Topologie.

Beweis. Die Existenz der Abbildung ist klar, dem K -Algebra-Homomorphismus

$$P: S \longrightarrow K$$

wird einfach die Hintereinanderschaltung

$$R \xrightarrow{\varphi} S \xrightarrow{P} K$$

zugeordnet. Das Urbild der offenen Menge $D(f) \subseteq K - \text{Spek}(R)$ ist dabei

$$\begin{aligned} (\varphi^*)^{-1}(D(f)) &= \{P \in K - \text{Spek}(S) : \varphi^*(P) \in D(f)\} \\ &= \{P \in K - \text{Spek}(S) : P \circ \varphi \in D(f)\} \\ &= \{P \in K - \text{Spek}(S) : (P \circ \varphi)(f) \neq 0\} \\ &= \{P \in K - \text{Spek}(S) : P(\varphi(f)) \neq 0\} \\ &= D(\varphi(f)). \end{aligned}$$

Daher sind generell Urbilder von offenen Mengen wieder offen und die Abbildung ist stetig. \square

Die in Satz 12.7 eingeführte Abbildung φ^* nennt man die *Spektrumsabbildung* zu φ .

Proposition 12.8. *Es sei K ein Körper und zu einem K -Algebra-Homomorphismus $\varphi : R \longrightarrow S$ zwischen K -Algebren von endlichem Typ sei φ^* die zugehörige Spektrumsabbildung. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Zu einem K -Algebra-Homomorphismus $P: R \rightarrow K$ ist die induzierte Spektrumsabbildung P^* einfach die Abbildung, die dem einzigen Punkt $\{\text{id}\} = K - \text{Spek}(K)$ den Punkt $P \in K - \text{Spek}(R)$ zuordnet.*
- (2) *Der durch ein Element $F \in R$ definierte Einsetzungshomomorphismus*

$$\varphi : K[T] \longrightarrow R, T \mapsto F,$$

induziert die Spektrumsabbildung

$$\varphi^* : K - \text{Spek}(R) \longrightarrow K - \text{Spek}(K[T]) = \mathbb{A}_K^1, P \mapsto F(P).$$

- (3) *Zu einer surjektiven Abbildung $\varphi : R \longrightarrow S$ von K -Algebren von endlichem Typ ist die zugehörige Spektrumsabbildung*

$$\varphi^* : K - \text{Spek}(S) \longrightarrow K - \text{Spek}(R)$$

eine abgeschlossene Einbettung, und zwar ist das Bild gleich $V(\ker(\varphi))$.

- (4) *Die zu einer surjektiven Abbildung $K[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow S$ gehörende Spektrumsabbildung*

$$\varphi^* : K - \text{Spek}(S) \longrightarrow K - \text{Spek}(K[X_1, \dots, X_n]) \cong \mathbb{A}_K^n$$

stimmt mit der in Satz 12.5 definierten Abbildung überein.

Beweis. (1) Dies folgt aus $\text{id} \circ P = P$.

(2) Unter der hintereinandergeschalteten Abbildung

$$K[T] \xrightarrow{\varphi} R \xrightarrow{P} K$$

wird T auf $P(F) = F(P)$ geschickt.

(3) beruht auf ähnlichen Betrachtungen, wie sie im Beweis zu Satz 12.5 durchgeführt wurden. Das zeigt auch (4). \square

Weitere Eigenschaften des K -Spektrums

Lemma 12.9. *Sei K ein Körper und R eine endlich erzeugte kommutative K -Algebra. Dann ist*

$$K - \text{Spek}(R[X]) \cong K - \text{Spek}(R) \times \mathbb{A}_K^1.$$

Beweis. Ein K -Algebra-Homomorphismus $R[T] \rightarrow K$ induziert einen K -Algebra-Homomorphismus $R \rightarrow K$, und zugleich wird T auf ein bestimmtes Element $a \in K$ abgebildet. Diese Daten definieren aber auch einen eindeutig bestimmten K -Algebra-Homomorphismus $R[T] \rightarrow K$. \square

Achtung: Die vorstehende Aussage liefert nur eine natürliche Bijektion auf der Punktebene. Würde man die Produktmenge rechts mit der Produkttopologie versehen, so würde hier keine Homöomorphie mit der Zariski-Topologie links vorliegen. Insbesondere ist $\mathbb{A}_K^2 \cong \mathbb{A}_K^1 \times \mathbb{A}_K^1$, aber die Zariski-Topologie der affinen Ebene ist nicht die Produkt-Topologie der affinen Geraden mit sich selbst.

Bemerkung 12.10. Sind $X = K - \text{Spek}(R)$ und $Y = K - \text{Spek}(S)$, so lässt sich die Produktmenge ebenfalls als K -Spektrum einer K -Algebra darstellen, und zwar ist

$$X \times Y \cong K - \text{Spek}(R \otimes_K S),$$

wobei \otimes das Tensorprodukt bezeichnet. Wir werden darauf nicht im Einzelnen eingehen. Um aber doch ein Gefühl dafür zu geben betrachten wir $R = K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$ und $S = K[Y_1, \dots, Y_m]/\mathfrak{b}$. Dann ist

$$R \otimes_K S \cong K[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$$

(bei dieser ad hoc Definition ist nicht klar, dass sie unabhängig von den Darstellungen als Restklassenring ist).

12. ARBEITSBLATT

AufwärmAufgaben

Aufgabe 12.1. Man beschreibe zu einer kommutativen K -Algebra R von endlichem Typ die Spektrumsabbildung, die zum Strukturhomomorphismus der Algebra gehört.

Aufgabe 12.2. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und R eine kommutative K -Algebra von endlichem Typ. Zeige, dass die Punkte aus $K\text{-Spek}(R)$ den maximalen Idealen in R entsprechen.

Aufgabe 12.3. Sei R eine kommutative K -Algebra von endlichem Typ. Zeige, dass für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ in $K\text{-Spek}(R)$ die Gleichheit

$$V(\mathfrak{a}) = V(\text{rad}(\mathfrak{a}))$$

gilt.

Aufgabe 12.4. Zeige, dass die Zariski-Topologie auf dem K -Spektrum einer endlich erzeugten kommutativen K -Algebra R wirklich eine Topologie ist.

Aufgabe 12.5. Seien R, S, T drei kommutative K -Algebren von endlichem Typ und $\varphi : R \rightarrow S$ und $\psi : S \rightarrow T$ seien K -Algebra-Homomorphismen. Man zeige, dass für die zugehörigen Spektrumsabbildungen

$$(\psi \circ \varphi)^* = (\varphi^*) \circ (\psi^*)$$

gilt. Ferner zeige man, dass zur Identität $\text{id} : R \rightarrow R$ auch id^* die Identität ist.

Aufgabe 12.6. Man gebe ein Beispiel von zwei kommutativen K -Algebren R, S von endlichem Typ und einer stetigen Abbildung zwischen den zugehörigen K -Spektren, die nicht von einem K -Algebra-Homomorphismus herrühren kann.

Aufgabe 12.7. Sei K ein Körper und R eine kommutative K -Algebra von endlichem Typ, und sei $F \in R$. Es sei

$$\varphi^* : K\text{-Spek}(R) \longrightarrow \mathbb{A}_K^1$$

die zum Einsetzungshomomorphismus gehörende Spektrumsabbildung. Zeige, dass

$$(\varphi^*)^{-1}(0) = V(F)$$

ist.

Aufgabe 12.8. Sei K ein Körper und sei R eine kommutative K -Algebra von endlichem Typ mit der Reduktion $S = R_{\text{red}}$. Zeige, dass es eine natürliche Homöomorphie

$$K - \text{Spek}(R) \cong K - \text{Spek}(S)$$

gibt.

Aufgabe 12.9.*

Sei K ein Körper und $R = K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$ eine endlich erzeugte K -Algebra. Stifte eine Bijektion zwischen

$$K - \text{Spek}(R) \text{ und } V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n.$$

Aufgabe 12.10.*

Sei K ein Körper, R eine endlich erzeugte K -Algebra, sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und sei $X = K - \text{Spek}(R)$. In welcher Beziehung stehen die beiden Aussagen

$$V(\mathfrak{a}) = \emptyset \text{ und } \mathfrak{a} \text{ ist das Einheitsideal}$$

und die beiden Aussagen

$$V(\mathfrak{a}) = X \text{ und } \mathfrak{a} \text{ ist nilpotent}$$

zueinander. Zeige, dass die Antwort davon abhängt, ob K algebraisch abgeschlossen ist oder nicht.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.11. (3 Punkte)

Sei K ein unendlicher Körper und R eine kommutative K -Algebra von endlichem Typ, und sei $F \in R$. Es sei

$$\varphi^* : K - \text{Spek}(R) \longrightarrow \mathbb{A}_K^1$$

die zum Einsetzungshomomorphismus gehörende Spektrumsabbildung. Zeige, dass F konstant ist genau dann, wenn φ^* konstant ist.

Man mache sich dabei auch die unterschiedlichen Bedeutungen von „konstant“ klar.

Aufgabe 12.12. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von zwei integren K -Algebren von endlichem Typ R und S und einem K -Algebra-Homomorphismus $\varphi : R \rightarrow S$, der kein Ringisomorphismus ist, wo aber die induzierte Spektrumsabbildung $\varphi^* : K - \text{Spek}(S) \longrightarrow K - \text{Spek}(R)$ ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 12.13. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien R und S integrale K -Algebren von endlichem Typ. Es sei $\varphi: R \rightarrow S$ ein endlicher injektiver K -Algebra-Homomorphismus. Zeige, dass dann $\varphi^*: K\text{-Spek}(S) \rightarrow K\text{-Spek}(R)$ surjektiv ist.

Aufgabe 12.14. (6 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik null. Es sei eine polynomiale Abbildung der Form

$$\varphi: \mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2, t \longmapsto (t^2, \psi(t)),$$

gegeben (mit $\psi(t) \in K[t]$) Zeige, dass φ genau dann injektiv ist, wenn ψ die Form hat

$$\psi(t) = at^n + \theta(t)$$

mit $a \neq 0$, n ungerade und $\theta(t)$ ein Polynom, in dem nur geradzahlige Exponenten auftreten.

13. VORLESUNG - OFFENE MENGEN

Die offenen Mengen $D(f)$

Wir wollen zeigen, dass die Zariski-offenen Teilmengen $D(f) \subseteq K\text{-Spek}(R)$ selbst homöomorph zum K -Spektrum einer endlich erzeugten K -Algebra sind. Dazu benötigen wir den Begriff des multiplikativen Systems und der Nenneraufnahme.

Definition 13.1. Sei R ein kommutativer Ring. Eine Teilmenge $S \subseteq R$ heißt *multiplikatives System*, wenn die beiden Eigenschaften

- (1) $1 \in S$
- (2) Wenn $f, g \in S$, dann ist auch $fg \in S$

gelten.

Beispiel 13.2. Sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$ ein Element. Dann bilden die Potenzen f^n , $n \in \mathbb{N}$, ein multiplikatives System.

Definition 13.3. Sei R ein Integritätsbereich und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System, $0 \notin S$. Dann nennt man den Unterring

$$R_S := \left\{ \frac{f}{g} : f \in R, g \in S \right\} \subseteq Q(R)$$

die *Nenneraufnahme* zu S .

Für die Nenneraufnahme an einem Element f schreibt man einfach R_f statt $R_{\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}}$. Für den Begriff der Nenneraufnahme für beliebige kommutative Ringe, siehe Aufgabe 13.2.

Satz 13.4. *Sei K ein Körper und sei R eine endlich erzeugte K -Algebra, $f \in R$. Dann ist die Zariski-offene Menge $D(f) \subseteq K - \text{Spek}(R)$ in natürlicher Weise homöomorph zu $K - \text{Spek}(R_f)$.*

Beweis. Wir betrachten die zum K -Algebra-Homomorphismus $\varphi: R \rightarrow R_f$ gehörende natürliche Abbildung

$$\varphi^*: K - \text{Spek}(R_f) \longrightarrow K - \text{Spek}(R), P \longmapsto P \circ \varphi,$$

die nach Satz 12.7 stetig ist. Es ist $f(P \circ \varphi) = P(\varphi(f)) \neq 0$, da ja f in R_f eine Einheit wird. Daher liegt das Bild von φ^* in $D(f)$. Sei $Q \in D(f)$ irgendein Punkt, d.h. Q ist ein K -Algebra-Homomorphismus $Q: R \rightarrow K$ mit $Q(f) \neq 0$. Dann ist $Q(f)$ eine Einheit und daher lässt sich dieser Homomorphismus nach der universellen Eigenschaft der Nenneraufnahme (siehe Aufgabe 13.3) zu einem Homomorphismus von R_f nach K fortsetzen. Dieser Homomorphismus ist das gesuchte Urbild und daher ist φ^* surjektiv. Zur Injektivität seien zwei K -Algebra-Homomorphismen

$$P_1, P_2: R_f \longrightarrow K$$

gegeben, deren Verknüpfungen mit

$$R \longrightarrow R_f$$

übereinstimmen. Wegen

$$P_1 \left(\frac{r}{f^s} \right) = P_1(r f^{-s}) = P_1(r) P_1(f^s)^{-1}$$

und ebenso für P_2 ist dann aber $P_1 = P_2$. Zur Homöomorphie ist lediglich zu beachten, dass die Zariski-offenen Mengen von $K - \text{Spek}(R_f)$ überdeckt werden von $D(g)$, $g \in R_f$. Dabei kann man $g \in R$ annehmen, da f eine Einheit in R_f ist. Dann ist aber dieses $D(g)$ gleich $(\varphi^*)^{-1}(D(gf))$, wo letzteres $D(gf)$ die offene Menge in $K - \text{Spek}(R)$ bezeichnet. \square

Bemerkung 13.5. Satz 13.4 besagt insbesondere, dass eine offene Menge $D(f) \subseteq K - \text{Spek}(R)$ selbst das K -Spektrum einer endlich erzeugten K -Algebra ist (nämlich von R_f , das über R von $1/f$ erzeugt wird), und sich daher auch als Zariski-abgeschlossene Menge eines affinen Raumes realisieren lassen muss. Aus $R_f \cong R[T]/(Tf - 1)$ (siehe Aufgabe 13.4) erhält man eine solche Realisierung. Sei $R = K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$. Dann liefert der surjektive Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} K[X_1, \dots, X_n, T] &\longrightarrow (K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a})[T] \\ &\longrightarrow ((K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a})[T])/(Tf - 1) \cong R_f \end{aligned}$$

eine abgeschlossene Einbettung von $D(f)$ in \mathbb{A}_K^{n+1} . Ist ψ die Gesamtinklusion

$$D(f) \subseteq K - \text{Spek}(R) \subseteq \mathbb{A}_K^n,$$

so kann man die abgeschlossene Einbettung auch als

$$\psi \times \frac{1}{f}: D(f) \longrightarrow \mathbb{A}_K^n \times \mathbb{A}_K^1$$

auffassen, wobei hier wieder das Produkt von Varietäten auftritt.

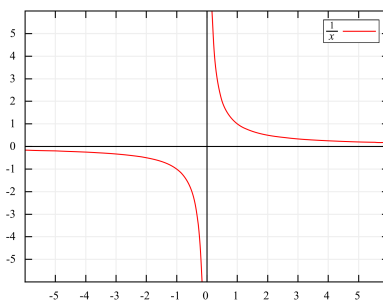
Beispiel 13.6. Betrachten wir in Anschluss an Bemerkung 13.5 die offene Menge

$$D(X) = \{P \in \mathbb{A}_K^1 \mid P \neq 0\} \subset \mathbb{A}_K^1.$$

Diese offene Menge nennt man die *punktierte affine Gerade*. Auf dieser offenen Menge ist X invertierbar, d.h. die rationale Funktion $\frac{1}{X}$ ist darauf definiert. Diese Abbildung liefert zusammen mit der gegebenen (offenen) Inklusion $D(X) \subset \mathbb{A}_K^1$ die abgeschlossene Inklusion

$$D(X) \longrightarrow V(XY - 1) \subset \mathbb{A}_K^2, x \longmapsto \left(x, \frac{1}{x}\right),$$

dessen Bild eine (in der affinen Ebene abgeschlossene) Hyperbel ist. Die punktierte affine Gerade und die Hyperbel sind also homöomorph (und die zugehörigen Ringe, nämlich $K[X]_X = K[X, X^{-1}]$ und $K[X, Y]/(XY - 1)$, sind isomorph).



Zusammenhang und idempotente Elemente

Wir interessieren uns dafür, wie es sich auf den Koordinatenring auswirkt, wenn eine affin-algebraische Menge zusammenhängend ist, und wie sich gegebenenfalls die Zusammenhangskomponenten charakterisieren lassen. Wir beginnen mit einem Beispiel, das zeigt, dass über einem nicht algebraisch abgeschlossenen Körper keine überzeugende Theorie zu erwarten ist.

Beispiel 13.7. Wir betrachten (wie in Beispiel 11.8) die beiden algebraischen Kurven

$$V_1 = V(X^2 + Y^2 - 2) \text{ und } V_2 = (X^2 + 2Y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}_K^2.$$

Der Durchschnitt wird beschrieben durch das Ideal

$$(X^2 + Y^2 - 2, X^2 + 2Y^2 - 1) = (Y^2 + 1, X^2 - 3).$$

Sei $K = \mathbb{R}$. Dann ist $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ leer.

Die affin-algebraische Menge $V = V_1 \cup V_2$ ist nicht zusammenhängend (V_1 und V_2 sind die irreduziblen Komponenten und die Zusammenhangskomponenten). Der Koordinatenring von V ist

$$\mathbb{R}[X, Y]/((X^2 + Y^2 - 2)(X^2 + 2Y^2 - 1)).$$

Man könnte erwarten, dass die Funktion auf V , die auf V_1 konstant gleich 1 und auf V_2 konstant gleich 0 ist, sich im Koordinatenring wiederfindet. Dies ist aber nicht der Fall, und zwar liegt das daran, dass über den komplexen Zahlen $V_{\mathbb{C}}$ zusammenhängend ist. Daher besitzt der komplexe Koordinatenring nur die trivialen idempotenten Elemente, und das überträgt sich auf den reellen Koordinatenring.

Definition 13.8. Ein Element e eines kommutativen Ringes heißt *idempotent*, wenn $e^2 = e$ gilt.

Die Elemente 0 und 1 sind idempotent.

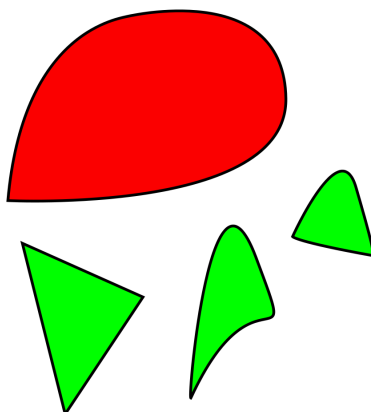
Definition 13.9. Seien R_1, \dots, R_n kommutative Ringe. Dann heißt das Produkt

$$R_1 \times \cdots \times R_n,$$

versehen mit komponentenweiser Addition und Multiplikation, der *Produkt-ring* der R_i , $i = 1, \dots, n$.

In einem Produktring gibt es viele idempotente Elemente, nämlich solche Elemente, deren Komponenten alle null oder eins sind.

Definition 13.10. Ein kommutativer Ring R heißt *zusammenhängend*, wenn er genau zwei idempotente Elemente (nämlich $0 \neq 1$) enthält.



Ein zusammenhängender topologischer Raum (rot) und ein nicht zusammenhängender Raum (grün).

Definition 13.11. Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn es in X genau zwei Teilmengen gibt (nämlich \emptyset und der Gesamttraum X), die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Die leere Menge und der Gesamttraum sind stets zugleich offen und abgeschlossen. Solche Mengen nennt man auch *randlos* oder *clopen*. Der leere topologische Raum gilt nicht als zusammenhängend, da es in ihm nur eine zugleich offene und abgeschlossene Menge gibt.

Lemma 13.12. Sei K ein Körper und seien R_1 und R_2 endlich erzeugte K -Algebren mit dem Produktring $R = R_1 \times R_2$. Dann gibt es eine natürliche Homöomorphie

$$K - \text{Spek}(R_1 \times R_2) \cong K - \text{Spek}(R_1) \uplus K - \text{Spek}(R_2).$$

Dabei werden die Einbettungen von rechts nach links durch die Projektionen $R \rightarrow R_i$, $i = 1, 2$, induziert.

Beweis. Die Projektion $R_1 \times R_2 \rightarrow R_1$ ist ein K -Algebra-Homomorphismus und liefert daher (nach Präposition 12.8 (3)) eine stetige Abbildung (und zwar eine abgeschlossene Einbettung)

$$K - \text{Spek}(R_1) \longrightarrow K - \text{Spek}(R_1 \times R_2).$$

Ebenso gibt es eine Abbildung auf $K - \text{Spek}(R_2)$. Diese zusammengenommen definieren eine stetige Abbildung

$$K - \text{Spek}(R_1) \uplus K - \text{Spek}(R_2) \longrightarrow K - \text{Spek}(R_1 \times R_2).$$

Sei $P \in K - \text{Spek}(R_1 \times R_2)$, also $P: R_1 \times R_2 \rightarrow K$ sei ein K -Algebra-Homomorphismus. Seien $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$ die zur Produktzerlegung gehörenden idempotenten Elemente. Wegen $e_1 + e_2 = 1$ und $e_1 e_2 = 0$ wird genau eines dieser Elemente (sagen wir e_1) unter P auf 0 abgebildet (das andere auf 1). Dann wird aber $R_1 \times 0$ auf 0 geschickt und P faktorisiert durch eine Projektion. Das beweist die Surjektivität.

Zur Injektivität seien P_1, P_2 in der disjunkten Vereinigung gegeben, $P_1 \neq P_2$. Wenn sie beide in einem der Teilstücke liegen, so bleiben sie unter der Abbildung verschieden, da auf den Teilstücken eine abgeschlossene Einbettung vorliegt. Wenn sie auf verschiedenen Teilstücken liegen, so faktorisieren sie durch die zwei verschiedenen Projektionen und für den einen Punkt ist $P_1(e_1) = 0$ und für den anderen Punkt $P_2(e_1) = 1$. Sie sind also verschieden als Elemente in $K - \text{Spek}(R_1 \times R_2)$.

Eine Homöomorphie liegt vor, da sich die einzelnen abgeschlossenen Einbettungen zu einer abgeschlossenen Abbildung zusammensetzen. \square

Satz 13.13. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei R eine reduzierte kommutative K -Algebra von endlichem Typ. Dann stiftet die Abbildung*

$$e \longmapsto D(e)$$

eine Bijektion zwischen den idempotenten Elementen in R und denjenigen Teilmengen aus $K - \text{Spek}(R)$, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Beweis. Zunächst ist $D(e) = V(1 - e)$ offen und abgeschlossen. Dies folgt aus

$$D(e) \cup D(1 - e) = D(1) = K - \text{Spek}(R)$$

und aus

$$D(e) \cap D(1 - e) = D(e(1 - e)) = D(e - e^2) = D(0) = \emptyset.$$

D.h. die Abbildung ist wohldefiniert. Seien e_1, e_2 zwei idempotente Elemente mit $U = D(e_1) = D(e_2)$. Da ein idempotentes Element in einem Körper nur die Werte 0 oder 1 annehmen kann, haben sowohl e_1 als auch e_2 auf U den Wert 1 und außerhalb den Wert 0. Damit haben e_1 und e_2 überall den gleichen Wert und sind nach dem Identitätssatz für Polynome überhaupt gleich. Dies beweist die Injektivität. Sei nun $U = D(\mathfrak{a})$ sowohl offen als auch abgeschlossen. D.h. es gibt ein weiteres Ideal \mathfrak{b} mit $D(\mathfrak{a}) \cup D(\mathfrak{b}) = K - \text{Spek}(R)$ und $D(\mathfrak{a}) \cap D(\mathfrak{b}) = \emptyset$. Nach Korollar 11.5 erzeugen \mathfrak{a} und \mathfrak{b} zusammen das Einheitsideal. D.h. es gibt $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{b}$ mit $a + b = 1$. Wegen $D(a) \cap D(b) = D(ab) = \emptyset$ ist nach Aufgabe 13.1 das Element ab nilpotent und wegen der Reduziertheit ist $ab = 0$. Also ist

$$a = a \cdot 1 = a(a + b) = a^2 + ab = a^2$$

idempotent. Wegen $D(a) \subseteq D(\mathfrak{a})$, $D(b) \subseteq D(\mathfrak{b})$ und $D(a) \cup D(b) = K - \text{Spek}(R)$ ist $U = D(\mathfrak{a}) = D(a)$. \square

Es folgt, dass über einem algebraisch abgeschlossenen Körper eine reduzierte K -Algebra R von endlichem Typ genau dann zusammenhängend ist, wenn das zugehörige $K - \text{Spek}(R)$ zusammenhängend ist.

13. ARBEITSBLATT

Aufwärmataufgaben

Aufgabe 13.1. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei R eine reduzierte K -Algebra von endlichem Typ. Beweise den *Identitätssatz* in der folgenden Gestalt: Wenn für $f, g \in R$ gilt, dass $f(P) = g(P)$ ist für alle $P \in K - \text{Spek}(R)$, so ist $f = g$.

Aufgabe 13.2. Sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Man definiert die *Nenneraufnahme*

$$R_S$$

schrittweise wie folgt. Es sei zunächst M die Menge der formalen Brüche mit Nenner in S , also

$$M = \left\{ \frac{r}{s} \mid r \in R, s \in S \right\}.$$

Zeige, dass durch

$$\frac{r}{s} \sim \frac{r'}{s'} \text{ genau dann, wenn es ein } t \in S \text{ gibt mit } trs' = tr's$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert ist. Wir bezeichnen mit R_S die Menge der Äquivalenzklassen. Definiere auf R_S eine Ringstruktur und definiere einen Ringhomomorphismus $R \rightarrow R_S$.

In den folgenden Aufgaben dürfen Sie, wenn Sie wollen, bei Nenneraufnahmen annehmen, dass Integritätsbereiche vorliegen.

Aufgabe 13.3. Seien R und A kommutative Ringe und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Es sei $\varphi : R \rightarrow A$ ein Ringhomomorphismus derart, dass $\varphi(s)$ eine Einheit in A ist für alle $s \in S$. Zeige: Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus

$$\tilde{\varphi} : R_S \longrightarrow A,$$

der φ fortsetzt.

Aufgabe 13.4. Sei R ein kommutativer Ring und sei $f \in R$ mit zugehöriger Nenneraufnahme R_f . Beweise die R -Algebra-Isomorphie

$$R_f \cong R[T]/(Tf - 1).$$

Aufgabe 13.5.*

Sei K ein Körper, $R = K[X, Y]$ der Polynomring in zwei Variablen, $S \subseteq R$ ein multiplikatives System und $F \in R$ ein Polynom. Zeige, dass es eine eindeutige R -Algebra-Isomorphie

$$(R/(F))_S \cong (R_S)/(F)$$

gibt.

Aufgabe 13.6. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien R und S kommutative K -Algebren von endlichem Typ. Es sei $f \in R$ und $\varphi : R \rightarrow S$ sei ein K -Algebra-Homomorphismus. Zeige, dass die Spektrumsabbildung φ^* genau dann durch $D(f)$ faktorisiert, wenn $\varphi(f)$ eine Einheit in S ist.

Aufgabe 13.7.*

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und R eine integre endlich erzeugte K -Algebra. Es seien $f, g \in R$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (1) $D(f) \subseteq D(g)$
- (2) Es gibt einen R -Algebra-Homomorphismus $R_g \rightarrow R_f$.

Zeige ferner, dass diese Äquivalenz für $K = \mathbb{R}$ nicht gilt.

Die folgende Aufgabe verwendet den Begriff des saturierten multiplikativen Systems.

Ein multiplikatives System S in einem kommutativen Ring R heißt *saturiert*, wenn folgendes gilt: Ist $g \in R$ und gibt es ein $f \in S$, das von g geteilt wird, so ist auch $g \in S$.

Aufgabe 13.8. Seien A, B kommutative Ringe und sei $\varphi : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(B^\times)$ der Einheitengruppe ein saturiertes multiplikatives System in A ist.

Aufgabe 13.9. Sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass die Menge der Nichtnullteiler in R ein saturiertes multiplikatives System bilden.

Aufgabe 13.10.*

Man gebe ein Beispiel einer integren, endlich erzeugten \mathbb{C} -Algebra R und eines multiplikativen Systems $S \subseteq R$, $0 \notin S$, an derart, dass die Nenneraufnahme R_S kein Körper ist, aber jedes maximale Ideal aus R zum Einheitsideal in R_S wird.

Aufgabe 13.11. Zeige, dass ein Integritätsbereich ein zusammenhängender Ring ist.

Aufgabe 13.12. Sei R ein kommutativer Ring und sei $f \in R$. Es sei f sowohl nilpotent als auch idempotent. Zeige, dass $f = 0$ ist.

Aufgabe 13.13. Sei R ein kommutativer Ring und sei $e \in R$ ein idempotentes Element. Zeige, dass es eine natürliche Isomorphie

$$R_e \cong R/(1 - e)$$

gibt.

(Dies zeigt erneut, dass $D(e)$ offen und abgeschlossen ist).

Aufgabe 13.14. Seien R und S kommutative Ringe und sei $R \times S$ der Produktring $R \times S$. Zeige, dass die Teilmenge $R \times 0$ ein Hauptideal ist.

Aufgabe 13.15. Sei X ein topologischer Raum, der nicht leer und nicht zusammenhängend sei. Zeige, dass es dann eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f \neq 0, 1$, (\mathbb{R} sei mit der metrischen Topologie versehen) gibt, die idempotent im Ring der stetigen Funktionen auf X ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 13.16. (4 Punkte)

Betrachte zwei parallele Geraden V und das Achsenkreuz W . Beschreibe eine möglichst natürliche surjektive Abbildung zwischen V und W (in welche Richtung?), und zwar sowohl geometrisch als auch algebraisch. Gibt es auch eine surjektive polynomiale Abbildung in die andere Richtung?

Aufgabe 13.17. (6 Punkte)

Betrachte die durch $Y^2 = X^3 + X^2$ gegebene Kurve C (siehe Beispiel 6.3) und die offene Menge $U = D(X) \subseteq C$. Finde eine abgeschlossene Realisierung von U in \mathbb{A}_K^3 und zeige, dass es auch eine solche Realisierung in \mathbb{A}_K^2 gibt. Skizziere die Bildkurve unter der Abbildung

$$U \longrightarrow \mathbb{A}_K^2, (x, y) \longmapsto \left(\frac{1}{x}, y \right).$$

Ist U isomorph zu einer offenen Menge der affinen Geraden?

Aufgabe 13.18. (3 Punkte)

Bestimme die nilpotenten und die idempotenten Elemente in $\mathbb{Z}/(175)$.

Aufgabe 13.19. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und betrachte den Durchschnitt der beiden algebraischen Kurven

$$V(X^2 + Y^2 - 1) \text{ und } V(Y - X^2).$$

Identifiziere den Restklassenring

$$R = K[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1, Y - X^2)$$

mit einem Produktring und beschreibe die Restklassenabbildung $K[X, Y] \rightarrow R$ mittels dieser Identifizierung. Bestimme Urbilder in $K[X, Y]$ für sämtliche idempotenten Elemente des Produktringes.

Aufgabe 13.20. (6 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen.

- (1) R ist reduziert.
- (2) Für jedes Primideal \mathfrak{p} ist $R_{\mathfrak{p}}$ reduziert.
- (3) Für jedes maximale Ideal \mathfrak{m} ist $R_{\mathfrak{m}}$ reduziert.

Bemerkung: Man sagt daher, dass Reduziertheit eine lokale Eigenschaft ist.

Man gebe auch ein Beispiel für einen kommutativen Ring, der nicht integer ist, dessen Lokalisierungen an Primidealen aber alle integer sind.

Aufgabe 13.21. (5 Punkte)

Sei R ein Hauptidealbereich mit Quotientenkörper $Q = Q(R)$. Zeige, dass jeder Zwischenring S , $R \subseteq S \subseteq Q$, eine Nenneraufnahme ist.

14. VORLESUNG - ALGEBRAISCHE FUNKTIONEN

Algebraische Funktionen auf Varietäten

Was ist ein Morphismus zwischen zwei affin-algebraischen Mengen V und W ? Wir betrachten zuerst die Situation, wo $W = \mathbb{A}_K^1$ die affine Gerade ist. Sei $V = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ als abgeschlossene Teilmenge eines affinen Raumes gegeben. Dann liefert jedes Polynom $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ eine Abbildung $F: \mathbb{A}_K^n \rightarrow \mathbb{A}_K^1 = K$ und damit auch eine Abbildung auf V . Das haben wir schon bei der Definition des Koordinatenrings betrachtet. Ebenso liefert ein

Element $F \in R$ in einer endlich erzeugten K -Algebra R eine Funktion auf $K\text{-Spek}(R)$, nämlich

$$K\text{-Spek}(R) \longrightarrow \mathbb{A}_K^1, P \longmapsto F(P).$$

Dies ist auch die Spektrumsabbildung, die zu $K[T] \rightarrow R, T \mapsto F$, gehört.

Für die offenen Mengen $D(F) \cong K\text{-Spek}(R_F)$ ist $1/F$ nach Satz 13.4 eine wohldefinierte Funktion. Wir werden allgemein für eine Zariski-offene Menge $U \subseteq V$ erklären, was eine algebraische Funktion auf U ist. Die folgende Definition ist so strukturiert, dass die Bedingung „algebraisch“ eine *lokale Eigenschaft* ist.

Definition 14.1. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, R eine K -Algebra von endlichem Typ und sei $V = K\text{-Spek}(R)$ das K -Spektrum von R . Sei $P \in V$ ein Punkt, $U \subseteq V$ eine Zariski-offene Menge mit $P \in U$ und es sei $f : U \rightarrow \mathbb{A}_K^1 = K$ eine Funktion. Dann heißt f *algebraisch* (oder *regulär* oder *polynomial*) im Punkt P , wenn es Elemente $G, H \in R$ gibt mit $P \in D(H) \subseteq U$ und mit

$$f(Q) = \frac{G(Q)}{H(Q)} \text{ für alle } Q \in D(H).$$

Die Funktion f heißt *algebraisch* (oder *algebraisch auf U*), wenn f in jedem Punkt von U algebraisch ist.

Natürlich definiert jedes Element $f \in R$ eine algebraische Funktion auf jeder offenen Teilmenge des K -Spektrums. Es ist aber im Allgemeinen eher schwierig, die algebraischen Funktionen übersichtlich zu beschreiben.

Bemerkung 14.2. In der Definition ist die vorausgesetzte Stetigkeit überflüssig, da sie aus der lokalen algebraischen Bedingung folgt (siehe Aufgabe 16.7).

Ebenso ist die Bedingung $D(H) \subseteq U$ nicht wichtig. Wenn es eine Beschreibung für f mit $f = G/H$ auf $D(H)$ mit $P \in D(H)$ gibt, so betrachtet man ein H' mit $P \in D(H')$, $D(H') \subseteq U$. Dann kann man zu $D(H) \cap D(H') = D(HH')$ übergehen, und dort die Darstellung $f = (GH')/(HH')$ betrachten.

Wenn es im Punkt P eine Bruchdarstellung für f als $f = G/H$ gibt, so kann man diese Darstellung für alle Punkte aus $D(H)$ verwenden. D.h. f ist auf der ganzen offenen Menge $D(H)$ algebraisch. Insbesondere muss man nicht mit unendlich vielen verschiedenen Darstellungen arbeiten, sondern man kann sich auf die (endlich vielen) Darstellungen G_i/H_i zu einer Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} D(H_i)$ beschränken.

Bei $K = \mathbb{C}$ ist eine algebraische Funktion auch stetig bezüglich der metrischen Topologie, und bei $R = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ ist sie *holomorph*.

Beispiel 14.3. Sei $V = V(WX - ZY) \subseteq \mathbb{A}_K^4$ und sei $U = D(X, Y) = D(X) \cup D(Y) \subset V$ die durch X und Y definierte Zariski-offene Menge. Auf

U ist die durch

$$f = \frac{Z}{X} = \frac{W}{Y}$$

definierte Funktion algebraisch. Die beiden rationalen Darstellungen liefern offenbar eine algebraische Funktion auf den beiden offenen Teilmengen $D(X)$ und $D(Y)$. Damit es eine Funktion auf U definiert muss sichergestellt werden, dass die Brüche auf dem Durchschnitt, also auf $D(X) \cap D(Y) = D(XY)$, die gleichen Funktionswerte haben. Sei also $Q = (w, x, y, z) \in D(XY)$, $Q \in V$. D.h. $x, y \neq 0$ und $wx = zy$. Dann ist aber sofort

$$\frac{Z}{X}(Q) = \frac{z}{x} = \frac{w}{y} = \frac{W}{Y}(Q).$$

Lemma 14.4. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, R eine K -Algebra von endlichem Typ und sei $V = K\text{-Spek}(R)$ das K -Spektrum von R . Es sei $U \subseteq V$ eine Zariski-offene Menge. Dann bildet die Menge der algebraischen Funktionen auf U einen Unterring (und zwar eine K -Unteralgebra) des Rings der Funktionen von U nach K (wobei die Operationen in K ausgeführt werden).*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die konstante Nullfunktion und die konstante Einsfunktion auf U , das Negative einer algebraischen Funktion, und die Summe und das Produkt von zwei algebraischen Funktionen auf U wieder algebraisch sind. Wir beschränken uns auf die Summe der algebraischen Funktionen f_1 und f_2 . Sei $P \in U$ ein Punkt. Nach Voraussetzung gibt es Elemente $G_1, H_1, G_2, H_2 \in R$ mit

$$f_1(Q) = \frac{G_1(Q)}{H_1(Q)} \text{ für alle } Q \in D(H_1) \subseteq U, P \in D(H_1),$$

und

$$f_2(Q) = \frac{G_2(Q)}{H_2(Q)} \text{ für alle } Q \in D(H_2) \subseteq U, P \in D(H_2).$$

Sei $H := H_1 H_2$. Dann ist $P \in D(H) = D(H_1) \cap D(H_2) \subseteq U$. Für einen beliebigen Punkt $Q \in D(H)$ ist dann

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(Q) &= f_1(Q) + f_2(Q) \\ &= \frac{G_1(Q)}{H_1(Q)} + \frac{G_2(Q)}{H_2(Q)} \\ &= \frac{G_1(Q)H_2(Q) + G_2(Q)H_1(Q)}{H_1(Q)H_2(Q)} \\ &= \frac{(G_1H_2 + G_2H_1)(Q)}{(H_1H_2)(Q)}, \end{aligned}$$

was eine polynomiale Darstellung der Summenfunktion in der Zariski-offenen Umgebung $D(H)$ des Punktes P ergibt. \square

Definition 14.5. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, R eine K -Algebra von endlichem Typ und sei $V = K\text{-Spek}(R)$ das K -Spektrum von R . Sei $U \subseteq V$ eine Zariski-offene Menge. Dann bezeichnet man mit

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) = \{f : U \longrightarrow K \mid f \text{ ist algebraisch}\}$$

den *Ring der algebraischen Funktionen* auf U . Man bezeichnet ihn auch als *Strukturring* zu U oder als *Schnitttring* zu U .

Aufgrund von Lemma 14.4 handelt es sich in der Tat um einen Ring. Das Symbol \mathcal{O} (sprich „O“) bezeichnet die sogenannte *Strukturgarbe*.

Lemma 14.6. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, R eine K -Algebra von endlichem Typ und sei $V = K\text{-Spek}(R)$ das K -Spektrum von R . Es seien $U_1 \subseteq U_2$ offene Teilmengen von V . Dann gibt es einen natürlichen K -Algebra-Homomorphismus

$$\Gamma(U_2, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(U_1, \mathcal{O}).$$

Beweis. Die Funktion $f : U_2 \rightarrow K$ liefert sofort durch Einschränkung eine auf U_1 definierte Funktion. Die lokal-algebraische Beschreibung, die für f an jedem Punkt $P \in U_2$ vorliegt, kann direkt auf der kleineren Teilmenge U_1 interpretiert werden. \square

Die im vorstehenden Lemma beschriebene Abbildung heißt *Restriktionsabbildung* oder *Einschränkungsabbildung*.

Lemma 14.7. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, R eine K -Algebra von endlichem Typ und sei $V = K\text{-Spek}(R)$ das K -Spektrum von R . Es sei $F \in R$ und $U \subseteq D(F) \subseteq V$ eine offene Menge. Dann ist es egal, ob man $\Gamma(U, \mathcal{O})$ mit Bezug auf V oder mit Bezug auf $D(F) = K\text{-Spek}(R_F)$ definiert.

Beweis. Natürlich hängen die stetigen Funktionen auf U nur von U selbst ab, nicht von einem umgebenden Raum. Wir müssen zeigen, dass die lokal-algebraische Bedingung ebenfalls nur von U abhängt. Sei $P \in U$. Eine Beschreibung

$$\varphi = \frac{G}{H} \text{ auf } D(H) \text{ mit } P \in D(H) \text{ und mit } G, H \in R$$

liefert sofort eine Beschreibung als Bruch auf $D(HF)$, da man ja H, G sofort in R_F auffassen kann.

Es liege nun umgekehrt eine Bruchdarstellung

$$\varphi = \frac{\tilde{G}}{\tilde{H}} \text{ auf } D(\tilde{H}) \text{ mit } P \in D(\tilde{H}) \text{ und mit } \tilde{G}, \tilde{H} \in R_F$$

vor. Es sei $\tilde{G} = G/F^r$ und $\tilde{H} = H/F^s$. Dann gilt für jeden Punkt $Q \in D(HF)$ die Gleichheit

$$\varphi(Q) = \frac{\tilde{G}(Q)}{\tilde{H}(Q)} = \frac{G(Q)/F^r(Q)}{H(Q)/F^s(Q)} = \frac{G(Q)F^s(Q)}{H(Q)F^r(Q)}.$$

Dabei haben wir im letzten Schritt mit F^{r+s} erweitert. In der letzten Darstellung sind Zähler und Nenner aus R , und es ist $HF^r(P) \neq 0$, also ist $D(HF^r)$ eine offene Umgebung von P . \square

Lemma 14.8. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, R eine K -Algebra von endlichem Typ und sei $V = K - \text{Spek}(R)$ das K -Spektrum von R . Es sei $U \subseteq V$ eine Zariski-offene Menge, $P \in U$ ein Punkt und es sei $f: U \rightarrow K$ eine algebraische Funktion, für die es die beiden rationalen Darstellungen*

$$\frac{G_1}{H_1} \text{ und } \frac{G_2}{H_2}$$

gebe mit $G_1, H_1, G_2, H_2 \in R$ und mit $P \in D(H_1), D(H_2) \subseteq U$. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit

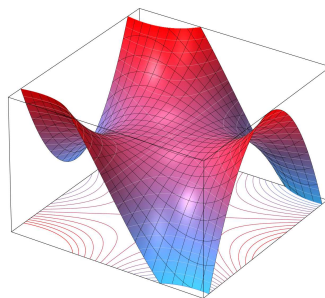
$$H_1^r H_2^r (G_1 H_2 - G_2 H_1)^r = 0 \text{ in } R.$$

Ist R reduziert, so gilt sogar $H_1 H_2 (G_1 H_2 - G_2 H_1) = 0$.

Beweis. Wir betrachten das Element $F = H_1 H_2 (G_1 H_2 - G_2 H_1)$ auf V und behaupten, dass dies die Nullfunktion induziert. Sei $Q \in V$. Bei $H_1(Q) = 0$ oder $H_2(Q) = 0$ ist $F(Q) = 0$, sei also $H_1(Q), H_2(Q) \neq 0$ vorausgesetzt. Dann ist $Q \in D(H_1) \cap D(H_2)$, und dort gelten die beiden rationalen Darstellungen für f , nämlich

$$\frac{G_1(Q)}{H_1(Q)} = f(Q) = \frac{G_2(Q)}{H_2(Q)}.$$

Daraus folgt $G_1(Q)H_2(Q) = G_2(Q)H_1(Q)$ und somit ist die Differenz null. Insgesamt ist also F die Nullfunktion auf V und daher gibt es nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ein r mit $F^r = 0$. \square



Der Graph einer globalen Funktion auf \mathbb{A}_K^2 .

Satz 14.9. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, R eine reduzierte K -Algebra von endlichem Typ und sei $V = K\text{-Spek}(R)$ das K -Spektrum von R . Dann ist

$$\Gamma(V, \mathcal{O}) = R.$$

Beweis. Ein Element $F \in R$ liefert direkt eine algebraische Funktion auf ganz V , was einen K -Algebra Homomorphismus

$$R \longrightarrow \Gamma(V, \mathcal{O})$$

ergibt. Wenn dabei F an jedem Punkt die Nullfunktion induziert, so ist nach Satz 11.1 und wegen der Reduziertheit auch $F = 0$. D.h. die Abbildung ist injektiv.

Sei nun $f : V \rightarrow K$ eine algebraische Funktion. Dann gibt es zu jedem Punkt $P \in V$ zwei Elemente $G_P, H_P \in R$ mit $P \in D(H_P)$ und mit $f = \frac{G_P}{H_P}$ auf $D(H_P)$. Die $D(H_P)$ bilden eine offene Überdeckung von V und das bedeutet nach Korollar 11.5, dass die H_P in R das Einheitsideal erzeugen. Dann gibt es aber auch eine endliche Auswahl davon, die das Einheitsideal erzeugen, sagen wir $H_i = H_{P_i}$, $i = 1, \dots, m$. Dann wiederum überdecken diese $D(H_i)$, $i = 1, \dots, m$, ganz V .

Auf den Durchschnitten $D(H_i H_j) = D(H_i) \cap D(H_j)$ haben wir die Identitäten

$$f(Q) = \frac{G_i(Q)}{H_i(Q)} = \frac{G_j(Q)}{H_j(Q)} \text{ für alle } Q \in D(H_i H_j).$$

Daraus folgt nach Lemma 14.8 und der Reduziertheit, dass

$$H_i H_j G_i H_j = H_i H_j G_j H_i$$

in R gilt. Wir ersetzen H_i durch H_i^2 und G_i durch $G_i H_i$. Dann ist nach wie vor G_i/H_i eine lokale Beschreibung für f , und die letzte Bedingung vereinfacht sich zu $H_i G_j = H_j G_i$.

Da die H_i das Einheitsideal erzeugen, gibt es Elemente $A_i \in R$ mit

$$\sum_{i=1}^m A_i H_i = 1$$

in R . Wir behaupten, dass das Element

$$F = \sum_{i=1}^m A_i G_i$$

auf ganz V die Funktion f induziert. Dazu sei $Q \in V$ ein beliebiger Punkt, und zwar sei ohne Einschränkung $Q \in D(H_1)$. Dann ist

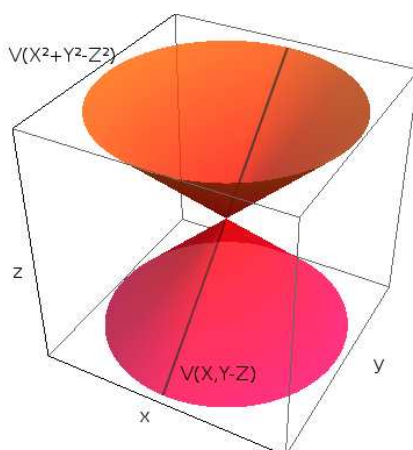
$$\begin{aligned} f(Q) &= \frac{G_1(Q)}{H_1(Q)} \\ &= \frac{G_1(Q)}{H_1(Q)} \left(\sum_{i=1}^m A_i H_i(Q) \right) \\ &= \sum_{i=1}^m A_i(Q) \frac{G_1(Q) H_i(Q)}{H_1(Q)} \\ &= \sum_{i=1}^m A_i(Q) G_i(Q) \\ &= F(Q). \end{aligned}$$

□

Korollar 14.10. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, R eine reduzierte K -Algebra von endlichem Typ und sei $V = K - \text{Spek}(R)$ das K -Spektrum von R . Es sei $F \in R$ mit zugehöriger offener Menge $D(F) \subseteq V$. Dann ist

$$\Gamma(D(F), \mathcal{O}) = R_F.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 14.7 und Satz 14.9. □



Nicht jede außerhalb der Gerade auf dem Kegel definierte Funktion lässt sich auf den affinen Raum ohne die Gerade fortsetzen.

Beispiel 14.11. Wir betrachten den Standardkegel, der als abgeschlossene Teilmenge

$$V = V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{A}_K^3.$$

gegeben sei. Es sei $U = D(X, Z - Y) \subseteq \mathbb{A}_K^3$ die offene Teilmenge mit dem Schnitt $V \cap U = D(X, Z - Y)$ (in V), der eine offene Menge in V ist. Wir behaupten, dass der zugehörige Ringhomomorphismus

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(U \cap V, \mathcal{O})$$

nicht surjektiv ist. Das liegt daran, dass links einfach der Polynomring in drei Variablen steht (vergleiche Aufgabe 14.6). Dagegen ergibt sich aus der Gleichung

$$X^2 = Z^2 - Y^2 = (Z - Y)(Z + Y),$$

dass es auf $U \cap V$ die algebraische Funktion

$$\frac{X}{Z - Y} = \frac{Z + Y}{X}$$

gibt, die nicht im Bild der Abbildung liegt, da es keine Funktion auf dem ganzen Kegel ist.

14. ARBEITSBLATT

Aufwärmaufgaben

In den folgenden Aufgaben werden Ultrafilter und minimale Primideale besprochen. Wir geben die Definition.

Ein Primideal \mathfrak{p} in einem kommutativen Ring heißt *minimales Primideal*, wenn es kein Primideal \mathfrak{q} mit $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ gibt.

Sei R ein kommutativer Ring. Ein multiplikatives System $F \subseteq R$ nennt man einen *Ultrafilter*, wenn $0 \notin F$ ist und wenn F maximal mit dieser Eigenschaft ist.

Aufgabe 14.1. Sei R ein kommutativer Ring und sei $F \subseteq R$ ein multiplikatives System mit $0 \notin F$. Zeige, dass F genau dann ein Ultrafilter ist, wenn es zu jedem $g \in R$, $g \notin F$, ein $f \in F$ und eine natürliche Zahl n gibt mit $fg^n = 0$.

Aufgabe 14.2. Sei R ein kommutativer Ring und sei $F \subseteq R$ ein Ultrafilter. Zeige, dass das Komplement von F ein minimales Primideal in R ist.

Aufgabe 14.3. Sei R ein kommutativer Ring und sei S ein multiplikatives System mit $0 \notin S$. Zeige, dass S in einem Ultrafilter enthalten ist.

(Man benutze das Lemma von Zorn).

Aufgabe 14.4. Sei R ein kommutativer, reduzierter Ring. Zeige, dass jeder Nullteiler in einem minimalen Primideal enthalten ist.

Aufgabe 14.5. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei R eine kommutative K -Algebra von endlichem Typ. Zeige, dass die minimalen Primideale von R den irreduziblen Komponenten von $K\text{-Spek}(R)$ entsprechen.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.6. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und betrachte die affine Ebene \mathbb{A}_K^2 . Es sei $P \in \mathbb{A}_K^2$ ein Punkt und $U = \mathbb{A}_K^2 \setminus \{P\}$ das offene Komplement davon. Zeige

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) = K[X, Y].$$

(Dies besagt, dass eine außerhalb eines Punktes definierte algebraische Funktion sich in den Punkt fortsetzen lässt. In der komplexen Analysis nennt man den entsprechenden Satz den *Riemannschen Hebbarkeitssatz*).

Aufgabe 14.7. (4 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und $M_i, i \in \mathbb{N}$, seien R -Moduln mit fixierten R -Modulhomomorphismen

$$\varphi_i: M_i \longrightarrow M_{i+1}.$$

Die Sequenz

$$\dots \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow M_{i+2} \longrightarrow M_{i+3} \longrightarrow \dots$$

heißt *exakt*, wenn für alle i gilt, dass $\text{Kern}(\varphi_i) = \text{Bild}(\varphi_{i-1})$ ist.

- (1) Zeige, dass diese Definition im Falle einer kurzen exakten Sequenz mit der Definition in der Vorlesung übereinstimmt.
- (2) Sei nun $R = K$ ein Körper, die M_i seien endlich erzeugt, $M_0 = 0$ und alle $M_i = 0$ für $i \geq n$ für ein gewisses n . Zeige, dass

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_K M_i = 0.$$

Aufgabe 14.8. (6 Punkte)

Es sei K ein Körper und A eine endlichdimensionale, reduzierte K -Algebra. Zeige, dass dann A ein endliches direktes Produkt von endlichen Körpererweiterungen von K ist.

Hinweis: Man darf ohne Beweis benutzen, dass es in A nur endlich viele Primideale gibt.

Aufgabe 14.9. (5 Punkte)

Beschreibe die Menge M aller 2×3 -Matritzen mit $\text{Rang} \leq 1$ über einem Körper K als K -Spektrum einer geeigneten K -Algebra. Zeige, dass es eine Isomorphie zwischen einer (nicht leeren) Zariski-offenen Teilmenge von M und einer offenen Menge des \mathbb{A}_K^4 gibt.

Aufgabe 14.10. (5 Punkte)

Betrachte das Ideal

$$\mathfrak{a} = (U^5 - V^3, U^{11} - W^3, V^{11} - W^5) \subseteq K[U, V, W]$$

und das zugehörige Nullstellengebilde $Z = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^3$. Zeige, dass $W - U^2V$ zum Radikal von \mathfrak{a} gehört. Zeige damit, dass Z isomorph zu einer ebenen algebraischen Kurve ist.

Man benutze, dass das Radikal der Durchschnitt der Primideale ist, die es umfassen.

15. VORLESUNG - LOKALE RINGE

Affine und quasiaffine Varietäten

Definition 15.1. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei R eine K -Algebra von endlichem Typ. Dann nennt man das K -Spektrum $V = K\text{-Spek}(R)$ von R , wobei alle Zariski-offenen Mengen $U \subseteq V$ mit dem Ring der algebraischen Funktionen $\Gamma(U, \mathcal{O})$ versehen seien, eine *affine Varietät*.

Eine offene Teilmenge einer affinen Varietät, wobei ebenfalls alle offenen Mengen mit den Strukturringen versehen seien, nennt man eine *quasiaffine Varietät*. Eine quasiaffine Varietät wird überdeckt durch endlich viele offene Mengen der Form $D(f)$, welche selbst affine Varietäten sind. Manche Autoren nennen nur irreduzible K -Spektren eine Varietät. Satz 14.9 sichert, dass man beim Übergang von R zu $V = K\text{-Spek}(R)$ nichts verliert, da man den Ring R als $\Gamma(V, \mathcal{O})$ zurückgewinnen kann. Dies ist aus dem topologischen Raum allein nicht möglich.

Lokale Ringe

Zu einem gegebenen Punkt P in einem K -Spektrum interessieren wir uns für die Menge aller algebraischen Funktionen, die in P definiert sind und in einer gewissen Umgebung von P eine rationale Darstellung besitzen. Dabei sind die algebraischen Funktionen auf unterschiedlichen Umgebungen definiert, und es gibt keine kleinste Umgebung, auf der alle in P definierten algebraischen Funktionen definiert sind. Es liegt ein System von Ringen $\Gamma(U, \mathcal{O})$, $P \in$

U , vor, das wir geometrisch und algebraisch verstehen wollen. Es stellt sich heraus, dass man diesem System einen sinnvollen Limes („direkter Limes“ oder „Kolimes“) zuordnen kann, und dass dieser mit der Lokalisierung $R_{\mathfrak{m}}$ an dem zu P gehörenden maximalen Ideal \mathfrak{m} übereinstimmt. Wir führen zunächst die algebraischen Begriffe ein.

Definition 15.2. Ein kommutativer Ring R heißt *lokal*, wenn R genau ein maximales Ideal besitzt.

Dazu ist äquivalent, dass das Komplement der Einheitengruppe von R abgeschlossen unter der Addition ist. Die einfachsten lokalen Ringe sind die Körper. Zu jedem lokalen Ring R gehört der Restklassenkörper R/\mathfrak{m} , den man den *Restkörper* von R nennt. Wir werden bald sehen, dass es zu jedem Punkt in einem K -Spektrum einen zugehörigen lokalen Ring gibt, der das „lokale Aussehen“ der Varietät in dem Punkt algebraisch beschreibt.

Definition 15.3. Sei R ein kommutativer Ring und sei \mathfrak{p} ein Primideal. Dann nennt man die Nenneraufnahme an $S = R \setminus \mathfrak{p}$ die *Lokalisierung* von R an \mathfrak{p} . Man schreibt dafür $R_{\mathfrak{p}}$. Es ist also

$$R_{\mathfrak{p}} := \left\{ \frac{f}{g} \mid f \in R, g \notin \mathfrak{p} \right\}.$$

Der folgende Satz zeigt, dass diese Namensgebung Sinn macht.

Satz 15.4. Sei R ein kommutativer Ring und sei \mathfrak{p} ein Primideal in R . Dann ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} := \left\{ \frac{f}{g} \mid g \notin \mathfrak{p}, f \in \mathfrak{p} \right\}.$$

Beweis. Die angegebene Menge ist in der Tat ein Ideal in der Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{f}{g} \mid f \in R, g \notin \mathfrak{p} \right\}$. Wir zeigen, dass das Komplement nur aus Einheiten besteht, so dass es sich um ein maximales Ideal handeln muss. Sei also $q = \frac{f}{g} \in R_{\mathfrak{p}}$, aber nicht in $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. Dann sind $f, g \notin \mathfrak{p}$ und somit gehört der inverse Bruch $\frac{g}{f}$ ebenfalls zur Lokalisierung. \square

Quotientenkörper und Funktionenkörper

Wenn R ein Integritätsbereich ist, so ist der Quotientenkörper eine Lokalisierung, und zwar am Primideal 0. Wir zeigen jetzt, dass für die zugehörige irreduzible affine Varietät $K\text{-Spek}(R)$ jede algebraische Funktion in natürlicher Weise im Quotientenkörper liegt.

Lemma 15.5. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, R eine integrale K -Algebra von endlichem Typ, und sei $U \subseteq K\text{-Spek}(R)$ eine offene

nicht-leere Teilmenge. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten injektiven R -Algebra Homomorphismus

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) \longrightarrow Q(R).$$

Insbesondere ist jede auf einer nicht-leeren offenen Menge $U \subseteq K\text{-Spek}(R)$ definierte algebraische Funktion ein Element im Quotientenkörper $Q(R)$.

Beweis. Sei $P \in U$ ein Punkt und die algebraische Funktion f sei in einer Umgebung von P durch $f = G/H$ gegeben, $G, H \in R$, $H \neq 0$. Dann kann man G/H sofort als Element im Quotientenkörper auffassen. Sei $Q \in U$ ein anderer Punkt mit einer Darstellung $f = G'/H'$. Nach Lemma 14.8 und da ein Integritätsbereich vorliegt ist $GH' = G'H$ in R . Daher ist der Quotient im Quotientenkörper wohldefiniert. Die Abbildung ist dann offensichtlich ein Ringhomomorphismus und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \Gamma(U, \mathcal{O}) & \longrightarrow & Q(R) \end{array}$$

kommutiert. Die Abbildung ist auch durch die Eigenschaften eindeutig festgelegt, da die algebraischen Funktionen, die Elementen aus R entsprechen, auf die zugehörigen Elemente im Quotientenkörper gehen müssen. Damit sind bereits die Bilder der Brüche festgelegt.

Die Injektivität ergibt sich daraus, dass aus $G/H = 0$ im Quotientenkörper sofort $G = 0$ folgt, und damit ist auch die zugehörige Funktion auf $D(H)$ die Nullfunktion. Wenn es eine weitere Darstellung $G/H = G'/H'$ gibt, so folgt wiederum $G' = 0$ und erneut ist das die Nullfunktion. \square

Aus der Eindeutigkeit folgt ebenfalls sofort, dass für zwei offene Mengen $U \subseteq U'$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U', \mathcal{O}) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \Gamma(U, \mathcal{O}) & \longrightarrow & Q(R) \end{array}$$

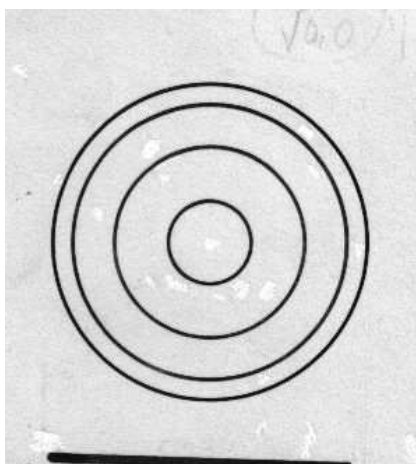
kommutiert, wobei links der Restriktionshomomorphismus steht. Wir werden im integren Fall von nun an eine algebraische Funktion mit dem zugehörigen Element im Quotientenkörper identifizieren.

Topologische Filter und ihre Halme

Das Ergebnis des letzten Abschnitts besagt, dass man den Quotientenkörper gewinnen kann als eine geordnete Vereinigung aller Schnitttringe $\Gamma(U, \mathcal{O})$ über alle nichtleeren offenen Mengen. Eine ähnliche Konstruktion kann man generell für sinnvoll strukturierte Systeme von offenen Mengen durchführen. Dazu benötigen wir den Begriff des Filters.

Definition 15.6. Sei X ein topologischer Raum. Ein System F aus offenen Teilmengen von X heißt *Filter*, wenn folgende Eigenschaften gelten (U, V seien offen).

- (1) $X \in F$.
- (2) Mit $U \in F$ und $U \subseteq V$ ist auch $V \in F$.
- (3) Mit $U \in F$ und $V \in F$ ist auch $U \cap V \in F$.



Schematische Darstellung eines Umgebungsfilters

Definition 15.7. Sei X ein topologischer Raum und sei $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann nennt man das System

$$U(M) = \{U \subseteq X \text{ offen} \mid M \subseteq U\}$$

den *Umgebungsfilter* von M .

Es handelt sich dabei offensichtlich um einen topologischen Filter. Insbesondere gibt es zu einem einzelnen Punkt $P \in X$ den Umgebungsfilter $U(P)$. Der Umgebungsfilter fasst alle offenen Umgebungen des Punktes zusammen. Wenn zwei offene Umgebungen U_1, U_2 von P gegeben sind zusammen mit zwei algebraischen Funktionen

$$f_1 \in \Gamma(U_1, \mathcal{O}) \text{ und } f_2 \in \Gamma(U_2, \mathcal{O}),$$

so hat die Summe $f_1 + f_2$ (ebensowenig das Produkt) zunächst keinen Sinn, da die Definitionsbereiche verschieden sind. Im integren Fall kann man beide Funktionen als Elemente im Quotientenkörper auffassen und dort addieren. Man kann aber auch zum Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ (der ebenfalls eine offene Umgebung des Punktes ist) übergehen und dort die Einschränkungen der beiden Funktionen addieren. Wichtig ist hierbei die Eigenschaft eines Filters, dass man zu je zwei offenen Mengen auch den Durchschnitt im Filter hat mit den zugehörigen Inklusionen

$$U_1 \cap U_2 \subseteq U_1, U_2$$

und den zugehörigen Restriktionen

$$\Gamma(U_1, \mathcal{O}), \Gamma(U_2, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{O}).$$

Diese Beobachtung wird durch den Begriff der gerichteten Menge und des gerichteten Systems präzisiert.

Definition 15.8. Eine geordnete Menge (I, \preceq) heißt *gerichtet geordnet* oder *gerichtet*, wenn es zu jedem $i, j \in I$ ein $k \in I$ gibt mit $i, j \preceq k$.

Wir fassen einen topologischen Filter als eine durch die Inklusion geordnete Menge auf. Aus der Durchschnittseigenschaft eines Filters ergibt sich, dass eine gerichtete Menge vorliegt (Es ist dabei „ $\preceq = \supseteq$ “).

Definition 15.9. Sei (I, \preceq) eine geordnete Indexmenge. Eine Familie

$$M_i, i \in I,$$

von Mengen nennt man ein *geordnetes System von Mengen*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

- (1) Zu $i \preceq j$ gibt es eine Abbildung $\varphi_{ij} : M_i \rightarrow M_j$.
- (2) Zu $i \preceq j$ und $j \preceq k$ ist $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$.

Ist die Indexmenge zusätzlich gerichtet, so spricht man von einem *gerichteten System von Mengen*.

Wenn die beteiligten Mengen M_i allesamt Gruppen (Ringe) sind und alle Abbildungen zwischen ihnen Gruppenhomomorphismen (Ringhomomorphismen), so spricht man von einem geordneten bzw. gerichteten System von Gruppen (Ringern).

Definition 15.10. Es sei $M_i, i \in I$, ein gerichtetes System von Mengen. Dann nennt man

$$\operatorname{colim}_{i \in I} M_i = \coprod_{i \in I} M_i / \sim$$

den *Kolimes* (oder *induktiven Limes*) des Systems. Dabei bezeichnet \sim die Äquivalenzrelation, bei der zwei Elemente $m \in M_i$ und $n \in M_j$ als äquivalent erklärt werden, wenn es ein $k \in I$ mit $i, j \preceq k$ und mit

$$\varphi_{ik}(m) = \varphi_{jk}(n)$$

gibt.

Bei dieser Definition ist insbesondere ein Element $s_i \in M_i$ äquivalent zu seinem Bild $\varphi_{ik}(s_i) \in M_k$ für alle $i \preceq k$. Wenn ein gerichtetes System von Gruppen (Ringern) vorliegt, so kann man auf dem soeben eingeführten Kolimes der Mengen auch eine Gruppenstruktur (Ringstruktur) definieren. Dies beruht darauf, dass zwei Elemente in diesem Kolimes, die durch $s_i \in M_i$ und $s_j \in M_j$ repräsentiert seien, mit ihren Bildern in M_k ($i, j \preceq k$) identifiziert

werden können. Dann kann man dort die Gruppenverknüpfung erklären, siehe Aufgabe 15.13. Unser Hauptbeispiel für ein gerichtetes System ist das durch einen topologischen Filter gerichtete System der Ringe

$$\Gamma(U, \mathcal{O}), U \in F.$$

Der zugehörige Kolimes über dieses System bekommt einen eigenen Namen.

Definition 15.11. Sei (V, \mathcal{O}) eine quasiaffine Varietät und sei F ein topologischer Filter in V . Dann nennt man

$$\mathcal{O}_F = \operatorname{colim}_{U \in F} \Gamma(U, \mathcal{O})$$

den *Halm* von \mathcal{O} in F .

Den Halm im Umgebungsfiler eines Punktes P nennt man auch den Halm in P und schreibt dafür \mathcal{O}_P .

Satz 15.12. Sei R eine reduzierte kommutative Algebra von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K . Es sei $P \in K\text{-Spek}(R)$ ein Punkt im K -Spektrum mit zugehörigem maximalem Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$. Dann gibt es eine natürliche Isomorphie (von R -Algebren)

$$R_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathcal{O}_P.$$

Beweis. Der Halm \mathcal{O}_P hat eine eindeutige Struktur als R -Algebra, da ja die Gesamtmenge zum Filter gehört. Sei $F \in R$, $F \notin \mathfrak{m}$. Dann ist $1/F$ auf der offenen Umgebung $D(F)$ von P definiert. Dabei gilt dort $F \cdot 1/F = 1$, so dass F in dieser Menge und damit auch im Kolimes eine Einheit ist. Nach der universellen Eigenschaft der Nenneraufnahme gibt es also einen R -Algebra Homomorphismus

$$R_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathcal{O}_P,$$

den wir als bijektiv nachweisen müssen. Sei zuerst $f \in \mathcal{O}_P$. Dieses Element ist repräsentiert durch eine algebraische Funktion $f \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ mit $P \in U$. Insbesondere gibt es eine rationale Darstellung für f in P , d.h. $f = G/H$ auf $D(H)$ und $P \in D(H)$. Daher ist G/H ein Element in der Lokalisierung $R_{\mathfrak{m}}$, und dieses wird auf f geschickt.

Zur Injektivität sei G/H gegeben mit $H \notin \mathfrak{m}$ und vorausgesetzt, dass es als Element im Halm null ist. Dies bedeutet, dass es eine offene Umgebung U von P gibt, auf der G/H die Nullfunktion ist. Wir können annehmen, dass diese offene Menge die Form $P \in D(H') \subseteq D(H)$ hat. Wegen Korollar 14.10 gibt es dann auch eine Beschreibung $G/H = G'/H' = 0$. Das heisst nach Lemma 14.8, dass $HH'H'G = 0$ in R ist. Dann ist auch $G/H = 0$ in der Lokalisierung. \square

Lemma 15.13. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei R eine integrale K -Algebra von endlichem Typ. Sei $U \subseteq K\text{-Spek}(R)$ eine offene Teilmenge. Dann ist

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) = \bigcap_{P \in U} \mathcal{O}_P$$

(dabei wird der Durchschnitt im Quotientenkörper genommen).

Beweis. Zu jedem Punkt $P \in U$ gibt es Ringhomomorphismen $\Gamma(U, \mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{O}_P$ und $\mathcal{O}_P \rightarrow Q(R)$, die jeweils injektiv sind. Damit gibt es auch einen injektiven Ringhomomorphismus

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) \longrightarrow \bigcap_{P \in U} \mathcal{O}_P.$$

Sei $f \in Q(R)$ ein Element im Durchschnitt rechts. Dann gibt es zu jedem Punkt $P \in U$ eine Darstellung $f = G/H$ mit $P \in D(H) \subseteq U$. Dies bedeutet direkt, dass f eine algebraische Funktion auf U ist. \square

Definition 15.14. Sei V eine irreduzible quasiaffine Varietät. Dann ist der Halm von \mathcal{O} über alle nichtleeren offenen Mengen ein Körper, den man den *Funktionskörper* von V nennt.

15. ARBEITSBLATT

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 15.1. Sei R ein kommutativer lokaler Ring. Zeige, dass R zusammenhängend ist.

Aufgabe 15.2. Sei R ein lokaler Ring mit Restekörper K . Zeige, dass R und K genau dann die gleiche Charakteristik haben, wenn R einen Körper enthält.

Aufgabe 15.3. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und R eine endlich erzeugte kommutative K -Algebra. Es seien F_1 und F_2 zwei topologische Filter in $K\text{-Spek}(R)$ mit $F_1 \subseteq F_2$. Zeige, dass es einen Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}_{F_1} \longrightarrow \mathcal{O}_{F_2}$$

gibt.

Aufgabe 15.4. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und R eine endlich erzeugte kommutative K -Algebra. Sei $P \in K\text{-Spek}(R)$ ein Punkt. Zeige (ohne Satz 15.12 zu verwenden), dass der Halm \mathcal{O}_P ein lokaler Ring ist.

Aufgabe 15.5. Sei R ein kommutativer Ring und sei \mathfrak{p} ein Primideal. Zeige, dass \mathfrak{p} ein minimales Primideal ist genau dann, wenn die Reduktion der Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ ein Körper ist.

Aufgabe 15.6. Sei R ein kommutativer Ring und sei \mathfrak{m} ein maximales Ideal mit Lokalisierung $R_{\mathfrak{m}}$. Es sei \mathfrak{a} ein Ideal, das unter der Lokalisierungsabbildung zum Kern gehört. Zeige, dass dann $R_{\mathfrak{m}}$ auch eine Lokalisierung von R/\mathfrak{a} ist.

Aufgabe 15.7.*

Sei K ein Körper und R eine integrale, endlich erzeugte K -Algebra mit Quotientenkörper $Q(R)$. Sei $q \in Q(R)$. Zeige, dass die Menge

$$\{P \in K\text{-Spek}(R) \mid q \in \mathcal{O}_P\}$$

offen in $K\text{-Spek}(R)$ ist (dabei bezeichnet \mathcal{O}_P den lokalen Ring im Punkt P).

Aufgabe 15.8.*

Sei K ein Körper und seien R und S integrale, endlich erzeugte K -Algebren. Es sei

$$\varphi : R \longrightarrow S$$

ein K -Algebra-Homomorphismus und \mathfrak{n} ein maximales Ideal in S mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$. Die Abbildung induziere einen Isomorphismus $R_{\mathfrak{m}} \rightarrow S_{\mathfrak{n}}$. Zeige, dass es dann auch ein $f \in R$, $f \notin \mathfrak{m}$, gibt derart, dass $R_f \rightarrow S_{\varphi(f)}$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 15.9. Betrachte $V = V(XW - YZ) \subseteq \mathbb{A}_K^4$. Beschreibe eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{A}_K^4$ derart, dass der zu $U \cap V \subseteq U$ gehörende Ringhomomorphismus

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(U \cap V, \mathcal{O})$$

nicht surjektiv ist.

Aufgabe 15.10. Zeige, dass der Ring $\Gamma(U, \mathcal{O})$ reduziert ist.

Aufgabe 15.11. Sei R eine kommutative K -Algebra von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Sei $U \subseteq K\text{-Spek}(R)$ eine offene Teilmenge und $f : U \rightarrow K$ eine Funktion. Es sei $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung mit der Eigenschaft, dass die Einschränkungen $f_i = f|_{U_i}$ algebraische Funktionen sind. Zeige, dass dann f selbst algebraisch ist.

Aufgabe 15.12. Sei K ein Körper und betrachte das Achsenkreuz

$$V = K\text{-Spek}(K[X, Y]/(XY)).$$

Bestimme für jeden Punkt $P \in V$, ob der lokale Ring an P ein Integritätsbereich ist oder nicht.

Aufgabe 15.13. Sei I eine gerichtete Indexmenge und sei $G_i, i \in I$, ein gerichtetes System von kommutativen Gruppen. Zeige, dass der Kolimes eine kommutative Gruppe ist.

Aufgabe 15.14. Sei I eine gerichtete Indexmenge und sei $M_i, i \in I$, ein gerichtetes System von Mengen. Es sei N eine weitere Menge und zu jedem $i \in I$ sei eine Abbildung

$$\psi_i : M_i \longrightarrow N$$

gegeben mit der Eigenschaft, dass $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$ ist für alle $i \preceq j$ (wobei φ_{ij} die Abbildungen des Systems bezeichnen). Beweise die universelle Eigenschaft des Kolimes, nämlich, dass es eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\psi : \operatorname{colim}_{i \in I} M_i \longrightarrow N$$

gibt derart, dass $\psi_i = \psi \circ j_i$ ist, wobei $j_i : M_i \rightarrow \operatorname{colim}_{i \in I} M_i$ die natürlichen Abbildungen sind.

Zeige ferner, dass falls M_i ein gerichtetes System von Gruppen und falls N ebenfalls eine Gruppe ist und alle ψ_i Gruppenhomomorphismen sind, dass dann auch ψ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 15.15. (6 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei \mathfrak{p} ein Primideal. Dann ist der Restklassenring $S = R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper $Q = Q(S)$ und $R_{\mathfrak{p}}$ ist ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. Zeige, dass eine natürliche Isomorphie

$$Q(S) \cong R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$$

vorliegt.

(Man nennt diesen Körper auch den *Restkörper* zu \mathfrak{p}).

Aufgabe 15.16. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei R eine K -Algebra von endlichem Typ. Es seien P_1, \dots, P_n endlich viele Punkte in $X = K\text{-Spek}(R)$. Zeige, dass der Umgebungsfiler dieser Punkte durch offene Mengen der Form $D(f)$ erzeugt wird.

D.h. es ist zu zeigen, dass es zu $P_1, \dots, P_n \in U$ offen stets ein $F \in R$ gibt mit $P_1, \dots, P_n \in D(F) \subseteq U$

Aufgabe 15.17. (4 Punkte)

Sei R eine integrale K -Algebra R von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Sei $q \in Q = Q(R)$ ein Element im Quotientenkörper von R . Zeige, dass

$$\mathfrak{a} = \{f \in R \mid \text{es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } f^n q \in R\}$$

ein Ideal in R ist. Zeige ferner, dass $D(\mathfrak{a}) \subseteq K - \text{Spek}(R)$ der (maximale) Definitionsbereich der algebraischen Funktion q ist.

Aufgabe 15.18. (5 Punkte)

Sei K ein Körper, sei R eine kommutative K -Algebra von endlichem Typ und sei S ein multiplikatives System in R . Zu S definieren wir

$$F(S) = \{U \subseteq K - \text{Spek}(R) \text{ offen} : \text{es gibt } f \in S \text{ mit } D(f) \subseteq U\}.$$

Zeige, dass $F = F(S)$ ein topologischer Filter ist. Zeige ferner, dass es einen Ringhomomorphismus

$$R_S \longrightarrow \mathcal{O}_F$$

gibt, der eine Isomorphie ist, falls K algebraisch abgeschlossen und R reduziert ist.

Aufgabe 15.19. (5 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und betrachte die affine Ebene \mathbb{A}_K^2 zusammen mit der x -Achse

$$V = V(y).$$

Zeige, dass die folgende Menge ein saturiertes multiplikatives System ist.

$$S = \left\{ f \in K[X, Y] \mid \begin{array}{l} \text{In der homogenen Komponente } f_{\deg(f)} \\ \text{kommt } x^{\deg(f)} \text{ vor} \end{array} \right\}.$$

Skizziere die Nullstellenmenge von einigen Polynomen, die oder die nicht zu S gehören.

Sei F der zugehörige topologische Filter. Vergleiche F mit dem Umgebungsfilter zu V und dem generischen Filter zu V .

Aufgabe 15.20. (4 Punkte)

Sei $X = K - \text{Spek}(R)$ eine affine Varietät und seien $P_1, \dots, P_n \in X$ endlich viele Punkte. Es sei F der Umgebungsfilter dieser Punkte und \mathcal{O}_F der zugehörige Halm. Zeige, dass \mathcal{O}_F genau dann ein lokaler Ring ist, wenn $n = 1$ ist.

Aufgabe 15.21. (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Auf S betrachten wir folgende (partielle) Ordnung, und zwar sagen wir $f \preceq g$, falls f eine Potenz von g teilt. Zeige, dass die kommutativen Ringe

$$R_f, f \in S,$$

ein gerichtetes System bilden, und dass für den Kolimes gilt

$$\operatorname{colim}_{f \in S} R_f = R_S.$$

Aufgabe 15.22. (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und seien $f_1, \dots, f_n \in R$ Elemente, die das Einheitsideal erzeugen. Es sei vorausgesetzt, dass die Nenneraufnahmen R_{f_i} noethersch sind für $i = 1, \dots, n$. Zeige, dass dann auch R noethersch ist.

16. VORLESUNG - MORPHISMEN

Irreduzible Filter

Einen Filter kann man mit dem, was in ihm hängen bleibt, identifizieren.

Wir haben in der letzten Vorlesung gesehen, dass zu einem Punkt P in einem K -Spektrum $K\text{-Spek}(R)$ der Umgebungsfilter gehört und dass der Halm in diesem Filter gleich der Lokalisierung von R an dem zugehörigen maximalen Ideal ist. Ebenfalls haben wir gesehen, dass bei integrem R der Halm über alle nichtleeren offenen Mengen den Quotientenkörper von R liefert, der wiederum die Lokalisierung am Nullideal ist. Dieser Zusammenhang wird mit dem Begriff des irreduziblen Filters verallgemeinert.

Definition 16.1. Ein topologischer Filter F heißt *irreduzibel*, wenn $\emptyset \notin F$ und folgendes gilt: Sind U, V zwei offene Mengen mit $U \cup V \in F$, so ist $U \in F$ oder $V \in F$.

Für Zariski-Filter (also topologische Filter in der Zariski-Topologie) gilt folgender Zusammenhang.

Satz 16.2. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei R eine kommutative K -Algebra von endlichem Typ mit K -Spektrum $X = K\text{-Spek}(R)$. Dann entsprechen sich folgende Objekte.*

- (1) *Primideale in R .*
- (2) *Irreduzible abgeschlossene Teilmengen von X .*
- (3) *Irreduzible Filter in X .*

Dabei entspricht der irreduziblen abgeschlossenen Teilmenge $Y \subseteq X$ der Filter

$$F(Y) = \{U \subseteq X \mid U \cap Y \neq \emptyset\} .$$

Der Halm der Strukturgarbe an diesem Filter ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$, wobei \mathfrak{p} das zugehörige Primideal bezeichnet.

Beweis. Die Korrespondenz zwischen Primidealen und abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen (zu einem Primideal \mathfrak{p} gehört die irreduzible abgeschlossene Teilmenge $V(\mathfrak{p})$) ist bekannt (siehe Lemma 4.3 und Proposition 11.10). Die angegebene Konstruktion zu einer irreduziblen abgeschlossenen Menge Y liefert in der Tat einen irreduziblen Filter. Dabei ist die Irreduzibilität trivial, zu zeigen ist lediglich die Durchschnittseigenschaft eines Filters. Seien $U, V \in F = F(Y)$, so dass also die Durchschnitte $Y \cap U$ und $Y \cap V$ nicht leer sind. Dann ist aber wegen der Irreduzibilität von Y auch der Durchschnitt

$$(Y \cap U) \cap (Y \cap V) = Y \cap (U \cap V)$$

nicht leer und daher ist $U \cap V \in F$.

Sei nun F irgendein irreduzibler topologischer Filter. Wir behaupten, dass das Komplement von

$$S = \{f \in R \mid D(f) \in F\}$$

ein Primideal ist. Es ist sofort ein saturiertes multiplikatives System. Es bleibt zu zeigen, dass das Komplement additiv abgeschlossen ist. Seien dazu $h, g \in R$ mit $g + h \in S$, also $D(g + h) \in F$. Dann gehört erst recht

$$D(g) \cup D(h) = D(g, h) \supseteq D(g + h)$$

zu F und wegen der Irreduzibilität von F ist $D(g) \in F$ oder $D(h) \in F$, woraus sich $g \in S$ oder $h \in S$ ergibt.

Diese drei Zuordnungen hintereinandergenommen führen dabei immer wieder zum Ausgangsobjekt zurück. Dazu muss man lediglich beachten, dass ein irreduzibler Zariski-Filter durch offene Mengen der Form $D(f)$ erzeugt wird, siehe Aufgabe 16.1. Der Zusatz ist ein Spezialfall von Aufgabe 15.18. \square

Den zu einer irreduziblen abgeschlossenen Menge gehörenden Filter nennen wir auch den zugehörigen *generischen Filter* zu Y und den Halm davon den *generischen Halm* zu Y . Ein Spezialfall der Korrespondenz von Satz 16.2 ist

die Beziehung zwischen minimalen Primidealen, irreduziblen Komponenten und Ultrafiltern. Auf der anderen Seite hat man die Korrespondenz zwischen maximalen Idealen, Punkten und Umgebungsfiltren.

Morphismen zwischen Varietäten

Definition 16.3. Seien X und Y zwei quasiaffine Varietäten und sei

$$\psi : Y \longrightarrow X$$

eine stetige Abbildung. Dann nennt man ψ einen *Morphismus* (von quasiaffinen Varietäten), wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ und jede algebraische Funktion $f \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ gilt, dass die zusammengesetzte Funktion

$$f \circ \psi : \psi^{-1}(U) \longrightarrow U \xrightarrow{f} \mathbb{A}_K^1$$

zu $\Gamma(\psi^{-1}(U), \mathcal{O})$ gehört.

Bemerkung 16.4. Ein Morphismus

$$\psi : Y \longrightarrow X$$

induziert also nach Definition zu jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ einen Ringhomomorphismus

$$\tilde{\psi} : \Gamma(U, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(\psi^{-1}(U), \mathcal{O}).$$

Insbesondere gibt es einen *globalen Ringhomomorphismus*

$$\tilde{\psi} : \Gamma(X, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}).$$

Sind $U_1 \subseteq U_2$ offene Teilmengen in Y , so liegt ein kommutatives Diagramm von stetigen Abbildungen vor (wobei die senkrechten Pfeile offene Inklusionen sind)

$$\begin{array}{ccc} \psi^{-1}(U_1) & \longrightarrow & U_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \psi^{-1}(U_2) & \longrightarrow & U_2 \end{array},$$

das wiederum zu dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\psi^{-1}(U_1), \mathcal{O}) & \longleftarrow & \Gamma(U_1, \mathcal{O}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Gamma(\psi^{-1}(U_2), \mathcal{O}) & \longleftarrow & \Gamma(U_2, \mathcal{O}) \end{array}$$

von Ringhomomorphismen führt.

Wir fassen einige einfache Eigenschaften von Morphismen zusammen

Proposition 16.5. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, und seien U, X, Y, Z quasiaffine Varietäten. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Eine offene Einbettung $U \subseteq X$ ist ein Morphismus.*
- (2) *Sind $\theta : Z \rightarrow Y$ und $\psi : Y \rightarrow X$ Morphismen, so ist auch die Verknüpfung $\psi \circ \theta$ ein Morphismus.*

Beweis. Das ist trivial. \square

Wichtiger sind die folgenden Eigenschaften.

Satz 16.6. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien R und S kommutative K -Algebren vom endlichen Typ mit zugehörigen K -Spektren $X = K\text{-Spek}(R)$ und $Y = K\text{-Spek}(S)$. Dann ist die durch einen Ringhomomorphismus $\varphi : R \rightarrow S$ induzierte Spektrumsabbildung*

$$\varphi^* : Y \longrightarrow X$$

ein Morphismus.

Beweis. Wir wissen bereits nach Satz 12.7, das

$$Y = K\text{-Spek}(S) \longrightarrow X = K\text{-Spek}(R)$$

eine stetige Abbildung ist. Sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $V = (\varphi^*)^{-1}(U)$ das Urbild. Sei $f : U \rightarrow K$ eine algebraische Funktion mit der Hintereinanderschaltung $f \circ \varphi^* : V \rightarrow K$. Wir haben zu zeigen, dass diese Abbildung ebenfalls algebraisch ist. Sei dazu $P \in V$ ein Punkt mit dem Bildpunkt $Q = \varphi^*(P)$. Sei $Q \in D(H) \subseteq U$ und $f = G/H$ auf $D(H)$ mit $G, H \in R$. Es ist

$$P \in (\varphi^*)^{-1}(D(H)) = D(\varphi(H)).$$

Wir behaupten, dass auf $D(\varphi(H))$ die Gleichheit $f \circ \varphi^* = \frac{\varphi(G)}{\varphi(H)}$ gilt. Dies folgt für $\tilde{P} \in D(\varphi(H))$ aus

$$f \circ \varphi^*(\tilde{P}) = f(\varphi^*(\tilde{P})) = \frac{G(\varphi^*(\tilde{P}))}{H(\varphi^*(\tilde{P}))} = \frac{(\varphi(G))(\tilde{P})}{(\varphi(H))(\tilde{P})}.$$

\square

Bemerkung 16.7. In der Situation von Satz 16.6 ist der zu $U = D(f)$ gehörende Ringhomomorphismus die natürliche Abbildung

$$\Gamma(D(f), \mathcal{O}) \cong R_f \longrightarrow \Gamma((\varphi^*)^{-1}(D(f)), \mathcal{O}) = \Gamma(D(\varphi(f)), \mathcal{O}) = S_{\varphi(f)}.$$

Lemma 16.8. *Sei U eine quasiaffine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K und sei $f \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ eine algebraische Funktion. Dann definiert f einen Morphismus*

$$f : U \longrightarrow \mathbb{A}_K^1 \cong K.$$

Beweis. Sei $U \subseteq K\text{-Spek}(R)$. Es sei $V = D(t) \subseteq \mathbb{A}_K^1$ eine offene Teilmenge und $W = f^{-1}(V) \subseteq U$ das Urbild davon. Sei

$$s = \frac{r}{t^n} \in \Gamma(V, \mathcal{O}) = K[T]_t$$

eine algebraische Funktion auf V . Wir müssen zeigen, dass die Verknüpfung $s \circ f$ eine algebraische Funktion auf W ist. Sei dazu $P \in W$ und sei $f = G/H$

eine Beschreibung der nach Voraussetzung algebraischen Funktion f in der Umgebung $D(H) \ni P$. Dann ist

$$s \circ f(P) = s(f(P)) = \frac{r}{t^n} \left(\frac{G}{H}(P) \right) = \frac{r(G(P)/H(P))}{(t(G(P)/H(P)))^n}.$$

Dabei ist der Nenner $(t(G(P)/H(P)))^n$ nicht null, da $f(P) \in D(t)$ ist, so dass dies eine rationale Darstellung ist. \square

Satz 16.9. *Sei U eine quasiaffine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, und zwar sei $U \subseteq K - \text{Spek}(R)$, wobei R eine kommutative K -Algebra von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K sei. Dann gibt es eine natürliche Bijektion*

$$\text{Mor}(U, \mathbb{A}_K^1) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}), \psi \longmapsto \tilde{\psi}(T),$$

wobei T die Variable in $K[T] = \Gamma(\mathbb{A}_K^1, \mathcal{O})$ bezeichnet. Insbesondere sind Morphismen von U nach der affinen Geraden durch den globalen Ringhomomorphismus

$$\tilde{\psi}: \Gamma(\mathbb{A}_K^1, \mathcal{O}) = K[T] \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O})$$

eindeutig bestimmt.

Beweis. Die Abbildung ist wohldefiniert und surjektiv. Ist nämlich eine globale algebraische Funktion $f \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ gegeben, so ist zunächst $f: U \rightarrow K$. Die Variable T , die auf $K = \mathbb{A}_K^1$ der identischen Abbildung entspricht, wird unter (der Verknüpfung mit) f auf das Element $f \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ abgebildet. Nach Lemma 16.8 ist f ein Morphismus.

Die Injektivität ergibt sich, da sowohl der Morphismus als auch die algebraische Funktion durch die zugrunde liegende stetige Abbildung eindeutig festgelegt sind. \square

Satz 16.10. *Sei U eine quasiaffine Varietät, und zwar sei $U \subseteq K - \text{Spek}(R)$, wobei R eine kommutative K -Algebra von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K sei. Es sei S eine weitere kommutative K -Algebra von endlichem Typ. Dann gibt es eine natürliche Bijektion*

$$\text{Mor}(U, K - \text{Spek}(S)) \longrightarrow \text{Hom}_K^{\text{alg}}(S, \Gamma(U, \mathcal{O})), \psi \longmapsto \tilde{\psi},$$

wobei $\tilde{\psi}$ den zu ψ gehörigen globalen Ringhomomorphismus bezeichnet.

Beweis. Die Abbildung ist wohldefiniert. Aus Satz 16.9 folgt, dass die Aussage für $S = K[T]$ richtig ist. Daraus ergibt sich, dass die Aussage für jeden Polynomring $K[T_1, \dots, T_n]$ richtig ist, da ein Morphismus nach \mathbb{A}_K^n durch seine Komponenten und ein K -Algebra-Homomorphismus durch die Einsetzungen für T_i gegeben ist. Sei nun $S = K[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{a}$ und

$$K - \text{Spek}(S) \cong V(\mathfrak{a}) = V \subseteq \mathbb{A}_K^n.$$

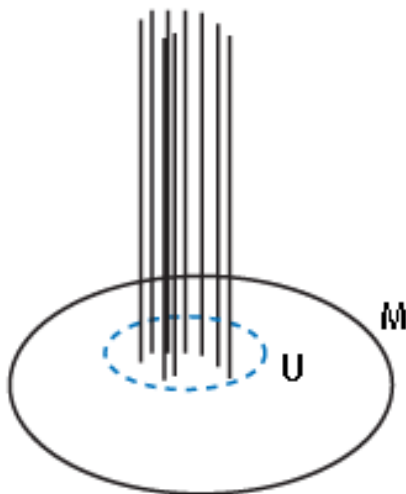
Zu einem Morphismus $U \rightarrow K - \text{Spek}(S)$ ist die Verknüpfung mit der abgeschlossenen Einbettung in den affinen Raum ebenfalls ein Morphismus. D.h. es liegt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\text{Mor}(U, K\text{-Spek}(S)) & \longrightarrow & \text{Hom}_K^{\text{alg}}(S, \Gamma(U, \mathcal{O})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{Mor}(U, \mathbb{A}_K^n) & \longrightarrow & \text{Hom}_K^{\text{alg}}(K[T_1, \dots, T_n], \Gamma(U, \mathcal{O})) ,
\end{array}$$

vor, wobei die untere Abbildung bereits als Bijektion nachgewiesen wurde. Die vertikalen Abbildungen sind injektiv. Wir müssen daher zeigen, dass die untere Abbildung die oberen Teilmengen ineinander überführt.

Ein Morphismus $U \rightarrow \mathbb{A}_K^n$, der (als Abbildung) durch V faktorisiert, ist auch ein Morphismus nach V . Die Morphismuseigenschaft ist nur für offene Mengen der Form $D(H)$ zu überprüfen, $H \in S$. Sei $\tilde{H} \in K[T_1, \dots, T_n]$ ein Repräsentant für H . Dann ist $K[T_1, \dots, T_n]_{\tilde{H}} \rightarrow S_H$ surjektiv und damit wird jedes Element aus S_H auf eine algebraische Funktion abgebildet.

Auf der rechten Seite des Diagramms gehört eine Algebra-Homomorphismus genau dann zur oberen Menge, wenn \mathfrak{a} zum Kern gehört. Damit folgt die Aussage aus Aufgabe 16.3. \square



Die Fasern einer Abbildung (M ist der Zielbereich, der Definitionsbereich ist die Vereinigung aller Fasern; die Abbildung geht von oben nach unten).

Definition 16.11. Zu einem Morphismus $\psi : Y \rightarrow X$ zwischen affinen Varietäten bezeichnet man zu einem Punkt $P \in X$ das Urbild

$$\psi^{-1}(P) \subseteq Y$$

als die *Faser* über P . Als abgeschlossene Menge von Y ist sie selbst eine affine Varietät.

16. ARBEITSBLATT

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 16.1. Sei $X = K\text{-Spek}(R)$ das K -Spektrum einer endlich erzeugten kommutativen K -Algebra. Dann wird ein irreduzibler Filter durch offene Mengen der Form $D(f)$ erzeugt.

Aufgabe 16.2. Sei U eine quasiaffine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K . Zeige, dass die Einheiten in $\Gamma(U, \mathcal{O})$ den Morphismen von U nach $\mathbb{A}_K^\times = \mathbb{A}_K^1 \setminus \{0\}$ entsprechen.

Aufgabe 16.3. Sei U eine quasiaffine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und sei

$$\psi: U \longrightarrow \mathbb{A}_K^n$$

ein Morphismus. Zeige, dass ψ genau dann durch die abgeschlossene Menge $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ faktorisiert, wenn \mathfrak{a} im Kern des globalen Ringhomomorphismus

$$\tilde{\psi}: K[T_1, \dots, T_n] \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O})$$

liegt.

Aufgabe 16.4. Sei $X = K\text{-Spek}(R)$ eine affine Varietät und $Z \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Zeige, dass der Umgebungsfiler $\mathcal{U}(Z)$ von offenen Mengen der Form $D(f)$ erzeugt wird.

Aufgabe 16.5. Sei X ein topologischer Raum. Zeige, dass ein Ultrafilter irreduzibel ist.

Aufgabe 16.6. Man beschreibe einen K -Algebra-Homomorphismus derart, dass die induzierte Abbildung der K -Spektra die Addition auf K beschreibt.

Aufgabe 16.7. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass die Addition, die Multiplikation, das Negative, das Inverse und die Division in K sich als Morphismen realisieren lassen.

Aufgabe 16.8. Sei M ein kommutatives Monoid. Finde eine allgemeine Definition von *Filter* derart, dass einerseits die topologischen Filter und andererseits die saturierten multiplikativen Systeme sich als Spezialfälle ergeben.

Aufgabe 16.9. Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_n)$ ein endlich erzeugtes Ideal. Es sei $f \in R$ ein weiteres Element. Dann nennt man die R -Algebra

$$A = R[T_1, \dots, T_n]/(f_1T_1 + \dots + f_nT_n + f)$$

die *erzwingende Algebra* zu den f_1, \dots, f_n, f . Zeige, dass A folgende Eigenschaft erfüllt: zu jedem Ringhomomorphismus $\varphi : R \rightarrow S$ in einen kommutativen Ring S mit der Eigenschaft $\varphi(f) \in \mathfrak{a}S$ gibt es einen R -Algebra Homomorphismus $\vartheta : A \rightarrow S$. Zeige ebenso, dass dieser Homomorphismus *nicht* eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 16.10. Sei R eine kommutative K -Algebra von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Es seien f_1, \dots, f_n, f Elemente in R und es sei

$$A = R[T_1, \dots, T_n]/(f_1T_1 + \dots + f_nT_n + f)$$

die erzwingende Algebra zu diesen Daten. Charakterisiere die Fasern des zugehörigen Morphismus

$$K\text{-Spek}(A) \longrightarrow K\text{-Spek}(R)$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 16.11. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien R und S integrale K -Algebren von endlichem Typ. Es sei $\varphi : R \rightarrow S$ ein K -Algebra Homomorphismus mit zugehörigem Morphismus $\varphi^* : K\text{-Spek}(S) \rightarrow K\text{-Spek}(R)$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

- (1) φ ist injektiv.
- (2) Das Bild von φ^* ist dicht in $K\text{-Spek}(R)$.
- (3) φ induziert einen Ringhomomorphismus $Q(R) \rightarrow Q(S)$.

Aufgabe 16.12. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien R und S zwei integrale K -Algebren von endlichem Typ. Es sei ein K -Algebra Homomorphismus

$$\varphi : Q(R) \longrightarrow Q(S)$$

zwischen den Quotientenkörpern gegeben. Zeige, dass es eine offene Teilmenge $U \subseteq K\text{-Spek}(S)$ und einen Morphismus

$$U \longrightarrow K\text{-Spek}(R)$$

gibt, der φ induziert.

Aufgabe 16.13. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von zwei affin-algebraischen Kurven C_1 und C_2 über \mathbb{C} und einem Morphismus

$$\psi : C_1 \longrightarrow C_2,$$

der bijektiv ist, wo aber die Umkehrabbildung nicht stetig in der metrischen Topologie ist.

Aufgabe 16.14. (8 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von zwei affinen Varietäten V_1 und V_2 und einem Morphismus

$$\psi : V_1 \longrightarrow V_2,$$

der bijektiv ist, wo aber die Umkehrabbildung nicht stetig (in der Zariski-Topologie) ist.

(und daher auch kein Morphismus)

Aufgabe 16.15. (3 Punkte)

Sei $U \subseteq K\text{-Spek}(R)$ eine quasiaffine Varietät und sei $f \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ eine algebraische Funktion. Es seien $q = g_i/h_i$, $i = 1, \dots, n$, lokale Darstellungen von f auf $D(h_i) \subseteq U$. Zeige, dass das Urbild $f^{-1}(0)$ gleich der abgeschlossenen Menge $V(h_1g_1, \dots, h_n g_n) \cap U$ ist.

17. VORLESUNG - MONOIDRINGE

Nachdem wir nun die Theorie hinreichend weit entwickelt haben, wenden wir uns nun einer umfassenden Beispielsklasse zu, den *Monoidringen*.

Monoidringe

Definition 17.1. Sei M ein kommutatives (additiv geschriebenes) Monoid und R ein kommutativer Ring. Dann wird der *Monoidring* $R[M]$ wie folgt konstruiert. Als R -Modul ist

$$R[M] = \bigoplus_{m \in M} R e_m,$$

d.h. $R[M]$ ist der freie Modul mit Basis e_m , $m \in M$. Die Multiplikation wird auf den Basiselementen durch

$$e_m \cdot e_k := e_{m+k}$$

definiert und auf ganz A distributiv fortgesetzt. Dabei definiert das neutrale Element $0 \in M$ das neutrale Element $1 = e_0$ der Multiplikation.

Bemerkung 17.2. Ein Element in einem Monoidring lässt sich eindeutig schreiben als

$$f = \sum_{m \in \tilde{M}} a_m e_m,$$

wobei $\tilde{M} \subseteq M$ eine endliche Teilmenge ist und $a_m \in R$. Addiert wird komponentenweise und die Multiplikation ist explizit gegeben durch

$$f \cdot g = \left(\sum_{m \in \tilde{M}} a_m e_m \right) \left(\sum_{k \in \tilde{M}} b_k e_k \right) = \sum_{\ell \in M} \left(\sum_{m+k=\ell, m \in \tilde{M}, k \in \tilde{M}} a_m b_k \right) e_\ell.$$

Dies ist gemeint mit distributiver Fortsetzung. Die Menge der ℓ , über die hier summiert wird, ist endlich, und auch die inneren Summen sind jeweils endlich.

Es ist üblich, statt e_m suggestiver X^m zu schreiben, wobei X ein Symbol ist, das an eine Variable erinnern soll. Die Multiplikationsregel $X^m X^k = X^{m+k}$ erinnert dann an die entsprechende Regel für Polynomringe. In der Tat sind Polynomringe Spezialfälle von Monoidringen, und diese Notation stammt von dort. Auch ein exakter Beweis, dass in der Tat ein Ring mit assoziativer und distributiver Multiplikation vorliegt, funktioniert wie im Fall von Polynomringen. Meistens schreibt man ein Element einfach als $\sum_{m \in M} a_m X^m$, wobei fast alle $a_m = 0$ sind. Elemente der Form X^m nennt man *Monome*. Die Abbildung $M \rightarrow R[M]$, $m \mapsto X^m$, ist ein Monoidhomomorphismus, wobei rechts die multiplikative Monoidstruktur des Monoidringes genommen wird.

Ein Monoidring ist in natürlicher Weise eine R -Algebra, und zwar sind die Elemente f aus R aufgefasst in $R[M]$ gleich $f = f \cdot 1 = f X^0$. Man nennt daher auch R den Grundring des Monoidringes. Monoidringe sind bereits für Grundkörper interessant.

Beispiel 17.3. Sei n eine natürliche Zahl und $M = \mathbb{N}^n$ das n -fache direkte Produkt der natürlichen Zahlen. Ein Element $k \in \mathbb{N}^n$ ist also ein n -Tupel (k_1, \dots, k_n) mit $k_i \in \mathbb{N}$. Dies kann man auch schreiben als

$$(k_1, \dots, k_n) = k_1(1, 0, 0, \dots, 0) + k_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + k_n(0, 0, 0, \dots, 1)$$

Damit lässt sich das zugehörige Monom X^k eindeutig schreiben als

$$X^k = X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n},$$

wobei wir $X_i = X^{e_i} = X^{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}$ für das Monom zum i -ten Basiselement geschrieben haben. Das bedeutet aber, dass der Monoidring zum Monoid \mathbb{N}^n über R genau der Polynomring in n Variablen ist. Insbesondere ist $R[\mathbb{N}] = R[X]$. Der Monoidring zum trivialen Monoid ist der Grundring selbst.

Beispiel 17.4. Sei n eine natürliche Zahl und $M = \mathbb{Z}^n$ das n -fache direkte Produkt der ganzen Zahlen. M ist also die freie Gruppe vom Rang n . Jedes Element $k \in \mathbb{Z}^n$ ist ein n -Tupel (k_1, \dots, k_n) mit $k_i \in \mathbb{Z}$. Dies kann man auch

schreiben als

$$(k_1, \dots, k_n) = k_1(1, 0, 0, \dots, 0) + k_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + k_n(0, 0, 0, \dots, 1)$$

und das zugehörige Monom X^k kann man eindeutig schreiben als

$$X^k = X_1^{k_1} X_2^{k_2} \cdots X_n^{k_n},$$

mit $k_i \in \mathbb{Z}$, wobei wir wieder $X_i = X^{e_i}$ geschrieben haben. Für diesen Monoidring schreibt man auch

$$R[M] = R[X_1, \dots, X_n, X_1^{-1}, \dots, X_n^{-1}],$$

und dieser ist isomorph zur Nenneraufnahme des Polynomringes am Produkt der Variablen, also

$$R[M] = R[X_1, \dots, X_n, X_1^{-1}, \dots, X_n^{-1}] = R[X_1, \dots, X_n]_{X_1 \cdots X_n},$$

Diesen Ring nennt man auch den *Laurenttring* in n Variablen über R .

Universelle Eigenschaft der Monoidringe

Satz 17.5. *Sei R ein kommutativer Ring und sei M ein kommutatives Monoid. Sei B eine kommutative R -Algebra und $\varphi : M \rightarrow B$ ein Monoidhomomorphismus (bezüglich der multiplikativen Struktur von B). Dann gibt es einen eindeutig bestimmten R -Algebra Homomorphismus $\tilde{\varphi} : R[M] \rightarrow B$ derart, dass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & R[M] \\ & \searrow & \downarrow \\ & & B \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. Ein R -Modul-Homomorphismus $\tilde{\varphi} : R[M] \rightarrow B$ ist festgelegt durch die Bilder der Basiselemente X^m , $m \in M$. Das Diagramm kommutiert genau dann, wenn $\tilde{\varphi}(X^m) = \varphi(m)$ ist. Durch diese Bedingung ist die Abbildung also eindeutig festgelegt und ist bereits ein R -Modul-Homomorphismus. Es ist zu zeigen, dass dieser Homomorphismus auch die Multiplikation respektiert. Es ist $\tilde{\varphi}(1) = \tilde{\varphi}(X^0) = \varphi(0) = 1$. Ferner ist

$$\tilde{\varphi}(X^m X^k) = \tilde{\varphi}(X^{m+k}) = \varphi(m+k) = \varphi(m) \cdot \varphi(k) = \tilde{\varphi}(X^m) \cdot \tilde{\varphi}(X^k).$$

Auf der Ebene der Monome respektiert die Abbildung also die Multiplikation. Daraus folgen für zwei Elemente $f = \sum_{m \in M} a_m X^m$ und $g = \sum_{k \in M} b_k X^k$ die Identitäten

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} \left(\left(\sum_{m \in M} a_m X^m \right) \left(\sum_{k \in M} b_k X^k \right) \right) &= \tilde{\varphi} \left(\sum_{\ell \in M} \left(\sum_{m+k=\ell} a_m b_k \right) X^\ell \right) \\ &= \sum_{\ell \in M} \left(\sum_{m+k=\ell} a_m b_k \right) \varphi(\ell) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m,k \in M} a_m b_k \varphi(m) \varphi(k) \\
&= \left(\sum_{m \in M} a_m \varphi(m) \right) \left(\sum_{k \in M} b_k \varphi(k) \right) \\
&= \tilde{\varphi} \left(\sum_{m \in M} a_m X^m \right) \tilde{\varphi} \left(\sum_{k \in M} b_k X^k \right),
\end{aligned}$$

so dass die Abbildung ein Ringhomomorphismus ist. \square

Korollar 17.6. *Sei R ein kommutativer Ring. Seien M und N kommutative Monoide und sei $\varphi : M \rightarrow N$ ein Monoidhomomorphismus. Dann induziert dies einen R -Algebra-Homomorphismus zwischen den zugehörigen Monoidringen*

$$\tilde{\varphi} : R[M] \rightarrow R[N] \text{ durch } X^m \mapsto X^{\varphi(m)}.$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 17.5 angewandt auf die R -Algebra $B = R[N]$ und den zusammengesetzten Monoidhomomorphismus $M \xrightarrow{\varphi} N \rightarrow R[N]$. \square

Bemerkung 17.7. Eine Familie von Elementen $m_i \in M$, $i \in I$, in einem Monoid M ergibt einen Monoidhomomorphismus $\mathbb{N}^{(I)} \rightarrow M$, indem das i -te Basiselement e_i auf m_i geschickt wird. Dies ist insbesondere für endliche Indexmengen $I = \{1, \dots, n\}$ relevant. Der Monoidhomomorphismus induziert dann nach Korollar 17.6 einen R -Algebra-Homomorphismus $R[\mathbb{N}^n] = R[X_1, \dots, X_n] \rightarrow R[M]$ von der Polynomialgebra in den Monoidring. Diese Abbildung ist der Einsetzungshomomorphismus, der durch $X_i \mapsto X^{m_i}$ gegeben ist.

Definition 17.8. Zu einem kommutativen Monoid M und einem kommutativen Ring R nennt man einen Monoidhomomorphismus

$$M \longrightarrow (R, \cdot, 1)$$

auch einen R -wertigen Punkt von M .

Bemerkung 17.9. Ein R -wertiger Punkt ist äquivalent zu einem R -Algebra-Homomorphismus von $R[M]$ nach R . Diese Sprechweise ist insbesondere im Fall eines Grundkörpers K üblich. Dann haben wir also

$$\begin{aligned}
K\text{-Spek}(K[M]) &= \text{Hom}_K^{\text{alg}}(K[M], K) \\
&= \text{Mor}_{\text{mon}}(M, K) \\
&= \{K\text{-wertige Punkte von } M\}.
\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass hier das K -Spektrum bereits auf der Ebene des Monoids eine einfache Beschreibung besitzt, die rein multiplikativ ist. Das impliziert, wie wir sehen werden, dass es für die K -Spektren der Monoidringe im Allgemeinen eine viel übersichtlichere Beschreibung gibt als sonst. Man beachte allerdings, dass zur Definition der Zariski-Topologie und der Garbe der algebraischen Funktionen der Monoidring unverzichtbar ist.

Lemma 17.10. *Sei R ein von null verschiedener kommutativer Ring. Seien M und N kommutative Monoide und sei $\varphi: M \rightarrow N$ ein Monoidhomomorphismus. Dann ist φ genau dann injektiv (surjektiv), wenn der zugehörige R -Algebra-Homomorphismus $\tilde{\varphi}: R[M] \rightarrow R[N]$ injektiv (surjektiv) ist.*

Beweis. Sei φ injektiv, und angenommen, dass

$$\tilde{\varphi}\left(\sum_{m \in M} a_m X^m\right) = \sum_{m \in M} a_m X^{\varphi(m)} = 0.$$

Da die $\varphi(m)$, $m \in M$, alle verschieden sind, folgt daraus $a_m = 0$. Ist umgekehrt φ nicht injektiv, sagen wir $\varphi(m) = \varphi(k)$, $m \neq k$, so ist auch $\tilde{\varphi}(X^m) = \tilde{\varphi}(X^k)$, obwohl $X^m \neq X^k$ ist.

Ist φ surjektiv, so kann man für ein beliebiges Element $\sum_{n \in N} a_n X^n$ aus $R[N]$ sofort ein Urbild angeben, nämlich $\sum_{n \in N} a_n X^{m_n}$, wobei m_n ein beliebiges Urbild von n sei. Ist hingegen φ nicht surjektiv, so sei $n \in N$ ein Element, das nicht zum Bild gehört. Dann ist das Monom X^n von null verschieden und kann nicht im Bild des Algebra-Homomorphismus liegen. \square

Korollar 17.11. *Sei R ein von null verschiedener kommutativer Ring. Sei M ein kommutatives Monoid und $m_i \in M$, $i \in I$, eine Familie von Elementen aus M . Dann bilden die m_i genau dann ein Monoid-Erzeugendensystem für M , wenn die X^{m_i} , $i \in I$, ein R -Algebra-Erzeugendensystem für den Monoidring $R[M]$ bilden.*

Beweis. Die m_i , $i \in I$, bilden genau dann ein Monoid-Erzeugendensystem für M , wenn der Monoidhomomorphismus $\mathbb{N}^{(I)} \rightarrow M$ surjektiv ist. Dies ist nach Lemma 17.10 genau dann der Fall, wenn der zugehörige Homomorphismus

$$R[X_i, i \in I] \longrightarrow R[M], X_i \longmapsto X^{m_i},$$

surjektiv ist. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn die X^{m_i} ein R -Algebra-Erzeugendensystem bilden. \square

Korollar 17.12. *Sei R ein kommutativer Ring und S eine R -Algebra. Es sei M ein kommutatives Monoid. Dann gibt es einen natürlichen R -Algebra-Homomorphismus*

$$R[M] \longrightarrow S[M], \sum_{m \in M} a_m X^m \longmapsto \sum_{m \in M} a_m X^m,$$

(die Koeffizienten aus R werden also einfach in S aufgefasst).

Beweis. Dies folgt aus Satz 17.5, angewandt auf die R -Algebra $S[M]$ und den Monoidhomomorphismus $M \rightarrow S[M]$. \square

Differenzengruppe zu einem Monoid

Wir interessieren uns nun für die Frage, wann ein Monoidring ein Integritätsbereich ist (was nur bei integrem Grundring sein kann) und wie man dann den Quotientenkörper beschreiben kann. Da im Quotientenkörper jedes von null verschiedene Element invertierbar sein muss, gilt das insbesondere für die Monome T^m , $m \in M$, und es liegt nahe, nach einer additiven Gruppe zu suchen, die M umfasst.

Definition 17.13. Sei M ein kommutatives Monoid. Dann nennt man die Menge der *formalen Differenzen*

$$\Gamma(M) = \{m - n : m, n \in M\}$$

mit der Addition

$$m_1 - n_1 + m_2 - n_2 := (m_1 + m_2) - (n_1 + n_2)$$

und der Identifikation

$$m_1 - n_1 = m_2 - n_2 \text{ falls es } m \in M \text{ gibt mit } m + m_1 + n_2 = m + m_2 + n_1.$$

die *Differenzengruppe* zu M .

Wir überlassen es dem Leser als Aufgabe, zu zeigen, dass die Differenzengruppe wirklich eine Gruppe ist. Die vorstehende Konstruktion ist natürlich der Konstruktion von Quotientenkörpern bzw. Quotientenringen nachempfunden, man muss nur die multiplikative Schreibweise dort additiv umdeuten. Die Konstruktion der Differenzengruppe ist eigentlich elementarer. Die Differenzengruppe zum additiven Monoid \mathbb{N} ist natürlich \mathbb{Z} . Die Elemente in einem Monoid kann man direkt im Differenzenmonoid auffassen, und zwar durch den Monoidhomomorphismus

$$M \longrightarrow \Gamma(M), m \longmapsto m - 0,$$

wobei wir statt $m - 0$ einfach m schreiben. Völlig unproblematisch ist dieser Übergang aber doch nicht, da diese Abbildung im Allgemeinen nicht injektiv sein muss. Das hat damit zu tun, dass in der obigen Definition bei der Identifizierung links und rechts ein m auftreten darf (und das lässt sich auch nicht vermeiden). Natürlich will man auch diejenigen Monoide charakterisieren, für die man dieses Extra- m nicht braucht.

Definition 17.14. Man sagt, dass in einem kommutativen Monoid M die *Kürzungsregel* gilt (oder dass M ein *Monoid mit Kürzungsregel* ist), wenn aus einer Gleichung

$$m + n = m + k \text{ mit } m, n, k \in M,$$

stets folgt, dass $n = k$ ist.

Für ein solches Monoid ist die Abbildung in die Differenzengruppe injektiv, siehe Aufgabe 17.5.

17. ARBEITSBLATT

Aufwärmataufgaben

Aufgabe 17.1. Betrachte den Monoidhomomorphismus

$$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}, e_1 \longmapsto 1, e_2 \longmapsto -1.$$

Beschreibe die zugehörige Abbildung zwischen den Monoidringen (für einen Körper K) und den zugehörigen K -Spektren.

Aufgabe 17.2. Seien $M \subseteq N$ kommutative Monoide. Zeige, dass durch

$$\tilde{M} = \{n \in N \mid \text{es gibt } k \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } kn \in M\}$$

ein Untermonoid von N gegeben ist, das M umfasst.

Aufgabe 17.3. Wir betrachten die kommutativen Monoide $M = \mathbb{N}^r$ und $N = \mathbb{N}^s$. Zeige, dass ein Monoidhomomorphismus von M nach N eindeutig durch eine Matrix (mit r Spalten und s Zeilen) mit Einträgen aus \mathbb{N} bestimmt ist.

Wie sieht die zugehörige Spektrumsabbildung aus?

Aufgabe 17.4. Sei M ein kommutatives Monoid. Zeige, dass die zugehörige Differenzgruppe $\Gamma = \Gamma(M)$ eine kommutative Gruppe ist, und dass sie folgende universelle Eigenschaft besitzt: Zu jedem Monoidhomomorphismus

$$\varphi: M \longrightarrow G$$

in eine Gruppe G gibt es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$\tilde{\varphi}: \Gamma \longrightarrow G,$$

der φ fortsetzt.

Aufgabe 17.5. Sei M ein kommutatives Monoid mit zugehöriger Differenzgruppe $\Gamma = \Gamma(M)$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

- (1) M ist ein Monoid mit Kürzungsregel.
- (2) Die kanonische Abbildung $M \rightarrow \Gamma(M)$ ist injektiv.
- (3) M lässt sich realisieren als Untermonoid einer Gruppe.

Aufgabe 17.6. Sei R ein kommutativer Ring. Beweise die R -Algebra-Isomorphie

$$R[\mathbb{Z}^n] \cong R[X_1, \dots, X_n]_{X_1 \cdots X_n}$$

mit Hilfe der universellen Eigenschaften von Monoidringen und Nenneraufnahmen.

Aufgabe 17.7. Seien M, N endlich erzeugte kommutative Monoide mit den K -Spektren $K - \text{Spek}(K[M]) = \text{Mor}_{\text{mon}}(M, K)$ und $K - \text{Spek}(K[N]) = \text{Mor}_{\text{mon}}(N, K)$. Zeige, dass man für einen Monoidhomomorphismus $\varphi: M \rightarrow N$ die zugehörige Spektrumsabbildung auf zwei verschiedene Weisen definieren kann, die aber inhaltlich übereinstimmen.

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Definition.

Ein *Filter* F in einem kommutativen Monoid M ist ein Untermonoid, das zusätzlich *teilerstabil* ist. D.h. falls $f \in F$ ist und $g|f$ gilt, so ist auch $g \in F$.

Aufgabe 17.8. Sei M ein kommutatives Monoid. Zeige, dass es in M einen kleinsten Filter gibt und dass dieser eine Gruppe bildet.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.9. (6 Punkte)

Seien $M \subseteq N$ endlich erzeugte kommutative Monoide. Zeige, dass für einen Körper K der Ringhomomorphismus $K[M] \subseteq K[N]$ genau dann endlich ist, wenn es zu jedem $n \in N$ ein $k \in \mathbb{N}_+$ gibt mit $kn \in M$.

Aufgabe 17.10. (4 Punkte)

Sei $M = (\mathbb{Q}, +)$ die additive Gruppe der rationalen Zahlen. Bestimme $\mathbb{Q} - \text{Spec}(\mathbb{Q}[M])$. Wie sieht es aus, wenn man \mathbb{Q} durch \mathbb{R} ersetzt?

Aufgabe 17.11. (4 Punkte)

Es sei $\varphi: M \rightarrow N$ ein Homomorphismus von kommutativen Monoiden. Zeige, dass die Menge aller Punkte aus $K - \text{Spek} K[N]$, die unter der Spektrumsabbildung auf den Einspunkt $1 \in K - \text{Spek}(K[M])$ (das ist der Punkt, der der konstanten Abbildung $M \mapsto 1$ entspricht) abgebildet werden, selbst die Struktur eines K -Spektrums eines geeigneten Monoids besitzt.

Aufgabe 17.12. (4 Punkte)

Wir betrachten Monoide der Form $M = (\mathbb{Z}/(m), +)$. Beschreibe K -Spek $(K[M])$ allgemein sowie für die Körper $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/(5)$. Finde die idempotenten Elemente von $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/(3)]$.

Aufgabe 17.13. (4 Punkte)

Sei M ein kommutatives Monoid. Definiere eine Bijektion zwischen den folgenden Objekten.

- (1) Filter in M .
- (2) $\text{Mor}_{\text{mon}}(M, (\{0, 1\}, 1, \cdot))$.
- (3) \mathbb{F}_2 -Spek (M)
- (4) $\{\varphi \in K\text{-Spek}(K[M]) \mid \varphi(M) \subseteq \{0, 1\}\}$. (Dabei ist K ein Körper.)

Aufgabe 17.14. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und G eine Gruppe. Dann können wir den Monoidring $K[G]$ betrachten. Sei nun weiter M ein $K[G]$ -Modul. Zeige, dass

- (1) M nichts anderes ist als ein K -Vektorraum V zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_K(V)$.
- (2) ein $K[G]$ -Modulhomomorphismus $\varphi : M \rightarrow M$ eine K -lineare Abbildung ist, für die zusätzlich $\varphi \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \varphi$ für alle $g \in G$ gilt.

Bemerkung: ρ heißt dann eine *Darstellung* von G . Solche Darstellungen sind oft einfacher zu handhaben als G und man kann mit Hilfe von ρ oft hilfreiche Erkenntnisse über G selbst gewinnen.

18. VORLESUNG - MONOMIALE KURVEN

Wir spezialisieren nun die Theorie der Monoidringe auf den eindimensionalen Fall und gelangen zu denjenigen Ringen, die monomiale Kurven beschreiben.

Definition 18.1. Eine *monomiale Kurve* ist das Bild der affinen Geraden \mathbb{A}_K^1 unter einer Abbildung der Form

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^n, t \longmapsto (t^{e_1}, \dots, t^{e_n}),$$

mit $e_i \geq 1$ für alle i .

Wir werden gleich sehen, dass das Bild einer solchen monomialen Abbildung Zariski-abgeschlossen ist, d.h., dass eine monomiale Kurve wirklich eine algebraische Kurve ist. Eine monomiale Kurve ist insbesondere eine parametrisierte und damit eine rationale Kurve. Manchmal bezeichnet man auch die Abbildung selbst als monomiale Kurve. Häufig beschränkt man sich auf den

Fall, wo die Exponenten e_i insgesamt teilerfremd sind. Dies ist keine wesentliche Einschränkung, da man andernfalls stets schreiben kann $e_i = mf_i$ mit dem gemeinsamen Teiler m und teilerfremden Zahlen f_i . Dann kann man die Gesamtabbildung auffassen als Hintereinanderschaltung

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^n \text{ mit } t \longmapsto t^m = s \text{ und } s \longmapsto (s_1^{f_1}, \dots, s_n^{f_n}),$$

wobei vorne ein einfaches Potenzieren und hinten eine monomiale Kurvenabbildung mit teilerfremden Exponenten vorliegt.

Bemerkung 18.2. Eine monomiale Abbildung $t \mapsto (t_1^{e_1}, \dots, t_n^{e_n})$ ist nichts anderes als die zum Monoidmorphismus $\mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$, die den i -ten Basisvektor auf e_i schickt, gehörende Abbildung der zugehörigen K -Spektren. Diese Monoidabbildung faktorisiert

$$\mathbb{N}^n \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{N},$$

wobei M das von den e_i erzeugte Untermonoid der natürlichen Zahlen ist. Ein solches Untermonoid heißt *numerisches Monoid*. Die erste Abbildung ist dabei eine Surjektion. Es liegen also insgesamt Ringhomomorphismen

$$K[\mathbb{N}^n] = K[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow K[M] \longrightarrow K[\mathbb{N}] = K[T]$$

und geometrisch die Spektrumsabbildungen

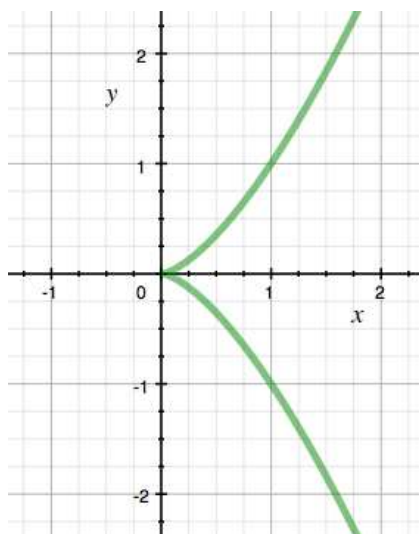
$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow K\text{-Spek}(K[M]) \subseteq \mathbb{A}_K^n$$

vor. Das Bild der affinen Geraden liegt also im K -Spektrum des Monoidringes $K[M]$. Wir werden weiter unten sehen, dass die Abbildung $\mathbb{A}_K^1 \rightarrow K\text{-Spek}(K[M])$ stets surjektiv ist und im Fall, dass die Exponenten e_i teilerfremd sind, auch injektiv.

Beispiel 18.3. Die *Neilsche Parabel* C ist das Bild unter der monomialen Abbildung

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2, t \longmapsto (t^2, t^3) = (x, y).$$

Die zugehörige Gleichung ist $y^2 = x^3$, d.h. es ist $C = V(Y^2 - X^3)$.



Das Besondere an monomialen Kurven ist, dass sie zwar allein durch das Exponententupel (e_1, \dots, e_n) bzw. das davon erzeugte numerische Monoid gegeben sind, also durch einen sehr kleinen Betrag an (kombinatorischer) Information, aber zugleich ein reichhaltiges Beispielmateriale an algebraischen Kurven liefern (dies gilt allgemein für Monoidringe und die dadurch definierten algebraischen Varietäten).

Lemma 18.4. *Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid, das von teilerfremden natürlichen Zahlen e_1, \dots, e_n erzeugt sei. Dann gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Darstellung*

$$m = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \text{ mit } 0 \leq a_i < e_{i+1} \text{ für } 1 \leq i \leq n-1.$$

Für m hinreichend groß kann man zusätzlich noch $a_n \geq 0$ erreichen, so dass es dann eine Darstellung mit nichtnegativen Koeffizienten gibt.

Beweis. Wegen der Teilerfremdheit gibt es natürlich eine Darstellung

$$m = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$$

mit ganzzahligen Koeffizienten b_i . Wir werden sie schrittweise auf die gewünschte Gestalt bringen. Wir schreiben $b_1 = c_1 e_2 + a_1$ mit $0 \leq a_1 < e_2$ (Division mit Rest). Dies setzt man in die Gleichung für m ein und schlägt den Term $c_1 e_2 e_1$ zu $b_2 e_2$ dazu. Ebenso bringt man den (neuen) zweiten Koeffizienten auf die gewünschte Form, in dem man ihn mit dem dritten Erzeuger verarbeitet. So kann man alle ersten $n-1$ Koeffizienten auf die gewünschte Gestalt bringen.

Sei die Darstellung nun in der gewünschten Form. Dann ist die Summe der ersten $n-1$ Summanden beschränkt. Wenn m größer als diese Schranke ist, so muss der letzte Summand und damit auch der letzte Koeffizient nichtnegativ sein. \square

Zu einem von teilerfremden Elementen erzeugten Untermonoid gehören also ab einer gewissen Stelle alle natürlichen Zahlen. Diese bekommt sogar einen eigenen Namen.

Definition 18.5. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein durch teilerfremde Erzeuger definiertes numerisches Monoid. Dann nennt man die minimale Zahl f mit $\mathbb{N}_{\geq f} \subseteq M$ die *Führungszahl* von M .

Wir geben noch einige weitere Definitionen von numerischen Invarianten von monomialen Kurven, die man diskret, also auf der Ebene des numerischen Monoids berechnen kann. Wir werden später sehen, dass diese Invarianten allgemeiner für beliebige algebraische Kurven definiert werden können, dort aber im allgemeinen schwieriger zu berechnen sind.

Definition 18.6. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein durch teilerfremde Erzeuger definiertes numerisches Monoid. Dann nennt man die Anzahl der Lücken, d.h. der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} - M$, den *Singularitätsgrad* von M , geschrieben $\delta(M)$.

Definition 18.7. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid mit teilerfremden Erzeugern. Dann nennt man die minimale Anzahl von Elementen in einem Erzeugendensystem für M die *Einbettungsdimension* von M .

Definition 18.8. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein durch teilerfremde Erzeuger definiertes numerisches Monoid. Dann nennt man das minimale positive Element $e \in M$, $e \geq 1$, die *Multiplizität* von M , geschrieben $e(M)$.

Beispiel 18.9. Wir betrachten das durch 5, 8 und 11 erzeugte numerische Monoid M . M besteht also aus allen Summen $5a_1 + 8a_2 + 11a_3$ mit nichtnegativen Koeffizienten a_1, a_2, a_3 . Es lässt sich einfach überlegen, dass M die folgenden Elemente enthält:

$$0, 5, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, \dots$$

Da es insbesondere fünf Zahlen hintereinander enthält (von 18 bis 22), muss jede weitere Zahl auch dazu gehören, da man ja einfach $5 \in M$ dazuaddieren kann. Damit ist die Führungszahl 18, die Multiplizität ist 5, der Singularitätsgrad ist 10 und die Einbettungsdimension ist 3.

Satz 18.10. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein durch teilerfremde natürliche Zahlen e_1, \dots, e_n erzeugtes Untermonoid. Dann ist die monomiale Abbildung

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow K\text{-Spek}(K[M])$$

eine Bijektion.

Beweis. Die Abbildung kann man auffassen als die natürliche Abbildung

$$\mathbb{A}_K^1 = \text{Mor}_{\text{mon}}(\mathbb{N}, K) \longrightarrow \text{Mor}_{\text{mon}}(M, K),$$

die durch die Inklusion von Monoiden $M \subseteq \mathbb{N}$ induziert ist. Zur Injektivität seien $a, b \in K$ gegeben und sei angenommen, dass für alle $m \in M$ gilt: $a^m = b^m$. Bei $b = 0$ folgt sofort $a = 0$, sei also $b \neq 0$. Dann gilt $\left(\frac{a}{b}\right)^m = 1$ für

alle $m \in M$. Da es für M ein teilerfremdes Erzeugendensystem gibt, gehören nach Lemma 18.4 ab einem gewissen f alle natürlichen Zahlen zu M . Es ist also insbesondere $a^m = b^m$ für alle $m \geq f$. Daraus folgt aber $\frac{a}{b} = 1$ (und $a = b$): seien nämlich m und $k \geq f$ und teilerfremd, und sei $s^m = s^k = 1$. Wegen der Teilerfremdheit gibt es (nach dem Lemma von Bezout) ganze Zahlen p, q mit $pk + qm = 1$. Dann ist

$$s = s^{pk+qm} = (s^k)^p \cdot (s^m)^q = 1.$$

Zur Surjektivität. Es sei ein Monoidmorphismus $\varphi: M \rightarrow K$ gegeben, und wir müssen ihn zu einem Monoidmorphismus auf ganz \mathbb{N} fortsetzen. Es sei $\varphi(e_i) = a_i \in K$. Zwischen diesen Werten gilt die Beziehung

$$a_j^{e_i} = \varphi(e_j)^{e_i} = \varphi(e_i e_j) = \varphi(e_i)^{e_j} = a_i^{e_j}.$$

Wenn eines der $a_i = 0$ ist, so müssen alle $= 0$ sein und die Nullabbildung ist eine Fortsetzung. Wir können also annehmen, dass alle a_i Einheiten sind. Wegen der Teilerfremdheit der e_i gibt es eine Darstellung der Eins, d.h. es gibt ganze Zahlen m_1, \dots, m_n mit $m_1 e_1 + \dots + m_n e_n = 1$. Wir behaupten, dass durch $1 \mapsto a = a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n}$ eine Fortsetzung auf \mathbb{N} gegeben ist. Dazu müssen wir zeigen, dass der durch $1 \mapsto a$ (also $k \mapsto a^k$) definierte Monoidmorphismus mit φ übereinstimmt, was man nur für die e_i überprüfen muss. Betrachten wir also e_1 . Dann ist

$$\begin{aligned} a^{e_1} &= (a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n})^{e_1} \\ &= a_1^{e_1 m_1} \cdot a_2^{e_1 m_2} \dots a_n^{e_1 m_n} \\ &= a_1^{1 - \sum_{i=2}^n m_i e_i} (a_2^{e_1 m_2} \dots a_n^{e_1 m_n}) \\ &= a_1 \cdot (a_1^{-m_2 e_2} a_2^{e_1 m_2}) \dots (a_1^{-m_n e_n} a_n^{e_1 m_n}) \\ &= a_1 \cdot (a_1^{-e_2} a_2^{e_1})^{m_2} \dots (a_1^{-e_n} a_n^{e_1})^{m_n} \\ &= a_1, \end{aligned}$$

da die Faktoren rechts in der vorletzten Zeile alle 1 nach der Vorüberlegung (oberes Display) sind. \square

Bemerkung 18.11. Den vorstehenden Satz kann man auch über die universelle Eigenschaft der Differenzgruppe beweisen. Wir skizzieren dies kurz für die Surjektivität. Die Differenzgruppe eines numerischen Monoids mit teilerfremden Erzeugern ist \mathbb{Z} . Der Fall, dass ein Erzeuger auf null geht, wird wie im Beweis abgehandelt. Dann kann man davon ausgehen, dass ein Monoidhomomorphismus $\varphi: M \rightarrow K^\times$ in die Einheitengruppe des Körpers vorliegt. Dann gibt es nach der universellen Eigenschaft der Monoidringe eine (eindeutig bestimmte) Fortsetzung $\tilde{\varphi}: \mathbb{Z} \rightarrow K^\times$, die das Urbild liefert.

Die folgenden beiden Aussagen zeigen, dass es für ein numerisches Monoid ein kanonisches Erzeugendensystem gibt und dass damit die Einbettungsdimension eine neue Interpretation erhält, die sich später auf beliebige noethersche lokale Ringe übertragen lässt (ein Monoidring ist natürlich nicht lokal, wohl aber die Lokalisierung an der Singularität eines numerischen Monoids).

Lemma 18.12. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid mit teilerfremden Erzeugern, und es sei $M_+ = \{m \in M \mid m \geq 1\}$ und $M_+ + M_+ = \{m + m' \mid m, m' \in M_+\}$. Dann ist

$$M_+ \setminus (M_+ + M_+)$$

ein Erzeugendensystem für M , und jedes andere Erzeugendensystem enthält dieses.

Beweis. Ein Element $m \in M_+ \setminus (M_+ + M_+)$ lässt sich nicht als Summe von anderen Elementen darstellen, daher gehören sie zu jedem Erzeugendensystem. Umgekehrt ist es aber schon ein Erzeugendensystem. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es ein minimales Element $x \in M$, das nicht von diesen Elementen erzeugt würde. Insbesondere gehört dann x nicht zu diesen Elementen und daher ist $x = x_1 + x_2$ mit $x_1, x_2 \in M_+ + M_+$. Diese beiden Summanden sind aber kleiner als x und deshalb gibt es für sie eine Summendarstellung aus diesen Elementen, was sofort ein Widerspruch ist. \square

Korollar 18.13. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid mit teilerfremden Erzeugern, und es sei $M_+ = \{m \in M \mid m \geq 1\}$ und $M_+ + M_+ = \{m + m' \mid m, m' \in M_+\}$. Dann ist die Einbettungsdimension von M gleich der Anzahl von $M_+ \setminus (M_+ + M_+)$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 18.12. \square

18. ARBEITSBLATT

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 18.1.*

Ein Geldfälscher stellt 7–, 11–, 13– und 37–Euro-Scheine her. Wie viele volle Eurobeträge kann er mit seinen Scheinen nicht bezahlen, und was ist der größte Betrag, den er nicht begleichen kann? Bestimme die Multiplizität und die Einbettungsdimension des zugehörigen numerischen Monoids.

Aufgabe 18.2.*

Bestimme für das numerische Monoid $M \subseteq \mathbb{N}$, das durch 4, 7 und 17 erzeugt wird, die Einbettungsdimension, die Multiplizität, die Führungszahl und den Singularitätsgrad.

Aufgabe 18.3. Bestimme für das numerische Monoid M , das durch 5, 7 und 9 erzeugt wird, die Einbettungsdimension, die Multiplizität, die Führungszahl und den Singularitätsgrad.

Aufgabe 18.4. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid, das von teilerfremden natürlichen Zahlen erzeugt sei. Zeige, dass die Einbettungsdimension maximal gleich der Multiplizität ist.

Aufgabe 18.5. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein durch teilerfremde Zahlen erzeugtes numerisches Monoid, bei dem die Einbettungsdimension gleich der Multiplizität ist. Zeige, dass dann der maximale Erzeuger aus einem minimalen Erzeugendensystem größer oder gleich der Führungszahl ist.

Aufgabe 18.6. Man gebe ein Beispiel eines numerischen Monoids M mit Multiplizität 3 und Einbettungsdimension 3 an, bei dem die Führungszahl prim ist und nicht zum minimalen Erzeugendensystem gehört.

Aufgabe 18.7. Sei M ein numerisches Monoid. Bestimme die Filter in M .

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 18.8. (6 Punkte)

Es sei M ein numerisches Monoid, das durch zwei teilerfremde Elemente $d > e$ erzeugt werde. Bestimme die Einbettungsdimension, die Multiplizität, die Führungszahl und den Singularitätsgrad von M .

Aufgabe 18.9. (3 Punkte)

Bestimme für das numerische Monoid M , das durch 3, 7, 9 und 11 erzeugt wird, die Einbettungsdimension, die Multiplizität, die Führungszahl und den Singularitätsgrad.

Aufgabe 18.10. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien M, N numerische Monoide mit $M \subseteq N$. Zeige, dass die zugehörige Spektrumsabbildung surjektiv ist.

Es ist dabei hilfreich, Satz 18.10 zu verwenden.

Aufgabe 18.11. (3 Punkte)

Seien M, N numerische Monoide. Für welche der numerischen Invarianten ν (Multiplizität, Führungszahl, Singularitätsgrad, Einbettungsdimension) folgt aus $M \subseteq N$ die Abschätzung $\nu(M) \geq \nu(N$)?

(Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 18.12. (3 Punkte)

Sei M ein numerisches Monoid, das nicht isomorph zu \mathbb{N} sei, und sei K ein Körper. Zeige, dass es im Monoidring $K[M]$ irreduzible Elemente gibt, die nicht prim sind. Man gebe Elemente aus $K[M]$ mit zwei wesentlich verschiedenen Zerlegungen in irreduzible Elemente an.

19. VORLESUNG - GANZHEIT

Restklassendarstellung für monomiale Kurven

Sei M ein numerisches Monoid, das von den teilerfremden natürlichen Zahlen e_1, \dots, e_n erzeugt werde. Die zugehörige Surjektion $\mathbb{N}^n \rightarrow M \subseteq \mathbb{N}$ führt zu einer Surjektion

$$K[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow K[M], X_i \longmapsto T^{e_i},$$

und einer abgeschlossenen Einbettung $C = K - \text{Spek}(K[M]) \hookrightarrow \mathbb{A}_K^n$. Durch welche Gleichungen lässt sich C beschreiben?

Satz 19.1. *Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein durch teilerfremde Elemente e_1, \dots, e_n erzeugtes Untermonoid und sei $\mathbb{N}^n \rightarrow M$ die zugehörige surjektive Abbildung mit dem zugehörigen Restklassenhomomorphismus $\varphi: K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow K[M]$. Dann wird das Kernideal durch*

$$\ker \varphi = \left(\prod_{i \in I_1} X_i^{r_i} - \prod_{i \in I_2} X_i^{s_i} : I_1, I_2 \subseteq \{1, \dots, n\} \text{ disjunkt}, \sum_{i \in I_1} r_i e_i = \sum_{i \in I_2} s_i e_i \right)$$

(mit $r_i, s_i \geq 1$) beschrieben.

Beweis. Dass die angegebenen Elemente zum Kernideal gehören folgt direkt aus

$$\varphi \left(\prod_{i \in I_1} X_i^{r_i} \right) = \prod_{i \in I_1} (t^{e_i})^{r_i} = t^{\sum_{i \in I_1} r_i e_i}.$$

Für die Umkehrung sei $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ ein Polynom mit $\varphi(F) = 0$. Wir schreiben

$$F = \sum_{\nu} a_{\nu} X^{\nu}$$

(mit $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$). Daher ist

$$\varphi(F) = \sum_{\nu} a_{\nu} t^{\sum_{i=1}^n \nu_i e_i} = \sum_{k=0} \left(\sum_{\nu: \sum_{i=1}^n \nu_i e_i = k} a_{\nu} \right) t^k.$$

Da dieses Polynom gleich 0 ist müssen alle Koeffizienten 0 sein, d.h. zu jedem k gehört auch

$$F_k = \sum_{\nu: \sum_{i=1}^n \nu_i e_i = k} a_{\nu} X^{\nu}$$

zum Kern. Wir können also annehmen, dass in F nur Monome X^ν vorkommen mit gleichem Wert $\sum_{i=1}^n \nu_i e_i = k$. Betrachten wir ein solches Monom aus F , sagen wir X^ν (mit $a_\nu \neq 0$). Es muss in F mindestens noch ein weiteres Monom, sagen wir X^μ , vorkommen, da ein einzelnes Monom nicht auf 0 abgebildet wird. Wir schreiben

$$F = a_\nu(X^\nu - X^\mu) + (F - a_\nu X^\nu + a_\nu X^\mu).$$

Im Summand rechts kommt X^ν nicht mehr vor, und es kommt auch kein neues Monom hinzu. In $X^\nu - X^\mu$ können wir diejenigen Variablen, die beidseitig auftreten, so weit ausklammern, dass sich ein Ausdruck der Form

$$X^\nu - X^\mu = X_1^{b_1} \cdots X_n^{b_n} \left(\prod_{i \in I_1} X_i^{r_i} - \prod_{i \in I_2} X_i^{s_i} \right)$$

mit disjunkten I_1 und I_2 und mit $\sum_{i \in I_1} e_i r_i = \sum_{i \in I_2} e_i s_i$ ergibt. Der linke Summand in obiger Beschreibung von F gehört also zu dem von den angegebenen Binomen erzeugten Ideal und wir können mit dem rechten Summand, in dem ein Monom weniger vorkommt, fortfahren. \square

Die einfachsten Gleichungen sind von der Bauart ($i \neq j$)

$$X_i^{e_j / \text{ggT}(e_i, e_j)} - X_j^{e_i / \text{ggT}(e_i, e_j)}.$$

Im Fall von ebenen monomialen Kurven ist das auch die einzige Gleichung.

Korollar 19.2. *Sei C die durch $t \mapsto (t^{e_1}, t^{e_2}) = (x, y)$ (mit e_1, e_2 teilerfremd) gegebene monomiale ebene Kurve. Dann ist*

$$C = V(X^{e_2} - Y^{e_1}).$$

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz 19.1. \square

Bei monomialen Raumkurven lassen sich die beschreibenden Gleichungen auch noch einigermaßen einfach bestimmen, da man immer eine Variable isolieren kann.

Beispiel 19.3. Sei C die durch

$$t \mapsto (t^3, t^4, t^5) = (x, y, z)$$

gegebene monomiale Kurve. Für jede der drei Variablen müssen wir schauen, welche Potenzen davon, wenn man die t -Potenz substituiert, sich auch als Monom in den beiden anderen Variablen ausdrücken lassen.

Zunächst haben wir die Beziehungen, in denen jeweils nur zwei Variablen vorkommen. Das sind

$$Y^3 - X^4, Z^3 - X^5, Z^4 - Y^5.$$

Hier kann es, wie im ebenen Fall, immer nur eine Beziehung geben.

In den Relationen, wo alle drei Variablen beteiligt sind, kommt eine der Variablen allein vor. Starten wir mit X . Zunächst lassen sich X und X^2 nicht durch

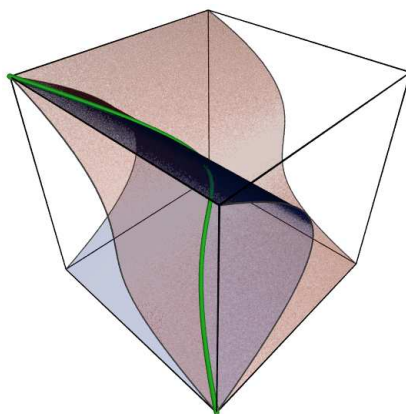
die anderen Variablen ausdrücken, dafür haben wir $X^3 = T^9 = YZ$. Eine andere Kombination ist nicht möglich. Grundsätzlich impliziert eine mehrfache Darstellung $X^k = Y^i Z^j = Y^a Z^b$, dass man zwischen Potenzen von Y und von Z eine Beziehung hat, da man ja die kleineren Potenzen rauskürzen kann. Da wir alle Relationen mit nur zwei Variablen schon aufgelistet haben, liefert eine Potenz von X immer nur maximal eine neue Relation. Wir behaupten, dass wir für X alleinstehend schon fertig sind. Ist nämlich $X^k = Y^i Z^j$, so ist $k \geq 3$. Bei $i = 0$ oder $j = 0$ haben wir die Gleichungen schon aufgelistet. Sei also $i, j \geq 1$. Dann kann man aber mittels der Gleichung $X^3 = YZ$ die Exponenten in der Gleichung kleiner machen (indem man den Exponenten von X um 3 reduziert und die Exponenten von Y und von Z um 1).

Für Y hat man sofort die Gleichung $Y^2 = ZX$, mit der man wieder alle anderen Gleichungen reduzieren kann.

Für Z hat man $Z^2 = X^2 Y$ und $Z^3 = XY^3$. Es gibt keine kleineren Monome in X und Y , die man als Potenz von Z ausdrücken kann. Daher kann man jede andere Relation mittels einer von diesen auf eine frühere zurückführen.

Insgesamt haben wir also für die Kurve C die Gleichungen

$$C = V(Y^3 - X^4, Z^3 - X^5, Z^4 - Y^5, X^3 - YZ, Y^2 - XZ, Z^2 - X^2 Y, Z^3 - XY^3)$$



Beispiel 19.4. Sei $C \subset \mathbb{A}_K^3$ die „gedrehte Kubik“, also das Bild der monomialen Abbildung, die durch $t \mapsto (t, t^2, t^3)$ gegeben ist. Diese Kurve ist isomorph zu einer affinen Geraden und insbesondere glatt. Das beschreibende Ideal ist nach Satz 19.1 gleich

$$\mathfrak{a} = (Y - X^2, Z - X^3, Y^3 - Z^2, Z - XY) = (Y - X^2, Z - X^3).$$

Die zwei letzten Idealerzeuger sind dabei überflüssig, da sie sich durch die beiden anderen ausdrücken lassen. Insgesamt ist also

$$C = V(Y - X^2, Z - X^3).$$

Die Bilder von C unter den drei verschiedenen Projektionen sind

$$C_1 = V(Z^2 - Y^3), C_2 = V(Z - X^3), C_3 = V(Y - X^2).$$

Dabei sind C_2 und C_3 isomorph zur affinen Geraden (als Graph einer Abbildung), während C_1 die singuläre Neilsche Parabel ist.

Ganzheit

Der Koordinatenring zur Neilschen Parabel ist

$$R = K[t^2, t^3, t^4, \dots] \subseteq S = K[t].$$

Das Element t gehört nicht zu R , allerdings gehört das Quadrat t^2 dazu. Man sagt, dass t eine Ganzheitsgleichung über dem Unterring R erfüllt.

Definition 19.5. Seien R und S kommutative Ringe und $R \subseteq S$ eine Ringweiterung. Für ein Element $x \in S$ heißt eine Gleichung der Form

$$x^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \dots + r_1x + r_0 = 0,$$

wobei die Koeffizienten r_i , $i = 0, \dots, n-1$, zu R gehören, eine *Ganzheitsgleichung* für x .

Definition 19.6. Seien R und S kommutative Ringe und $R \subseteq S$ eine Ringweiterung. Ein Element $x \in S$ heißt *ganz*, wenn x eine Ganzheitsgleichung mit Koeffizienten aus R erfüllt.

Definition 19.7. Seien R und S kommutative Ringe und $R \subseteq S$ eine Ringweiterung. Dann nennt man die Menge der Elemente $x \in S$, die ganz über R sind, den *ganzen Abschluss* von R in S .

Definition 19.8. Seien R und S kommutative Ringe und $R \subseteq S$ eine Ringweiterung. Dann heißt S *ganz* über R , wenn jedes Element $x \in S$ ganz über R ist.

S ist genau dann ganz über R , wenn der ganze Abschluss von R in S gleich S ist.

Lemma 19.9. Seien R und S kommutative Ringe und $R \subseteq S$ eine Ringweiterung. Für ein Element $x \in S$ sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1) x ist ganz über R .
- (2) Es gibt eine R -Unteralgebra T von S mit $x \in T$ und die ein endlicher R -Modul ist.
- (3) Es gibt einen endlichen R -Untermodul M von S , der einen Nichtnullteiler aus S enthält, mit $xM \subseteq M$.

Beweis. (1) \Rightarrow (2). Wir betrachten die von den Potenzen von x erzeugte R -Unteralgebra $R[x]$ von S , die aus allen polynomialen Ausdrücken in x mit Koeffizienten aus R besteht. Aus einer Ganzheitsgleichung

$$x^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \dots + r_1x + r_0 = 0$$

ergibt sich

$$x^n = -r_{n-1}x^{n-1} - r_{n-2}x^{n-2} - \dots - r_1x - r_0.$$

Man kann also x^n durch einen polynomialen Ausdruck von einem kleineren Grad ausdrücken. Durch Multiplikation dieser letzten Gleichung mit x^i kann man jede Potenz von x mit einem Exponenten $\geq n$ durch einen polynomialen Ausdruck von einem kleineren Grad ersetzen. Insgesamt kann man dann aber all diese Potenzen durch polynomiale Ausdrücke vom Grad $\leq n-1$ ersetzen. Damit ist

$$R[x] = R + Rx + Rx^2 + \dots + Rx^{n-2} + Rx^{n-1}$$

und die Potenzen $x^0 = 1, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}$ bilden ein endliches Erzeugendensystem von $T = R[x]$.

(2) \Rightarrow (3). Sei $x \in T \subseteq S$, T eine R -Unteralgebra, die als R -Modul endlich erzeugt sei. Dann ist $xT \subseteq T$, und T enthält den Nichtnullteiler 1.

(3) \Rightarrow (1). Sei $M \subseteq S$ ein endlich erzeugter R -Untermodule mit $xM \subseteq M$. Seien y_1, \dots, y_n erzeugende Elemente von M . Dann ist insbesondere xy_i für jedes i eine R -Linearkombination der y_j , $j = 1, \dots, n$. Dies bedeutet

$$xy_i = \sum_{j=1}^n r_{ij}y_j$$

mit $r_{ij} \in R$ oder als Matrix geschrieben

$$x \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdot & \cdot & r_{1,n} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \cdot & \cdot & r_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n,1} & r_{n,2} & \cdot & \cdot & r_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Dies schreiben wir als

$$0 = \begin{pmatrix} x - r_{1,1} & -r_{1,2} & \cdot & \cdot & -r_{1,n} \\ -r_{2,1} & x - r_{2,2} & \cdot & \cdot & -r_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -r_{n,1} & -r_{n,2} & \cdot & \cdot & x - r_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Nennen wir diese Matrix A (die Einträge sind aus S), und sei A^{adj} die adjungierte Matrix. Dann gilt $A^{adj}Ay = 0$ (y bezeichne den Vektor (y_1, \dots, y_n)) und nach der Cramerschen Regel ist $A^{adj}A = (\det A)E_n$, also gilt $((\det A)E_n)y = 0$. Es ist also $(\det A)y_j = 0$ für alle j und damit $(\det A)z = 0$ für alle $z \in M$. Da M nach Voraussetzung einen Nichtnullteiler enthält, muss $\det A = 0$ sein. Die Determinante ist aber ein normierter polynomialer Ausdruck in x vom Grad n , sodass eine Ganzheitsgleichung vorliegt. \square

Korollar 19.10. *Seien R und S kommutative Ringe und $R \subseteq S$ eine Ringweiterung. Dann ist der ganze Abschluss von R in S eine R -Unteralgebra von S .*

Beweis. Die Ganzheitsgleichungen $X - r$, $r \in R$, zeigen, dass jedes Element aus R ganz über R ist. Seien $x_1 \in S$ und $x_2 \in S$ ganz über R . Nach der Charakterisierung der Ganzheit gibt es endliche R -Unteralgebren $T_1, T_2 \subseteq S$ mit $x_1 \in T_1$ und $x_2 \in T_2$. Sei y_1, \dots, y_n ein R -Erzeugendensystem von T_1 und z_1, \dots, z_m ein R -Erzeugendensystem von T_2 . Wir können annehmen, dass $y_1 = z_1 = 1$ ist. Betrachte den endlich erzeugten R -Modul

$$T = T_1 \cdot T_2 = \langle y_i z_j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \rangle,$$

der offensichtlich $x_1 + x_2$ und $x_1 x_2$ (und 1) enthält. Dieser R -Modul T ist auch wieder eine R -Algebra, da für zwei beliebige Elemente gilt

$$\left(\sum r_{ij} y_i z_j \right) \left(\sum s_{kl} y_k z_l \right) = \sum r_{ij} s_{kl} y_i y_k z_j z_l,$$

und für die Produkte gilt $y_i y_k \in T_1$ und $z_j z_l \in T_2$, sodass diese Linearkombination zu T gehört. Dies zeigt, dass die Summe und das Produkt von zwei ganzen Elementen wieder ganz ist. Deshalb ist der ganze Abschluss ein Unterring von S , der R enthält. Also liegt eine R -Unteralgebra vor. \square

Definition 19.11. Seien R und S kommutative Ringe und $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung. Man nennt R *ganz-abgeschlossen* in S , wenn der ganze Abschluss von R in S gleich R ist.

19. ARBEITSBLATT

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 19.1. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid, das von teilerfremden Elementen erzeugt werde. Es sei vorausgesetzt, dass die Multiplizität von M mit der Führungszahl von M übereinstimmt. Bestimme ein minimales Erzeugendensystem und die Einbettungsdimension von M .

Aufgabe 19.2. Sei M ein kommutatives Monoid und R ein kommutativer Ring. Charakterisiere für welche Teilmengen $I \subseteq M$ die Teilmenge

$$R[I] = \bigoplus_{m \in I} T^m \subseteq R[M]$$

ein Ideal in $R[M]$ ist.

Aufgabe 19.3. Sei K ein Körper. Finde ein kommutatives Monoid M derart, dass eine Isomorphie

$$K[M] \cong K[X, Y, U, V]/(UX - VY)$$

vorliegt.

Aufgabe 19.4. Sei $R \subseteq S$ eine ganze Erweiterung von Integritätsbereichen und sei $F \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass dann auch die zugehörige Erweiterung $R_F \subseteq S_F$ ganz ist.

Aufgabe 19.5.*

Seien R und S Integritätsbereiche und sei $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung. Es sei $f \in R$ ein Element, das in S eine Einheit ist. Zeige, dass f dann schon in R eine Einheit ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 19.6. (4 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{N}$ das durch 3, 5, 7 erzeugte numerische Untermonoid. Bestimme eine Restklassendarstellung des zugehörigen Monoidringes.

Aufgabe 19.7. (4 Punkte)

Klassifiziere sämtliche numerische Monoide M (mit teilerfremden Erzeugern) mit Führungszahl $f(M) \leq 6$. Man gebe jeweils die Einbettungsdimension, die Multiplizität und den Singularitätsgrad an.

Aufgabe 19.8. (3 Punkte)

Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid und K ein Körper. Definiere

$$M_+ = M \cap \mathbb{N}_+ \text{ und } nM_+ = \{m \in M \mid \text{es gibt eine Darstellung} \\ m = m_1 + \dots + m_n \text{ mit } m_i \in M_+\}.$$

Zeige, dass nM_+ „Ideale“ in M sind, dass zu M_+ ein maximales Ideal \mathfrak{m} in $K[M]$ gehört, und dass das zu nM_+ gehörige Ideal gleich \mathfrak{m}^n ist.

Aufgabe 19.9. (3 Punkte)

Seien M und N kommutative Monoide und sei K ein Körper. In welcher Beziehung steht $K\text{-Spek}(K[M \times N])$ zu $K\text{-Spek}(K[M])$ und $K\text{-Spek}(K[N])$?

Aufgabe 19.10. (3 Punkte)

Seien R, S, T kommutative Ringe und seien $\varphi : R \rightarrow S$ und $\psi : S \rightarrow T$ Ringhomomorphismen derart, dass S ganz über R und T ganz über S ist. Zeige, dass dann auch T ganz über R ist.

(Vergleiche Aufgabe 10.10).

20. VORLESUNG - NORMALISIERUNG

Normale Ringe und Normalisierung

Definition 20.1. Ein Integritätsbereich heißt *normal*, wenn er ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist.

Definition 20.2. Sei R ein Integritätsbereich und $Q(R)$ sein Quotientenkörper. Dann nennt man den ganzen Abschluss von R in $Q(R)$ die *Normalisierung* von R .

Es ist eine nichttriviale Tatsache, dass falls R von endlichem Typ ist, dann auch die Normalisierung davon von endlichem Typ ist.

Wichtige Beispiele für normale Ringe werden durch faktorielle Ringe geliefert.

Satz 20.3. Sei R ein faktorieller Integritätsbereich. Dann ist R normal.

Beweis. Sei $K = Q(R)$ der Quotientenkörper von R und $q \in K$ ein Element, das die Ganzheitsgleichung

$$q^n + r_{n-1}q^{n-1} + r_{n-2}q^{n-2} + \dots + r_1q + r_0 = 0$$

mit $r_i \in R$ erfüllt. Wir schreiben $q = a/b$ mit $a, b \in R$, wobei wir annehmen können, dass die Darstellung gekürzt ist, dass also a und $b \in R$ keinen gemeinsamen Primteiler besitzen. Wir haben zu zeigen, dass b eine Einheit in R ist, da dann $q = ab^{-1}$ zu R gehört.

Wir multiplizieren obige Ganzheitsgleichung mit b^n und erhalten in R

$$a^n + (r_{n-1}b)a^{n-1} + (r_{n-2}b^2)a^{n-2} + \dots + (r_1b^{n-1})a + (r_0b^n) = 0.$$

Wenn b keine Einheit ist, dann gibt es einen Primteiler p von b . Dieser teilt alle Summanden $(r_{n-i}b^i)a^{n-i}$ für $i \geq 1$ und daher auch den ersten, also a^n . Das bedeutet aber, dass a selbst ein Vielfaches von p ist im Widerspruch zur vorausgesetzten Teilerfremdheit. \square

Satz 20.4. Sei R ein normaler Integritätsbereich und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Dann ist auch die Nenneraufnahme R_S normal.

Beweis. Siehe Aufgabe 20.5. \square

Normalisierung von Monoidringen

Wir wollen besprechen, wann Monoidringe normal sind und wie gegebenenfalls die Normalisierung eines Monoidrings aussieht. Hierzu brauchen wir zunächst Bedingungen, die sicherstellen, dass ein Monoidring über einem Integritätsbereich wieder integer ist.

Definition 20.5. Ein kommutatives Monoid M heißt *torsionsfrei*, wenn für $m, n \in M$ aus $rm = rn$ für eine positive Zahl $r \in \mathbb{N}_+$ stets $m = n$ folgt.

Satz 20.6. Sei R ein Integritätsbereich und sei M ein torsionsfreies kommutatives Monoid, das die Kürzungsregel erfüllt. Dann ist der Monoidring $R[M]$ ein Integritätsbereich.

Beweis. Zunächst ist $M \subseteq \Gamma(M)$, wobei $\Gamma(M)$ die Differenzengruppe zu M bezeichnet. Damit ist $R[M] \subseteq R[\Gamma(M)]$ ein Unterring, und es genügt die Aussage für $R[\Gamma(M)]$ zu beweisen. Da M torsionsfrei ist, ist nach Aufgabe 20.6 auch $\Gamma(M)$ torsionsfrei. Wir können also annehmen, dass M eine torsionsfreie kommutative Gruppe ist. Sei nun

$$\sum_{n \in M} a_n X^n \cdot \sum_{n \in M} b_n X^n = 0.$$

Da hier fast alle Koeffizienten null sind, spielt sich dies in einer endlich erzeugten Untergruppe U der torsionsfreien Gruppe M ab. Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte torsionsfreie kommutative Gruppen ist dann $U \cong \mathbb{Z}^n$. Wir können also sogar $M = \mathbb{Z}^n$ annehmen. Dann ist aber $R[M]$ eine Nenneraufnahme eines Polynomringes über einem Integritätsbereich und damit integer. \square

Für ein Monoid ohne Kürzungsregel kann der zugehörige Monoidring über einem Integritätsbereich Nullteiler besitzen.

Beispiel 20.7. Sei M ein Monoid, in dem es zwei verschiedene Elemente m und n gebe mit $m + n = n + n$. Daraus folgt ohne die Kürzungsregel eben nicht $m = n$. Im Monoidring über einem beliebigen Integritätsbereich R ist $X^m - X^n \neq 0$ und $X^n \neq 0$, aber

$$(X^m - X^n) X^n = X^{m+n} - X^{n+n} = X^{2n} - X^{2n} = 0.$$

Definition 20.8. Sei M ein torsionsfreies kommutatives Monoid mit Kürzungsregel und mit zugehöriger Differenzengruppe $\Gamma(M)$. Dann heißt das Untermonoid

$$\tilde{M} = \{m \in \Gamma(M) \mid \text{es gibt } r \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } rm \in M\}$$

die *Normalisierung* von M .

Satz 20.9. Sei M ein torsionsfreies kommutatives Monoid mit Kürzungsregel und mit zugehöriger Differenzengruppe $\Gamma(M)$ und mit Normalisierung \tilde{M} , $M \subseteq \tilde{M} \subseteq \Gamma(M)$. Sei R ein normaler Ring. Dann ist die Normalisierung des Monoidringes $R[M]$ der Monoidring $R[\tilde{M}]$. Insbesondere ist der Monoidring zu einem normalen Monoid über einem normalen Ring selbst wieder normal.

Beweis. Zunächst ist

$$R[M] \subseteq R[\tilde{M}] \subseteq R[\Gamma(M)] \subseteq Q(R)[\Gamma(M)] \subseteq Q(R[M]).$$

Sei $m \in \tilde{M}$ mit $m = n - k$, $n, k \in M$, und mit $rm = m + m + \dots + m \in M$ (r mal). Damit ist $T^m = T^n / T^k$ ein Element im Quotientenkörper und nach der zweiten Eigenschaft ist $(T^m)^r \in R[M]$. Dies bedeutet, dass eine (reine)

Ganzheitsgleichung für T^m vorliegt und damit T^m zur Normalisierung von $R[M]$ gehört.

Für die Umkehrung kann man M durch \tilde{M} ersetzen und sich somit auf den Fall beschränken, wo M normal ist. Man beweist zuerst, dass für eine torsionsfreie Gruppe G der Gruppenring $R[G]$ normal ist, was daraus folgt, dass der Polynomring über einem normalen Bereich wieder normal ist. Dann muss man zeigen, dass $R[M]$ in $R[\Gamma(M)]$ ganz-abgeschlossen ist. Ein Element $q \in R(\Gamma(M))$ und eine Ganzheitsgleichung dafür lebt im Monoidring zu einer endlich erzeugten Untergruppe $U \subseteq \Gamma(M)$, sodass man $\Gamma(M) = \mathbb{Z}^n$ annehmen darf.

Hier kommt nun etwas konvexe Geometrie ins Spiel, was wir nicht ausführen. Jedenfalls lässt sich ein normales Untermonoid $M \subseteq \mathbb{Z}^n$ darstellen als der Durchschnitt (innerhalb von \mathbb{Q}^n oder \mathbb{R}^n) von \mathbb{Z}^n und einem polyhedrischen Kegel. Ein solcher Kegel ist selbst wiederum der Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen H_i (Lemma von Gordan). Dabei ist ein Halbraum H gegeben durch eine lineare Abbildung $p : V = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $H = p^{-1}(\mathbb{R}_+)$. Daraus folgt, dass M ein endlicher Durchschnitt $M = \bigcap_{i \in I} M_i$ ist mit $M_i = p_i^{-1}(\mathbb{N})$. Daraus ergibt sich, dass die M_i eine Form $M_i \cong \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^{n-1}$ haben. Damit ist $R[M] = \bigcap_{i \in I} R[M_i]$ nach Aufgabe 20.1 normal, da die einzelnen $R[M_i] \cong R[\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^{n-1}]$ normal sind. \square

Beispiel 20.10. Wir betrachten die algebraische Fläche, die durch die Gleichung

$$X^2Z = Y^2$$

gegeben ist. Wir wollen sie als die Fläche zu einem Monoidring verstehen. Dazu sei

$$M = \langle (1, 0), (1, 1), (0, 2) \rangle \subset \mathbb{N}^2$$

Wegen $(1, 1) - (1, 0) = (0, 1)$ ist \mathbb{Z}^2 das Quotientengitter (Differenzgruppe). Da $2(0, 1) = (0, 2) \in M$ ist, muss \mathbb{N}^2 die Normalisierung von M sein. Die drei Erzeuger ergeben einen surjektiven Monoidhomomorphismus

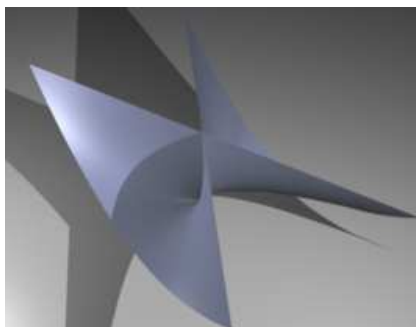
$$\mathbb{N}^3 \rightarrow M, e_i \mapsto m_i, i = 1, 2, 3.$$

Diese monomiale Abbildung $\mathbb{N}^3 \rightarrow M \subset \mathbb{N}^2$ bedeutet geometrisch die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \rightarrow K\text{-Spek}(K[M]) \hookrightarrow \mathbb{A}_K^3, (s, t) \mapsto (s, st, t^2).$$

Dabei gehen (monomial gesehen) $2e_1 + e_3$ und $2e_2$ beide auf das Element $(1, 1)$, und das liefert die Gleichung $X^2Z = Y^2$, die man natürlich auch direkt ablesen kann.

Man kann die definierende Gleichung auch als $Z = \left(\frac{Y}{X}\right)^2$ ansehen. Von $K[X, Y]$ ausgehend wird also ein Quadrat zu $\frac{Y}{X}$ adjungiert.



Beispiel 20.11. Wir betrachten das durch $(1, 0)$, $(-1, 2)$ und $(0, 1)$ erzeugte Untermonoid $M \subseteq \mathbb{Z}^2$. Für den zugehörigen Monoidring gilt $K[M] \cong K[X, Y, Z]/(Z^2 - XY)$. Wir behaupten, dass das Monoid normal ist, also mit seiner Normalisierung übereinstimmt. Die beiden Erzeuger $(1, 0)$ und $(-1, 2)$ definieren je eine Gerade in \mathbb{R}^2 , und das Monoid besteht aus allen Gitterpunkten (Punkte im \mathbb{Z}^2) innerhalb des durch diese Geraden definierten Kegels. Dies sieht man so: Die Gitterpunkte in diesem Kegel sind gegeben durch die zwei Bedingungen

$$\{(s, t) \in \mathbb{Z}^2 \mid t \geq 0 \text{ und } t \geq -2s\} .$$

Ein Punkt daraus mit $s \geq 0$ gehört offensichtlich zu M . Sei also (s, t) ein Punkt daraus mit $s < 0$. Wegen der zweiten linearen Bedingung kann man

$$(s, t) = -s(-1, 2) + (t - 2s)(0, 1)$$

schreiben, was wegen $t - 2s \geq 0$ zu M gehört.

Mit den zwei Geraden lässt sich M auch sofort als $M = H_1 \cap H_2$ beschreiben, mit $H_1 = \{(s, t) \mid t \geq 0\} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ und $H_2 = \{(s, t) \mid t \geq -2s\} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, wobei die zweite Identifizierung von der \mathbb{Z} -Basis $(-1, 2)$, $(0, 1)$ herrührt. Aus dieser expliziten Beschreibung folgt, dass der zugehörige Monoidring normal ist.

Monomiale Kurven und Normalisierung

Wir werden später sehen, dass eine algebraische Kurve genau dann normal ist, wenn sie nichtsingulär ist. Im Fall einer monomilaen Kurve lässt sich die Normalisierung einfach beschreiben.

Satz 20.12. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein durch teilerfremde e_1, \dots, e_n erzeugtes Untermonoid, und $K[M] \subseteq K[T]$ die zugehörige Ringerweiterung von Monoidringen. Dann ist $K[T]$ die Normalisierung von $K[M]$. Mit anderen Worten: Die monomiale Abbildung

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow K\text{-Spek}(K[M])$$

ist eine Normalisierung.

Beweis. Wir haben $K[M] = K[T^{e_1}, \dots, T^{e_n}] \subseteq K[T]$. Da die Exponenten teilerfremd sind, erzeugen sie die Eins und das bedeutet (multiplikativ betrachtet), dass es ein Monom in diesen Potenzen (auch mit negativen Exponenten) gibt, das gleich T ist. D.h. T ist ein Quotient von Elementen aus $K[M]$ und daher sind die Quotientenkörper gleich. Andererseits erfüllt T eine Ganzheitsgleichung über $K[M]$, beispielsweise $T^{e_1} - T^{e_1} = 0$. Da $K[T]$ normal ist (sogar faktoriell, da es ja ein Hauptidealbereich ist), muss es sich um die Normalisierung handeln. \square

Monomiale Kurven liefern also eine Vielzahl an Beispielen, wo die Normalisierung auf der Ebene der K -Spektren eine Bijektion ist. Es handelt sich auch um eine Homöomorphie bezüglich der Zariski-Topologie, die ja im Kurvenfall sehr einfach ist. Dennoch wäre es falsch, die beiden Kurven als identisch anzusehen. Die Normalisierung ist (bei $e_i \neq 1$ für alle i) auf der Ringebene keine Bijektion, und in der algebraischen Geometrie darf man nicht nur die mengentheoretische oder topologische Gestalt des Nullstellengebildes anschauen, man darf die Ringe (und die Gleichungen selbst) im Hintergrund nicht völlig vergessen. Den Unterschied sieht man auch in der eingebetteten Situation, wo die Neilsche Parabel eine Spitze besitzt.

Mit der Normalisierung bekommt der Singularitätsgrad einer monomialen Kurve eine neue Interpretation.

Lemma 20.13. *Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein durch teilerfremde Erzeuger definiertes numerisches Monoid. Es sei $R = K[M]$ der zugehörige Monoidring und $R^{\text{norm}} = K[T]$ die Normalisierung davon. Dann gilt für den Singularitätsgrad von M die Gleichung*

$$\delta(M) = \dim_K(R^{\text{norm}}/R).$$

Beweis. Die Normalisierung besitzt die K -Basis T^m , $m \in \mathbb{N}$, und der Monoidring $K[M]$ besitzt die K -Basis T^m , $m \in M$. Daher besitzt der Restraum $K[T]/K[M]$ die K -Basis T^m , $m \in \mathbb{N} \setminus M$. Die Dimension des Restraumes ist die Anzahl der Elemente einer Basis, und diese Anzahl ist die Anzahl der Lücken, also der Singularitätsgrad von M . \square

20. ARBEITSBLATT

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 20.1. Sei K ein Körper und sei $R_i \subseteq K$, $i \in I$, eine Familie von normalen Unterringen. Zeige, dass auch der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} R_i$ normal ist.

Aufgabe 20.2. Sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass R genau dann normal ist, wenn er mit seiner Normalisierung übereinstimmt.

Aufgabe 20.3. Sei R ein Integritätsbereich. Sei angenommen, dass die Normalisierung von R gleich dem Quotientenkörper $Q(R)$ ist. Zeige, dass dann R selbst schon ein Körper ist.

Aufgabe 20.4.*

Sei R ein normaler Integritätsbereich und $f \in R$, $f \neq 0$. Zeige, dass die Nenneraufnahme R_f ebenfalls normal ist.

Aufgabe 20.5. Sei R ein normaler Integritätsbereich und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass dann auch die Nenneraufnahme R_S normal ist.

Aufgabe 20.6. Sei M ein torsionsfreies Monoid. Zeige, dass dann auch die Differenzgruppe $\Gamma(M)$ torsionsfrei ist.

Aufgabe 20.7. (3 Punkte)

Sei M ein kommutative Gruppe. Zeige, dass die Torsionsfreiheit von M äquivalent zu folgender Eigenschaft ist: Aus $m \in M$ und $rm = 0$ für ein positives $r \in \mathbb{N}$ folgt stets $m = 0$. Zeige ferner, dass diese Äquivalenz für ein Monoid nicht gelten muss.

Aufgabe 20.8. Sei R ein Integritätsbereich mit Normalisierung R^{norm} . Zeige, dass durch

$$\mathfrak{f} = \{g \in R \mid gR^{\text{norm}} \subseteq R\}$$

ein Ideal in R gegeben ist.

Aufgabe 20.9. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid, das von teilerfremden natürlichen Zahlen erzeugt werde. Zeige, dass für das Führungsideal des zugehörigen Monoidrings $K[M]$ die Beziehung

$$\mathfrak{f} = (M_{\geq f})$$

besteht, wobei f die Führungszahl des Monoids bezeichnet.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 20.10. (3 Punkte)

Sei R ein normaler Integritätsbereich und $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung. Sei $f \in R$. Zeige, dass für das von f erzeugte Hauptideal gilt:

$$R \cap (f)S = (f)R.$$

Aufgabe 20.11. (6 Punkte)

Sei R ein normaler Integritätsbereich. Zeige, dass dann auch der Polynomring $R[X]$ normal ist.

Aufgabe 20.12. (5 Punkte)

Sei R ein normaler Integritätsbereich und $a \in R$. Es sei vorausgesetzt, dass a keine Quadratwurzel in R besitzt. Zeige, dass das Polynom $X^2 - a$ prim in $R[X]$ ist. Tipp: Verwende den Quotientenkörper $Q(R)$. Warnung: prim muss hier nicht äquivalent zu irreduzibel sein.

Aufgabe 20.13. (4 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

- (1) R ist normal
- (2) Für jedes Primideal \mathfrak{p} ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ normal.
- (3) Für jedes maximale Ideal \mathfrak{m} ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{m}}$ normal.

(Man sagt daher, dass normal eine *lokale Eigenschaft* ist.)

Aufgabe 20.14. (2 Punkte)

Sei $M \subseteq \Gamma(M) \cong \mathbb{Z}^n$ ein Monoid und betrachte die Menge

$$M^* = \{\varphi : \Gamma(M) \longrightarrow \mathbb{Z} \mid \varphi(M) \subseteq \mathbb{N}\} .$$

Zeige, dass M^* ein normales Untermonoid von $\text{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ ist.

(Dieses Monoid nennt man das *duale Monoid* zu M .)

Aufgabe 20.15. (3 Punkte)

Betrachte Beispiel 20.11. Welchen Wert haben die drei Erzeuger unter den dort angegebenen Monoidhomomorphismen φ_1, φ_2 nach \mathbb{Z} , durch die das Monoid beschrieben werden kann. Bestimme den Kokern des Gruppenhomomorphismus

$$\Gamma(M) \longrightarrow \mathbb{Z}^2, m \longmapsto (\varphi_1(m), \varphi_2(m)) .$$

(Diesen Kokern nennt man die *Divisorenklassengruppe* des Monoidringes.)

Diskrete Bewertungsringe

Wir setzen nun die lokale Untersuchung von algebraischen Kurven fort und werden im weiteren Verlauf verschiedene Charakterisierungen dafür finden, dass ein Punkt einer Kurve nichtsingulär (oder glatt) ist. Zu dem Punkt P auf der Kurve gehört der lokale Ring in P , der die Lokalisierung des affinen Koordinatenringes der Kurve am maximalen Ideal ist, das zu P gehört. Wenn $P = (a, b) \in C = V(F) \subset \mathbb{A}_K^2$ ist, so lässt sich der lokale Ring in doppelter Weise beschreiben, nämlich als

$$K[X, Y]_{(X-a, Y-b)/(F)} \cong (K[X, Y]/(F))_{\mathfrak{m}}$$

(dabei ist \mathfrak{m} das maximale Ideal aufgefasst im Restklassenring). Dieser Ring beschreibt die wesentlichen algebraischen Eigenschaften des Punktes auf der Kurve. Wichtig ist zunächst der Begriff des diskreten Bewertungsringes.

Definition 21.1. Ein *diskreter Bewertungsring* R ist ein Hauptidealbereich mit der Eigenschaft, dass es bis auf Assoziiertheit genau ein Primelement in R gibt.

Lemma 21.2. Ein *diskreter Bewertungsring* ist ein lokaler, noetherscher Hauptidealbereich mit genau zwei Primidealen, nämlich 0 und dem maximalen Ideal \mathfrak{m} .

Beweis. Ein diskreter Bewertungsring ist kein Körper. In einem Hauptidealbereich, der kein Körper ist, wird jedes maximale Ideal von einem Primelement erzeugt, und die Primerzeuger zu verschiedenen maximalen Idealen können nicht assoziiert sein. Also gibt es genau ein maximales Ideal. Ebenso wird jedes von null verschiedene Primideal durch ein Primelement erzeugt, so dass es neben dem maximalen Ideal nur noch das Nullideal gibt. \square

Beispiel 21.3. Es sei A ein Hauptidealbereich und $\mathfrak{m} \subseteq A$ ein maximales Ideal. Dieses ist ein Hauptideal und wird durch ein Primelement, sagen wir $\mathfrak{m} = (p)$, erzeugt. Die Lokalisierung

$$R = A_{\mathfrak{m}} = \left\{ \frac{f}{g} \mid f \in A, g \notin \mathfrak{m} \right\}$$

ist nach Satz 15.4 ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$, das ebenfalls von p erzeugt wird. Alle Primelemente $q \in A$, die nicht zu p assoziiert sind, werden in der Lokalisierung zu Einheiten. Daher gibt es in der Lokalisierung bis auf Assoziiertheit genau ein Primelement, und somit liegt ein diskreter Bewertungsring vor. Für $A = \mathbb{Z}$ und eine Primzahl p ist $\mathbb{Z}_{(p)} \subseteq \mathbb{Q}$ der Unterring der rationalen Zahlen, deren Nenner kein Vielfaches von p sind.

Definition 21.4. Zu einem Element $f \in R$, $f \neq 0$, in einem diskreten Bewertungsring mit Primelement p heißt die Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$f = up^n$, wobei u eine Einheit bezeichne, die *Ordnung* von f . Sie wird mit $\text{ord}(f)$ bezeichnet.

Die Ordnung ist also nichts anderes als der Exponent zum (bis auf Assoziiertheit) einzigen Primelement in der Primfaktorzerlegung. Sie hat folgende Eigenschaften.

Lemma 21.5. *Sei R ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = (p)$. Dann hat die Ordnung*

$$R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}, f \longmapsto \text{ord}(f),$$

folgende Eigenschaften.

- (1) $\text{ord}(fg) = \text{ord}(f) + \text{ord}(g)$.
- (2) $\text{ord}(f + g) \geq \min\{\text{ord}(f), \text{ord}(g)\}$.
- (3) $f \in \mathfrak{m}$ genau dann, wenn $\text{ord}(f) \geq 1$.
- (4) $f \in R^\times$ genau dann, wenn $\text{ord}(f) = 0$.

Beweis. Siehe Aufgabe 21.3. □

Wir wollen eine wichtige Charakterisierung für diskrete Bewertungsringe beweisen, die insbesondere beinhaltet, dass ein normaler lokaler Integritätsbereich mit genau zwei Primidealen bereits ein diskreter Bewertungsring ist. Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen.

Lemma 21.6. *Sei R ein kommutativer Ring und sei $f \in R$ nicht nilpotent. Dann gibt es ein Primideal \mathfrak{p} in R mit $f \notin \mathfrak{p}$.*

Beweis. Wir betrachten die Menge der Ideale

$$M = \{\mathfrak{a} \text{ Ideal} \mid f^r \notin \mathfrak{a} \text{ für alle } r\}.$$

Diese Menge ist nicht leer, da sie das Nullideal enthält. Ferner ist sie induktiv geordnet (bezüglich der Inklusion). Ist nämlich \mathfrak{a}_i eine total geordnete Teilmenge, so ist deren Vereinigung ebenfalls ein Ideal, das keine Potenz von f enthält. Nach dem Lemma von Zorn gibt es daher maximale Elemente in M .

Wir behaupten, dass ein solches maximales Element \mathfrak{p} ein Primideal ist. Sei dazu $g, h \in R$ und $gh \in \mathfrak{p}$, und sei $g, h \notin \mathfrak{p}$ angenommen. Dann hat man echte Inklusionen

$$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p} + (g), \mathfrak{p} + (h).$$

Wegen der Maximalität können die beiden Ideale rechts nicht zu M gehören, und das bedeutet, dass es Exponenten $r, s \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$f^r \in \mathfrak{p} + (g) \text{ und } f^s \in \mathfrak{p} + (h).$$

Dann ergibt sich der Widerspruch

$$f^r f^s \in \mathfrak{p} + (gh) \subseteq \mathfrak{p}.$$

□

Lemma 21.7. *Sei R ein noetherscher lokaler kommutativer Ring. Es sei vorausgesetzt, dass das maximale Ideal \mathfrak{m} das einzige Primideal von R ist. Dann gibt es einen Exponenten $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$\mathfrak{m}^n = 0.$$

Beweis. Wir behaupten zunächst, dass jedes Element in R eine Einheit oder nilpotent ist. Sei hierzu $f \in R$ keine Einheit. Dann ist $f \in \mathfrak{m}$. Angenommen, f ist nicht nilpotent. Dann gibt es nach Lemma 21.6 ein Primideal \mathfrak{p} mit $f \notin \mathfrak{p}$. Damit ergibt sich der Widerspruch $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$.

Es ist also jedes Element im maximalen Ideal nilpotent. Insbesondere gibt es für ein endliches Erzeugendensystem f_1, \dots, f_k von \mathfrak{m} eine natürliche Zahl m mit $f_i^m = 0$ für alle $i = 1, \dots, k$. Sei $n = km$. Dann ist ein beliebiges Element aus \mathfrak{m}^n von der Gestalt

$$\left(\sum_{i=1}^k a_{i1} f_i \right) \left(\sum_{i=1}^k a_{i2} f_i \right) \cdots \left(\sum_{i=1}^k a_{in} f_i \right).$$

Ausmultiplizieren ergibt eine Linearkombination mit Monomen $f_1^{r_1} \cdots f_k^{r_k}$ und $\sum_{i=1}^k r_i = n$, so dass ein f_i mit einem Exponenten $\geq n/k = m$ vorkommt. Daher ist das Produkt 0. \square

Satz 21.8. *Sei R ein noetherscher lokaler Integritätsbereich mit der Eigenschaft, dass es genau zwei Primideale $0 \subset \mathfrak{m}$ gibt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1) R ist ein diskreter Bewertungsring.
- (2) R ist ein Hauptidealbereich.
- (3) R ist faktoriell.
- (4) R ist normal.
- (5) \mathfrak{m} ist ein Hauptideal.

Beweis. (1) \Rightarrow (2) folgt direkt aus der Definition.

(2) \Rightarrow (3) folgt aus der allgemeinen Aussage, dass jeder Hauptidealbereich faktoriell ist.

(3) \Rightarrow (4) folgt aus Satz 20.3.

(4) \Rightarrow (5). Sei $f \in \mathfrak{m}$, $f \neq 0$. Dann ist $R/(f)$ ein noetherscher lokaler Ring mit nur einem Primideal (nämlich $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}R/(f)$). Daher gibt es nach Satz 21.7 ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{\mathfrak{m}}^n = 0$. Zurückübersetzt nach R heißt das, dass $\mathfrak{m}^n \subseteq (f)$ gilt. Wir wählen n minimal mit den Eigenschaften

$$\mathfrak{m}^n \subseteq (f) \text{ und } \mathfrak{m}^{n-1} \not\subseteq (f).$$

Wähle $g \in \mathfrak{m}^{n-1}$ mit $g \notin (f)$ und betrachte

$$h := \frac{f}{g} \in Q(R) \text{ (es ist } g \neq 0 \text{)}.$$

Das Inverse, also $h^{-1} = \frac{g}{f}$, gehört nicht zu R , sonst wäre $g \in (f)$. Da R nach Voraussetzung normal ist, ist h^{-1} auch nicht ganz über R . Nach dem Modulkriterium Lemma 19.9 für die Ganzheit gilt insbesondere für das maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ die Beziehung

$$h^{-1}\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m}$$

ist. Nach Wahl von g ist aber auch

$$h^{-1}\mathfrak{m} = \frac{g}{f}\mathfrak{m} \subseteq \frac{\mathfrak{m}^n}{f} \subseteq R.$$

Daher ist $h^{-1}\mathfrak{m}$ ein Ideal in R , das nicht im maximalen Ideal enthalten ist. Also ist $h^{-1}\mathfrak{m} = R$. Das heißt einerseits $h \in \mathfrak{m}$ und andererseits gilt für ein beliebiges $x \in \mathfrak{m}$ die Beziehung $h^{-1}x \in R$, also $x = h(h^{-1}x)$, also $x \in (h)$ und somit $(h) = \mathfrak{m}$.

(5) \Rightarrow (1). Sei $\mathfrak{m} = (\pi)$. Dann ist π ein Primelement und zwar bis auf Assoziiertheit das einzige. Sei $f \in R$, $f \neq 0$ keine Einheit. Dann ist $f \in \mathfrak{m}$ und daher $f = \pi g_1$. Dann ist g_1 eine Einheit oder $g_1 \in \mathfrak{m}$. Im zweiten Fall ist wieder $g_1 = \pi g_2$ und $f = \pi^2 g_2$.

Wir behaupten, dass man $f = \pi^k u$ mit einer Einheit u schreiben kann. Andernfalls könnte man $f = \pi^n g_n$ mit beliebig großem n schreiben. Nach Satz 21.7 gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $(\pi^m) = \mathfrak{m}^m \subseteq (f)$. Bei $n \geq m + 1$ ergibt sich $\pi^m = a f = a \pi^{m+1} b$ und der Widerspruch $1 = ab\pi$.

Es lässt sich also jede Nichteinheit $\neq 0$ als Produkt einer Potenz des Primelements mit einer Einheit schreiben. Insbesondere ist R faktoriell. Für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_s)$ ist $f_i = \pi^{n_i} u_i$ mit Einheiten u_i . Dann sieht man leicht, dass $\mathfrak{a} = (\pi^n)$ ist mit $n = \min_i \{n_i\}$. \square

Das Lemma von Nakayama

Nach dem vorangehenden Überlegungen liegt ein diskreter Bewertungsring genau dann vor, wenn der lokale Integritätsbereich die Eigenschaft hat, dass das maximale Ideal durch ein Element erzeugt wird. Es ist von daher naheliegend, generell die lokalen Ringe zu Punkten auf einer algebraischen Kurve dahingehend zu studieren, wie viele Erzeuger das maximale Ideal benötigt. Dies führt zum Begriff der Einbettungsdimension, den wir schon im Zusammenhang mit monomialen Kurven erwähnt haben. Diese Einbettungsdimension ist auch die Dimension des R/\mathfrak{m} -Vektorraumes $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, für diesen Zusammenhang brauchen wir aber einige Vorbereitungen und insbesondere das *Lemma von Nakayama*.

Im Lemma von Nakayama wird folgende Konstruktion betrachtet: Zu einem R -Modul V , einem Untermodul $U \subseteq V$ und einem Ideal $I \subseteq R$ bezeichnet man mit IU den R -Untermodul von V , der von allen Elementen der Form fv , $f \in I$, $v \in U$, erzeugt wird (dies ist auch ein R -Untermodul von U). Ist U

ebenfalls ein Ideal (also ein R -Untermodul von R) so fällt dieses Konzept mit dem Produkt von Idealen zusammen. Der Restklassenmodul V/IV ist dabei in natürlicher Weise nicht nur ein R -Modul, sondern auch ein R/I -Modul. Wenn I ein maximales Ideal ist, so bedeutet dies, dass der Restklassenmodul sogar ein Vektorraum über dem Restklassenkörper ist.

Lemma 21.9. *Sei (R, \mathfrak{m}) ein lokaler Ring und sei V ein endlich erzeugter R -Modul. Es sei $\mathfrak{m}V = V$ vorausgesetzt. Dann ist $V = 0$.*

Beweis. Sei v_1, \dots, v_n ein Erzeugendensystem von V . Nach Voraussetzung gibt es wegen $v_i \in \mathfrak{m}V$ zu jedem v_i eine Darstellung

$$v_i = a_{i1}v_1 + \dots + a_{in}v_n$$

mit $a_{ij} \in \mathfrak{m}$. Daraus ergibt sich für jedes i eine Darstellung

$$(1 - a_{ii})v_i = a_{i1}v_1 + \dots + a_{i,i-1}v_{i-1} + a_{i,i+1}v_{i+1} + \dots + a_{in}v_n.$$

Da $a_{ii} \in \mathfrak{m}$ ist, ist der Koeffizient $1 - a_{ii}$ eine Einheit. Dies bedeutet aber, dass man nach v_i auflösen kann, so dass also v_i überflüssig ist. So kann man sukzessive auf alle Erzeuger verzichten, was bedeutet, dass der Nullmodul vorliegen muss. \square

21. ARBEITSBLATT

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 21.1. Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper Q . Zeige, dass es keinen echten Zwischenring zwischen R und Q gibt.

Aufgabe 21.2. Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper Q . Charakterisiere die endlich erzeugten R -Untermodule von Q . Auf welche Form kann man ein Erzeugendensystem bringen?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.3. (4 Punkte)

Beweise für einen diskreten Bewertungsring die Eigenschaften der Ordnung, die in Lemma 21.5 formuliert sind.

Aufgabe 21.4. (3 Punkte)

Sei R ein diskreter Bewertungsring. Definiere zu einem Element $q \in Q(R)$, $q \neq 0$, die Ordnung

$$\text{ord}(q) \in \mathbb{Z}.$$

Dabei soll die Definition mit der Ordnung für Elemente aus R übereinstimmen und einen Gruppenhomomorphismus $Q(R) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ definieren. Was ist der Kern dieses Homomorphismus?

Aufgabe 21.5. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $K(T)$ der Körper der rationalen Funktionen über K . Finde einen diskreten Bewertungsring $R \subset K(T)$ mit $Q(R) = K(T)$ und mit $R \cap K[T] = K$.

Aufgabe 21.6. (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Eine *Potenzreihe in einer Variablen* über K ist ein formaler Ausdruck der Form

$$a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3 + \dots \text{ mit } a_i \in K.$$

Es kann hier also unendlich viele von null verschiedene Koeffizienten a_i geben. Definiere eine Ringstruktur auf der Menge aller Potenzreihen, die die Ringstruktur auf dem Polynomring in einer Variablen fortsetzt. Zeige, dass dieser Ring ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 21.7. (4 Punkte)

Es sei R ein Integritätsbereich mit folgender Eigenschaft: zu je zwei Elementen $f, g \in R$ gelte, dass f ein Teiler von g ist oder dass g ein Teiler von f ist. Es sei R noethersch, aber kein Körper. Zeige, dass R ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 21.8. (5 Punkte)

Zeige, dass ein noetherscher abstrakter Bewertungsring schon diskret ist.

Aufgabe 21.9. (3 Punkte)

Zeige, dass in $K[X, Y]_{(X, Y)} / (X^2 - Y^3)$ jedes Ideal durch maximal zwei Erzeuger gegeben ist.

Aufgabe 21.10. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer ebenen monomialen Kurve und eines Ideals im zugehörigen lokalen Ring der Singularität, das nicht von zwei Elementen erzeugt werden kann.

Die Einbettungsdimension

Definition 22.1. Es sei R ein lokaler kommutativer noetherscher Ring mit maximalem Ideal \mathfrak{m} . Dann heißt die minimale Idealerzeugendenzahl für \mathfrak{m} die *Einbettungsdimension* von R , geschrieben

$$\text{embdim}(R).$$

Ein noetherscher lokaler Integritätsbereich der Dimension eins (d.h. die einzigen Primideale sind das Nullideal und das maximale Ideal) ist genau dann ein diskreter Bewertungsring, wenn seine Einbettungsdimension 1 ist. Wir erwähnen, dass die Einbettungsdimension immer zumindest so groß ist wie die Dimension eines lokalen Ringes. Die Ringe, bei denen Gleichheit gilt, spielen eine besondere Rolle und heißen *reguläre Ringe*. Wir sind der Einbettungsdimension schon im Fall von monomialen Kurven begegnet und müssen zeigen, dass die dortige Definition (Definition) mit der neuen verträglich ist.

Wir beweisen zunächst eine andere Charakterisierung, die sich aus dem Lemma von Nakayama ergibt.

Lemma 22.2. Sei (R, \mathfrak{m}, K) ein lokaler Ring und sei V ein endlich erzeugter R -Modul. Dann stimmt die minimale Erzeugendenzahl $\mu(V)$ mit der Dimension des K -Vektorraums $V/\mathfrak{m}V$ überein.

Beweis. Wir zeigen etwas allgemeiner, dass Elemente $v_1, \dots, v_n \in V$ genau dann ein R -Erzeugendensystem für V bilden, wenn deren Restklassen in $V/\mathfrak{m}V$ ein R/\mathfrak{m} -Erzeugendensystem von $V/\mathfrak{m}V$ bilden. Dabei ist die eine Richtung trivial, seien also Elemente $v_1, \dots, v_n \in V$ gegeben, die modulo \mathfrak{m} ein Erzeugendensystem sind. Es sei $U \subseteq V$ der von den v_i erzeugte R -Untermodul von V . Die Voraussetzung übersetzt sich zu $V = U + \mathfrak{m}V$. Wir betrachten den Restklassenmodul V/U . Dort gilt dann $(V/U)\mathfrak{m} = V/U$, woraus nach dem Lemma von Nakayama die Gleichheit $V/U = 0$ und $V = U$ folgt. \square

Korollar 22.3. Sei (R, \mathfrak{m}, K) ein noetherscher lokaler Ring. Dann ist die Einbettungsdimension gleich

$$\mu(\mathfrak{m}) = \dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).$$

Beweis. Dies folgt sofort aus Lemma 22.2 angewandt auf das Ideal \mathfrak{m} und den endlich erzeugten R -Modul \mathfrak{m} . \square

Den in der vorstehenden Aussage auftretenden R -Modul $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, der ein Vektorraum über dem Restklassenkörper R/\mathfrak{m} ist, nennt man auch den *Kotangentenraum* des lokalen Ringes.

Lemma 22.4. *Sei R ein noetherscher kommutativer Ring und \mathfrak{n} ein maximales Ideal. Es sei $S = R_{\mathfrak{n}}$ die Lokalisierung an \mathfrak{n} mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}R_{\mathfrak{n}}$. Dann ist*

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2.$$

Insbesondere ist die Einbettungsdimension der Lokalisierung gleich $\dim_{R/\mathfrak{n}}(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2)$.

Beweis. Bekanntlich ist $R/\mathfrak{n} \cong R_{\mathfrak{n}}/\mathfrak{m}$, so dass der gleiche Restklassenkörper vorliegt. Der natürliche R -Modul-Homomorphismus $\mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{m}$ induziert einen K -Vektorraum-Homomorphismus

$$\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,$$

der surjektiv ist, da R -Modul-Erzeuger von \mathfrak{n} auf $R_{\mathfrak{n}}$ -Erzeuger von \mathfrak{m} abbilden, und diese modulo \mathfrak{m}^2 ein K -Vektorraum-Erzeugendensystem ergeben.

Zum Beweis der Injektivität sei $f \in \mathfrak{n}$ ein Element, das rechts auf 0 abgebildet wird. D.h. es gilt $f \in \mathfrak{m}^2$ in der Lokalisierung $R_{\mathfrak{n}}$. Dies bedeutet, dass es Elemente $g_1, \dots, g_n \in \mathfrak{n}$ und $h_1, \dots, h_n \in \mathfrak{n}$ und Elemente $q_i = \frac{a_i}{s_i} \in R_{\mathfrak{n}}$ (also mit $s_i \notin \mathfrak{n}$ und $a_i \in R$) gibt mit

$$f = \frac{a_1}{s_1}g_1h_1 + \dots + \frac{a_n}{s_n}g_nh_n.$$

Dies bedeutet zurückübersetzt nach R , dass es ein Element $s \notin \mathfrak{n}$ gibt mit

$$sf = b_1g_1h_1 + \dots + b_ng_nh_n$$

für gewisse $b_i \in R$. Da s nicht zum maximalen Ideal \mathfrak{n} gehört, gibt es $r \in R$ und $g \in \mathfrak{n}$ mit $g + rs = 1$. Wir multiplizieren die obige Gleichung mit r und erhalten

$$(1 - g)f = r(b_1g_1h_1 + \dots + b_ng_nh_n)$$

bzw.

$$f = r(b_1g_1h_1 + \dots + b_ng_nh_n) + gf.$$

Dabei gehört die rechte Seite offensichtlich zu \mathfrak{n}^2 , und damit definiert f das Nullelement in $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$. \square

Lemma 22.5. *Sei K ein Körper und M ein numerisches Monoid, das von teilerfremden natürlichen Zahlen erzeugt sei. Es sei $R = K[M]$ der zugehörige Monoidring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{n} = (M_+)$ und der Lokalisierung $R_{\mathfrak{n}}$. Dann ist die numerische Einbettungsdimension von M (bzw. $K[M]$) gleich der Einbettungsdimension des lokalen Rings $R_{\mathfrak{n}}$.*

Beweis. Es ist $\mathfrak{n} = (M_+) = \bigoplus_{m \in M_+} K T^m$ und $\mathfrak{n}^2 = (2M_+) = \bigoplus_{m \in 2M_+} K T^m$. Der Restklassenraum ist daher

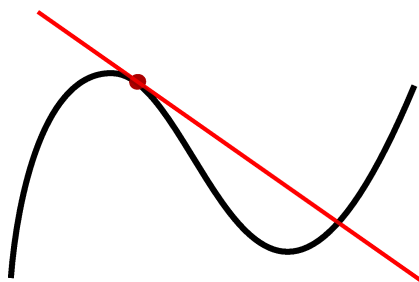
$$\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 = \bigoplus_{m \in M_+ \setminus 2M_+} K T^m.$$

Dessen K -Dimension ist also gleich der Anzahl der Elemente aus $M_+ \setminus 2M_+$. Nach Korollar 18.13 ist $M_+ \setminus 2M_+$ das minimale Monoiderzeugendensystem

von M , so dass die Dimension gleich der numerischen Einbettungsdimension ist.

Andererseits ist nach Lemma 22.4 die Dimension von $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ gleich der Einbettungsdimension des zugehörigen lokalen Rings $R_{\mathfrak{n}}$. \square

Glatte und singuläre Punkte



Sei K ein Körper und $F \in K[X, Y]$, $F \neq 0$, ein Polynom ohne mehrfache Faktoren (da wir uns nur für die zugehörige Kurve interessieren, ist dies bei einem algebraisch abgeschlossenen Körper aufgrund des Hilbertschen Nullstellensatzes keine Einschränkung). Für jeden Punkt $(a, b) \in \mathbb{A}_K^2$, kann man zu den Variablen $X - a$ und $Y - b$ übergehen. Das bedeutet, dass man den Punkt in den Ursprung verschiebt. Für das Verhalten eines Polynoms an einem Punkt kann man sich also stets auf den Ursprung beschränken.

Sei also $P = (0, 0)$. Wir schreiben F mit homogenen Komponenten als

$$F = F_d + F_{d-1} + \dots + F_1 + F_0.$$

Hier sind die F_i homogen vom Grad i . Was kann man an den einzelnen homogenen Komponenten ablesen? Zunächst gilt trivialerweise die Beziehung

$$P \in V(F) \text{ genau dann, wenn } F_0 = 0.$$

Wenn man die Koordinaten von P , also $(0, 0)$, in F einsetzt, so werden ja alle höheren Komponenten zu null gemacht, und lediglich die konstante Komponente F_0 bleibt übrig. Da wir uns hauptsächlich für das Verhalten der Kurve in einem Kurvenpunkt interessieren, werden wir uns häufig auf die Situation $F_0 = 0$ beschränken. Was ist dann die erste homogene Komponente F_i , die nicht null ist? Welche Rolle spielt dieses i und welche Rolle spielen dessen Linearfaktoren?

Nehmen wir zunächst an, dass $F_0 = 0$ und $F_1 = aX + bY$ ist. Diese Linearform (die null sein kann) lässt sich auch mit partiellen Ableitungen charakterisieren, es ist nämlich

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P) = a \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y}(P) = b.$$

Hier und im Folgenden werden Polynome einfach *formal abgeleitet*. Damit ist auch $F_1 = 0$ genau dann, wenn $\frac{\partial F}{\partial x}(P) = \frac{\partial F}{\partial y}(P) = 0$ ist. Wenn dies nicht der Fall ist, so ist es naheliegend, die durch die Gleichung $F_1(X, Y) = 0$ definierte Gerade als Tangente an die Kurve im Punkt P anzusehen. Ein erstes Indiz dafür ist, dass im linearen Fall $F = F_1$ die Gerade mit ihrer Tangente zusammenfallen soll.

Definition 22.6. Sei K ein Körper und $F \in K[X, Y]$ ein von null verschiedenes Polynom. Es sei $P \in C = V(F) \subset \mathbb{A}_K^2$ ein Punkt der zugehörigen affinen ebenen Kurve. Dann heißt P ein *glatter Punkt* von C , wenn gilt

$$\frac{\partial F}{\partial X}(P) \neq 0 \text{ oder } \frac{\partial F}{\partial Y}(P) \neq 0.$$

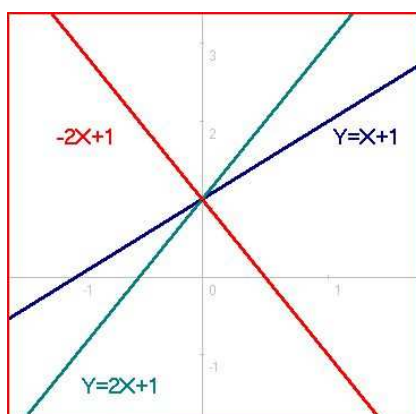
Andernfalls heißt der Punkt *singulär*.

Definition 22.7. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \in K[X, Y]$ ein von null verschiedenes Polynom. Es sei $P \in C = V(F) \subset \mathbb{A}_K^2$ ein Punkt der zugehörigen affinen ebenen Kurve, der (nach linearer Variablentransformation) der Nullpunkt sei. Es sei

$$F = F_d + F_{d-1} + \dots + F_m$$

die homogene Zerlegung von F mit $F_d \neq 0$ und $F_m \neq 0$, $d \geq m$. Dann heißt m die *Multiplizität* der Kurve im Punkt P . Sei $F_m = G_1 \cdots G_m$ die Zerlegung in lineare Faktoren. Dann nennt man jede Gerade $V(G_i)$, $i = 1, \dots, m$, eine *Tangente* an C im Punkt P . Die Vielfachheit von G_i in F_m nennt man auch die *Multiplizität* der Tangente.

Der Punkt ist genau dann glatt, wenn die Multiplizität eins ist. In diesem Fall gibt es genau eine Tangente durch den Punkt, deren Steigung man über die partiellen Ableitungen berechnen kann.



Geraden, die sich im Punkt $(0, 1)$ schneiden

Beispiel 22.8. Seien d verschiedene Geraden L_1, \dots, L_d in der affinen Ebene gegeben, die alle durch den Nullpunkt laufen mögen. Es seien $a_i X + b_i Y =$

$0, i = 1, \dots, d$, die zugehörigen Gleichungen (die nur bis auf einen Skalar definiert sind). Die Vereinigung dieser Geraden wird dann durch das Produkt

$$F = (a_1X + b_1Y) \cdots (a_dX + b_dY)$$

beschrieben. Insbesondere ist $F = F_d$ homogen vom Grad d . Hier definiert jeder Linearfaktor eine Tangente durch den Nullpunkt.

Bemerkung 22.9. Für einen glatten Punkt $P \in C = V(F)$ einer ebenen algebraischen Kurve ist die Multiplizität $m = 1$. Bei $P = (0, 0)$ ist also der lineare Term der Kurvengleichung $F_1 = uX + vY \neq 0$ und es ist

$$\frac{\partial F}{\partial X}(P) = u \text{ und } \frac{\partial F}{\partial Y}(P) = v$$

(da die höheren homogenen Komponenten von F keinen Beitrag zu den partiellen Ableitungen im Nullpunkt leisten). Diese lineare Gleichung ist also die Tangentengleichung. Auch für einen beliebigen glatten Punkt $P = (a, b) \in C$ kann man aus den partiellen Ableitungen von F in P direkt die Tangentengleichung ablesen, und zwar ist die Tangente gegeben durch

$$\frac{\partial F}{\partial X}(P)(X - a) + \frac{\partial F}{\partial Y}(P)(Y - b) = 0.$$

Bemerkung 22.10. Sei $F \in K[X, Y]$ mit zugehöriger ebener algebraischer Kurve C und sei $P \in C = V(F)$ ein glatter Punkt der Kurve. Zu

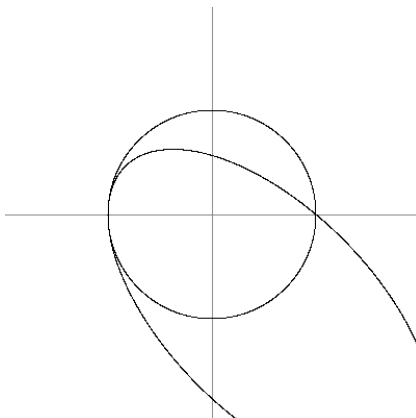
$$F: \mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^1$$

und dem Punkt P gehört die durch die partiellen Ableitungen definierte lineare *Tangentialabbildung* (das *totale Differential*) zwischen den zugehörigen Tangentialräumen, also

$$T_P F = \left(\frac{\partial F}{\partial X}(P), \frac{\partial F}{\partial Y}(P) \right) : T_P \mathbb{A}_K^2 \cong \mathbb{A}_K^2 \longrightarrow T_{F(P)} \mathbb{A}_K^1 = T_0 \mathbb{A}_K^1 \cong \mathbb{A}_K^1$$

$$\text{mit } (s, t) \longmapsto \frac{\partial F}{\partial X}(P)s + \frac{\partial F}{\partial Y}(P)t$$

Da P ein glatter Punkt ist, ist diese lineare Abbildung nicht die Nullabbildung. Die (Richtung der) Tangente von C an P ist der Kern dieser Tangentialabbildung (wobei man bei der Identifizierung der Tangentialebene in P mit der umgebenden affinen Ebene den Punkt P mit dem Nullpunkt identifizieren muss. Die Tangente muss ja durch den Punkt gehen, der Kern gibt nur eine lineare Richtung vor).



Bei einer algebraischen Kurve sind die Schnittpunkte von irreduziblen Komponenten niemals glatt.

Die folgenden beiden Aussagen zeigen, dass ein Kreuzungspunkt zweier irreduzibler Komponenten niemals glatt sein kann.

Lemma 22.11. *Sei $C = V(F)$ eine ebene algebraische Kurve und $F = F_1 \cdots F_n$ die Zerlegung in verschiedene Primfaktoren. Es sei $P \in C$ ein glatter Punkt der Kurve. Dann liegt P auf nur einer Komponente $C_i = V(F_i)$ der Kurve.*

Beweis. Siehe Aufgabe 22.3. □

Korollar 22.12. *Sei $C \subseteq \mathbb{A}_K^2$ eine (Zariski)-zusammenhängende ebene glatte algebraische Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Dann ist C irreduzibel.*

Beweis. Aufgrund von Lemma 22.11 sind die irreduziblen Komponenten der Kurve disjunkt. Dies sind dann aber auch die Zusammenhangskomponenten der Kurve. Also gibt es nur eine irreduzible Komponente und daher ist die Kurve irreduzibel. □

Zum Schluss geben wir noch einen Hinweis, warum man den Restklassenmodul $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ als Kotangententialraum bezeichnet.

Satz 22.13. *Sei K ein Körper und R eine K -Algebra von endlichem Typ, und sei $P \in K - \text{Spek}(R)$ ein Punkt mit zugehörigem maximalen Ideal \mathfrak{m} . Dann ist die Abbildung*

$$d: R \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, f \longmapsto df := \overline{f - f(P)},$$

eine Derivation, d.h. d ist K -linear und es gilt $d(fg) = fdg + gdf$.

Beweis. Es liegt eine kanonische Isomorphie $K \rightarrow R/\mathfrak{m}$ zwischen dem Grundkörper und dem Restkörper vor. Die Abbildung ist wohldefiniert, da wegen $(f - f(P))(P) = 0$ die Funktion $f - f(P)$ zum maximalen Ideal gehört.

Die K -Linearität ist trivial. Die Produktregel folgt aus (im dritten Schritt wird ein Element aus \mathfrak{m}^2 addiert)

$$\begin{aligned}
 fg - (fg)(P) &= fg - f(P)g(P) \\
 &= fg - f(P)g(P) + (f - f(P))(g - g(P)) \\
 &= 2fg - f \cdot g(P) - g \cdot f(P) \\
 &= f(g - g(P)) + g(f - f(P)) \\
 &= fdg + gdf.
 \end{aligned}$$

□

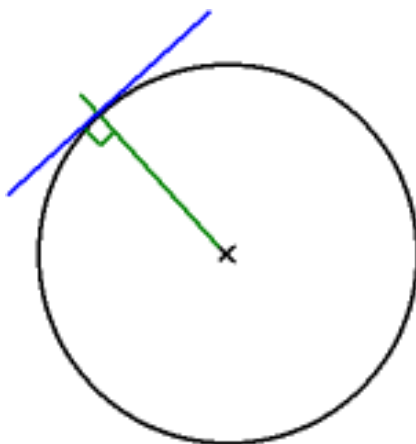
22. ARBEITSBLATT

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 22.1. Sei K ein Körper der positiven Charakteristik $p > 0$. Bestimme die Menge der Polynome $F \in K[T]$ mit formaler Ableitung $F' = 0$.

Aufgabe 22.2. Sei K ein Körper und $F \in K[X, Y]$ ein nichtkonstantes Polynom mit einfachen Primfaktoren und mit zugehöriger ebener Kurve $C = V(F)$. Zeige, dass C nur endlich viele singuläre Punkte besitzt.

Aufgabe 22.3. Beweise Lemma 22.11.



Aufgabe 22.4. Zeige, dass der Einheitskreis über einem Körper der Charakteristik $\neq 2$ glatt ist und bestimme für jeden Punkt die Gleichung der Tangente.

Aufgabe 22.5. Sei K ein Körper.

- a) Zeige, dass der Graph eines Polynoms $F \in K[X]$ eine glatte algebraische Kurve ist.
- b) Seien $F, G \in K[X]$ Polynome ohne gemeinsame Nullstelle. Zeige, dass der Graph der rationalen Funktion F/G ebenfalls eine glatte algebraische Kurve ist.

Aufgabe 22.6.*

Bestimme die singulären Punkte der ebenen algebraischen Kurve

$$V\left(-2X^3 + 3X^2Y - Y + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2.$$

Aufgabe 22.7.*

Es sei $P \in C = V(F) \subset \mathbb{A}_K^2$ ein glatter Punkt einer ebenen irreduziblen Kurve. Zeige, dass der zugehörige lokale Ring ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 22.8. Bestimme für die in Beispiel 8.5 berechnete Trajektorie die Koordinaten der Punkte, wo die Kurve singulär ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.9. (3 Punkte)

Sei K ein Körper der Charakteristik $p \geq 0$. Man charakterisiere die Polynome $F \in K[X, Y]$ mit der Eigenschaft, dass

- (1) die erste partielle Ableitung
- (2) die zweite partielle Ableitung
- (3) beide partiellen Ableitungen

null sind.

Aufgabe 22.10. (3 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $G, H \in K[X, Y]$ Polynome mit $G(P) = H(P) = 0$ für einen bestimmten Punkt $P \in \mathbb{A}_K^2$. Es sei $F = GH$. Zeige, dass jede Tangente von G in P und jede Tangente von H in P auch eine Tangente von F in P ist.

Aufgabe 22.11. (6 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Betrachte die Kurve

$$C = V(x^3 + 5x^2y - 6xy^2 - x^2 - xy + 4y^2).$$

- (1) Bestimme die Tangenten im Nullpunkt.
- (2) Zeige, dass $P = (1, 2)$ ein Punkt der Kurve ist, und berechne die Tangente(n) von C in P über die Ableitung.
- (3) Führe eine Variablentransformation durch derart, dass P in den neuen Variablen der Nullpunkt ist, und bestimme die Tangente(n) in P aus der transformierten Kurvengleichung.

Aufgabe 22.12. (4 Punkte)

Bestimme für die algebraische Kurve

$$C = V(9y^4 + 10x^2y^2 + x^4 - 12y^3 - 12x^2y + 4y^2)$$

die Singularitäten sowie deren Multiplizität und Tangenten.

(Vergleiche dazu Beispiel 8.5.)

23. VORLESUNG - MULTIPLIZITÄT

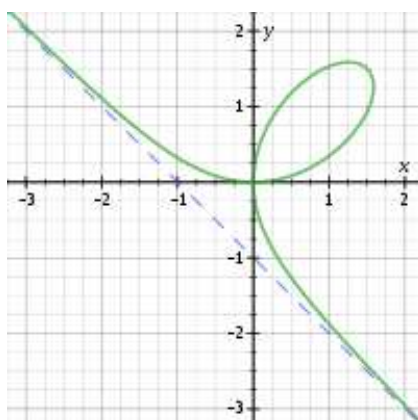
Beispiel 23.1. Das Kartesische Blatt wird durch die Gleichung $F = X^3 + Y^3 - 3XY = 0$ beschrieben (die 3 ist dabei nicht wichtig, und könnte durch eine andere Zahl $\neq 0$ ersetzt werden). Die homogenen Bestandteile der Kurvengleichung sind $F_3 = X^3 + Y^3$ und $F_2 = -3XY$. Damit hat der Nullpunkt des Kartesischen Blattes die Multiplizität zwei und ist singulär, und sowohl die X - als auch die Y -Achse sind Tangenten (mit einfacher Multiplizität). An den übrigen Punkten ist die Kurve glatt (der Grundkörper habe nicht die Charakteristik 3): aus

$$\frac{\partial F}{\partial X} = 3X^2 - 3Y = 0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial Y} = 3Y^2 - 3X = 0$$

folgt $Y = X^2$ und $X = Y^2$, also auch $Y = Y^4$ (ebenso für X). Dann ist $Y = X = 0$ oder X und Y sind beide eine dritte Einheitswurzel (und zwar sind beide 1 oder es sind die beiden anderen dritten Einheitswurzeln). An diesen anderen Verschwindungsstellen der beiden partiellen Ableitungen hat aber F den Wert -1 , diese sind also keine Punkte der Kurve.



Rene Descartes (1596-1650)



Glatte und normale Punkte

Wir wollen zeigen, dass ein Punkt auf einer ebenen algebraischen Kurve genau dann glatt ist, wenn der zugehörige lokale Ring ein diskreter Bewertungsring ist. Dabei ist die Glattheit in einem Punkt extrinsisch unter Bezug auf die umgebende Ebene definiert worden, während die Eigenschaft, ein diskreter Bewertungsring zu sein, nur vom Koordinatenring der Kurve abhängt. Das folgende Lemma erledigt die eine Richtung, für die andere Richtung müssen wir zuerst eine intrinsische Multiplizität für einen lokalen Ring entwickeln.

Lemma 23.2. *Sei K ein Körper, $F \in K[X, Y]$ ein Polynom $\neq 0$ ohne mehrfache Faktoren und sei $P \in C = V(F)$ ein glatter Punkt der Kurve.*

Es sei R der lokale Ring der Kurve im Punkt P . Dann ist R ein diskreter Bewertungsring.

Beweis. Zunächst ist R ein noetherscher lokaler Ring, der aufgrund von Lemma 22.11 ein Integritätsbereich ist. Daher sind die einzigen Primideale das Nullideal und das maximale Ideal \mathfrak{m}_P . Wir werden zeigen, dass das maximale Ideal ein Hauptideal ist.

Wir können annehmen, dass P der Nullpunkt ist, und schreiben F als

$$F = F_d + \dots + F_1$$

mit $F_1 \neq 0$. Da P glatt ist, liegt eine solche Gestalt vor. Durch eine Variablentransformation können wir erreichen, dass $F_1 = Y$ ist. Wir können in F die isoliert stehenden Potenzen von X (die Monome, wo kein Y vorkommt) zusammenfassen und bei den anderen Y ausklammern. Dann lässt sich die Gleichung $F = 0$ schreiben als

$$Y(1 + G) = XH(X),$$

wobei $G \in (X, Y)$ ist. Es ist $1 + G$ eine Einheit in $K[X, Y]_{(X, Y)}$ und erst recht im lokalen Ring $R = K[X, Y]_{(X, Y)}/(F)$ der Kurve. Daher gilt in R die Beziehung

$$Y = \frac{H}{1 + G}X.$$

Also wird das maximale Ideal im lokalen Ring R von X allein erzeugt, sodass nach Satz 21.8 ein diskreter Bewertungsring vorliegt. \square

Die Hilbert-Samuel Multiplizität

Lemma 23.3. *Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal \mathfrak{m} und Restklassenkörper $K = R/\mathfrak{m}$. Dann besitzen die Restklassenmoduln $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ endliche Dimension über K . Wenn R einen Körper K enthält, der isomorph auf den Restklassenkörper abgebildet wird, so sind auch die Restklassenringe R/\mathfrak{m}^n von endlicher Dimension über K .*

Beweis. Wir schreiben den Restklassenmodul $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ als

$$\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \cong \mathfrak{m}^n/(\mathfrak{m}^n)\mathfrak{m}.$$

Damit sind wir in der Situation von Lemma 22.2. Da \mathfrak{m}^n ein endlich erzeugtes Ideal ist, folgt, dass dieser Restklassenmodul endliche Dimension über dem Restklassenkörper besitzt.

Für die Restklassenringe betrachten wir die kurze exakte Sequenz von R -Moduln,

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \longrightarrow R/\mathfrak{m}^{n+1} \longrightarrow R/\mathfrak{m}^n \longrightarrow 0.$$

Dies ist nach unserer Voraussetzung auch eine kurze exakte Sequenz von K -Vektorräumen, so dass sich die K -Dimensionen addieren. Nach dem bereits

bewiesenen steht links ein endlichdimensionaler Raum. Die Aussage folgt nun durch Induktion über n aus dieser Sequenz, wobei der Induktionsanfang durch $R/\mathfrak{m} = K$ gesichert ist. \square

Im Fall einer ebenen algebraischen Kurve $V = V(F) \subset \mathbb{A}_K^2$ und einem Punkt $P = (a, b) \in V$ ist der lokale Ring gegeben durch $K[X, Y]_{(X-a, Y-b)}/(F)$. Der Restklassenkörper dieses lokalen Ringes ist K selbst. Daher sind die Voraussetzungen, die im vorstehenden Lemma auftauchen, alle erfüllt, und alle Dimensionen sind Dimensionen über dem Grundkörper.

Satz 23.4. *Sei $P \in V = V(F) \subset \mathbb{A}_K^2$ ein Punkt auf einer ebenen affinen Kurve. Es sei $R = \mathcal{O}_{V,P}$ der zugehörige lokale Ring mit maximalem Ideal \mathfrak{m} . Dann gilt für die Multiplizität m_P von P die Gleichung*

$$m_P = \dim_K(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) \text{ für } n \text{ hinreichend groß.}$$

Beweis. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \longrightarrow R/\mathfrak{m}^{n+1} \longrightarrow R/\mathfrak{m}^n \longrightarrow 0$$

von K -Vektorräumen. Nach Lemma 23.3 sind die Dimensionen endlich. Dass die Dimensionen von $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ konstant gleich der Multiplizität sind (für n hinreichend groß) ist äquivalent dazu, dass die Differenz zwischen den Dimensionen von R/\mathfrak{m}^{n+1} und R/\mathfrak{m}^n konstant gleich der Multiplizität ist für n hinreichend groß. Dies ist durch Induktion äquivalent dazu, dass

$$\dim(R/\mathfrak{m}^n) = nm_P + c$$

gilt für eine Konstante c und n hinreichend groß. Wir können durch Verschieben der Situation annehmen, dass P der Nullpunkt in der Ebene ist. Sei $\mathfrak{a} = (X, Y)$ das zugehörige maximale Ideal in $S = K[X, Y]$. Dann ist $K[X, Y]/(\mathfrak{a}^n + (F)) = R/\mathfrak{m}^n$, so dass die Aussage dafür zu zeigen ist.

Nach Voraussetzung hat F die Gestalt $F = F_m + F_{m+1} \dots$ mit $m = m_P$. Damit ist insbesondere $F \in \mathfrak{a}^m$. Für ein weiteres Polynom $G \in \mathfrak{a}^{n-m}$ (mit $n \geq m$) ist $GF \in \mathfrak{a}^n$. Daher liegt eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow S/\mathfrak{a}^{n-m} \xrightarrow{F} S/\mathfrak{a}^n \longrightarrow S/(\mathfrak{a}^n, F) = R/\mathfrak{m}^n \longrightarrow 0$$

vor. Dabei folgt die Injektivität links aus einer direkten Gradbetrachtung. Bekanntlich ist die Dimension von S/\mathfrak{a}^n gleich $n(n+1)/2$. Daher ergibt sich für $n \geq m$ die Gleichheit

$$\begin{aligned} \dim(R/\mathfrak{m}^n) &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-m)(n-m+1)}{2} \\ &= \frac{n^2 + n - (n-m)^2 - n + m}{2} \\ &= \frac{2nm - m^2 + m}{2} \\ &= nm - \frac{m(m-1)}{2}. \end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung. \square

Bemerkung 23.5. Satz 23.4 besagt insbesondere, dass die Multiplizität eines Punktes auf einer ebenen Kurve eine Invariante des lokalen Ringes der Kurve in dem Punkt ist, und damit insbesondere nur von intrinsischen Eigenschaften der Kurve abhängt, nicht von der Realisierung in einer umgebenden Ebene. Es gibt für jeden noetherschen lokalen Ring die sogenannte *Hilbert-Samuel Multiplizität*, die über die R/\mathfrak{m} -Dimensionen der Restklassenmoduln $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ definiert wird. Im eindimensionalen Fall ist sie definiert als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1})) ,$$

wobei diese Funktion konstant wird (was nicht trivial ist). Wenn R einen Körper K enthält, der isomorph zum Restkörper ist (was bei lokalen Ringen zu einer Kurve der Fall ist), so ist diese Zahl auch gleich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dim_K(R/\mathfrak{m}^n)}{n} .$$

Satz 23.6. Sei K ein Körper und sei $F \in K[X, Y]$ nichtkonstant ohne mehrfachen Faktor mit zugehöriger algebraischer Kurve $C = V(F)$. Es sei $P = (a, b) \in C$ ein Punkt der Kurve mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = (X - a, Y - b)$ und mit lokalem Ring $R = (K[X, Y]_{\mathfrak{m}})/(F)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1) P ist ein glatter Punkt der Kurve.
- (2) R ist ein diskreter Bewertungsring.
- (3) R ist ein normaler Integritätsbereich.
- (4) Die Multiplizität von P ist eins.

Beweis. Die Implikation (1) \Rightarrow (2) wurde in Lemma 23.2 bewiesen. Die Äquivalenz (2) \Leftrightarrow (3) wurde in Satz 21.8 bewiesen. Die Äquivalenz (1) \Leftrightarrow (4) folgt aus der Definition der Multiplizität. Es bleibt also (2) \Rightarrow (4) zu zeigen, wobei wir unter Verwendung von Satz 23.4 mit der Hilbert-Samuel Multiplizität arbeiten können. Es genügt also zu zeigen, dass für einen lokalen Ring einer ebenen algebraischen Kurve, der ein diskreter Bewertungsring ist, die Restklassenmoduln $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \cong \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^n \mathfrak{m}$ alle eindimensional über dem Restklassenkörper $R/\mathfrak{m} \cong K$ sind. Dies folgt aber wegen $\mathfrak{m}^n = (\pi^n)$ direkt aus dem Lemma von Nakayama. \square

Monomiale Kurven und Multiplizität

Zu einem numerischen Monoid $M \subseteq \mathbb{N}$ das von teilerfremden natürlichen Zahlen $e_1 < e_2 < \dots < e_r$ erzeugt werde, wird der minimale Erzeuger, also e_1 , auch als *Multiplizität* bezeichnet. Es ist zu zeigen, dass dies die richtige Multiplizität ergibt. Dazu sei

$$M_+ = \{m \in M \mid m \geq 1\}$$

und

$nM_+ = \{m \in M \mid \text{es gibt eine Darstellung } m = m_1 + \dots + m_n \text{ mit } m_i \in M_+\}$

Dies sind offensichtlich Monoid-Ideale von M . Es folgt, dass die zugehörigen Mengen $K[nM_+] = \bigoplus_{m \in nM_+} K T^m$ Ideale im Monoidring sind. Und zwar ist $\mathfrak{m} = K[M_+]$ ein maximales Ideal, und die Potenzen davon sind $\mathfrak{m}^n = K[nM_+]$.

Lemma 23.7. *Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid mit (numerischer) Multiplizität e_1 und sei ℓ eine Zahl mit $\mathbb{N}_{\geq \ell} \subseteq M$. Dann gelten für die Mächtigkeit der Differenzmenge $M - nM_+$ die Abschätzungen*

$$ne_1 - \ell \leq \#(M - nM_+) \leq (n - 1)e_1 + \ell.$$

Beweis. Die Abschätzung nach unten folgt daraus, dass die kleinste Zahl in nM_+ genau ne_1 ist, die natürlichen Zahlen $0, 1, \dots, ne_1 - 1$ liegen also außerhalb davon. Dabei liegen die Zahlen $\geq \ell$ in M , so dass von diesen ne_1 Zahlen mindestens $ne_1 - \ell$ zu M , aber nicht zu nM_+ gehören.

Zur Abschätzung nach oben behaupten wir, dass alle Zahlen $\geq (n - 1)e_1 + \ell$ zu nM_+ gehören. Sei $x \geq (n - 1)e_1 + \ell$. Dann ist $x = (n - 1)e_1 + \ell'$ mit $\ell' \geq \ell$ und daher ist $\ell' \in M$. Also liegt direkt eine Zerlegung von x in n Summanden aus M vor. \square

Korollar 23.8. *Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein von teilerfremden Zahlen erzeugtes numerisches Monoid mit numerischer Multiplizität e_1 . Es sei $\mathfrak{m} = (M_+)$ das maximale Ideal des Monoidringes $K[M]$, das dem Nullpunkt entspricht. Dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dim_K (K[M]/\mathfrak{m}^n)}{n} = e_1.$$

Das heißt, dass die numerische Multiplizität mit der Hilbert-Samuel Multiplizität übereinstimmt.

Beweis. Der Restklassenring $K[M]/\mathfrak{m}^n = K[M]/(nM_+)$ hat die Elemente aus $M \setminus nM_+$ als K -Basis. Deren Anzahl ist also die Dimension davon. Aufgrund der in Lemma 23.7 bewiesenen Abschätzungen konvergiert der Ausdruck $\frac{\#(M \setminus nM_+)}{n}$ für $n \mapsto \infty$ gegen e_1 . Daher gilt diese Konvergenz auch für die Dimensionen. \square

23. ARBEITSBLATT

Aufwärmataufgaben

Aufgabe 23.1. Sei R ein kommutativer Ring und sei N ein R -Modul mit R -Untermoduln $L \subseteq M \subseteq N$. Zeige, dass die Restklassenmoduln durch die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M/L \longrightarrow N/L \longrightarrow N/M \longrightarrow 0$$

miteinander in Beziehung stehen.

Aufgabe 23.2. Sei R ein kommutativer Ring und $P = R[X_1, \dots, X_m]$ der Polynomring darüber in m Variablen. Es sei $\mathfrak{m} = (X_1, \dots, X_m)$ das von den Variablen erzeugte Ideal. Zeige, dass $\mathfrak{m}^n = P_{\geq n}$ ist, wobei $P_{\geq n}$ das Ideal in P bezeichnet, das von allen homogenen Polynomen vom Grad $\geq n$ erzeugt wird.

Aufgabe 23.3. Sei R ein kommutativer Ring mit zwei Idealen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$. Es sei $S = R/\mathfrak{b}$ und $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}S$ das Bildideal. Zeige, dass $\mathfrak{a}^n S = \tilde{\mathfrak{a}}^n$ ist.

Aufgabe 23.4.*

Bestimme die Primfaktorzerlegung des Polynoms

$$X^3 + XY^2 \in \mathbb{C}[X, Y]$$

und bestimme die Singularitäten der zugehörigen affinen Kurve samt ihren Multiplizitäten und Tangenten.

Aufgabe 23.5.*

Bestimme die Multiplizität und die Tangenten im Nullpunkt $(0, 0)$ der ebenen algebraischen Kurve

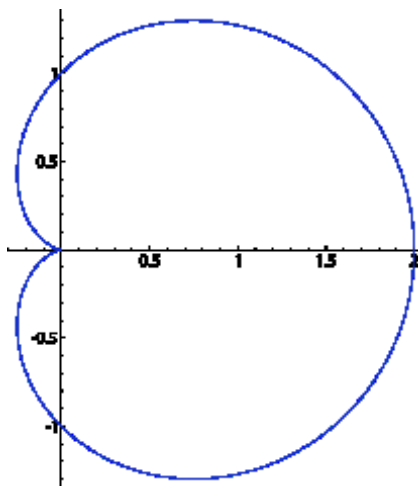
$$C = V(Y^4 + X^3 + 3XY^2 + 2X^2Y) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2.$$

Aufgabe 23.6.*

Bestimme über die partiellen Ableitungen für das durch das Polynom

$$V^3 + U^2V - 2UV + 2U^2 - 4U - 2V$$

gegebene Nullstellengebilde einen singulären Punkt. Führe eine Koordinatentransformation durch, die diesen Punkt in den Nullpunkt überführt. Bestimme die Multiplizität und die Tangenten in diesem Punkt.



Aufgabe 23.7. Bestimme die Singularitäten (mit Multiplizitäten und Tangenten) der durch

$$V((X^2 + Y^2)^2 - 2X(X^2 + Y^2) - Y^2)$$

gegebenen *Kardioide*.

Aufgabe 23.8. Berechne für das durch die Erzeuger 4 und 9 gegebene Monoid M die in den Abschätzungen von Lemma 23.7 auftretenden Ausdrücke bis $n \leq 6$.

In einigen Aufgaben wird die Krull-Dimension eines kommutativen Ringes verwendet. Da wir uns hauptsächlich für Kurven interessieren, denen eindimensionale Ringe entsprechen, werden wir keine systematische Dimensionstheorie entwickeln.

Sei R ein kommutativer Ring. Eine Kette aus Primidealen

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n$$

nennt man *Primidealkette der Länge n* (es wird also die Anzahl der Inklusionen gezählt, nicht die Anzahl der beteiligten Primideale). Die *Dimension* (oder *Krulldimension*) von R ist das Supremum über alle Längen von Primidealketten.

Aufgabe 23.9. Sei R ein Hauptidealbereich, der kein Körper sei. Zeige, dass die Krulldimension von R eins ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 23.10. (4 Punkte)

Berechne für das durch die Erzeuger 5, 8, 11 gegebene Monoid M die in den Abschätzungen von Lemma 23.7 auftretenden Ausdrücke bis $n \leq 5$.

Aufgabe 23.11. (3 Punkte)

Sei $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal in einem kommutativen Ring, das in genau einem maximalen Ideal \mathfrak{m} als einzigem Primoberideal enthalten sei. Zeige, dass dann $R/\mathfrak{a} \cong R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{a}R_{\mathfrak{m}}$ ist. Folgere daraus, dass für ein maximales Ideal \mathfrak{m} in einem noetherschen kommutativen Ring die Isomorphie $R/\mathfrak{m}^n \cong R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}^n R_{\mathfrak{m}}$ für jedes n gilt.

Aufgabe 23.12. (5 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $R = K[X, Y]$ der Polynomring in zwei Variablen. Zeige, dass R die Krulldimension zwei besitzt.

Aufgabe 23.13. (4 Punkte)

Sei R ein noetherscher kommutativer Ring. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

- (1) R hat Krulldimension null.
- (2) R ist ein artinscher Ring.
- (3) R besitzt endlich viele Primideale, die alle maximal sind.
- (4) Es gibt eine natürliche Zahl n mit $\mathfrak{m}^n = 0$ für jedes maximale Ideal \mathfrak{m} .
- (5) Die Reduktion von R ist ein Produkt von Körpern.

Aufgabe 23.14. (3 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring von endlicher Krulldimension d . Zeige, dass die Krulldimension des Polynomrings $R[X]$ mindestens $d + 1$ ist.

(Bemerkung: über einem noetherschen Grundring erhöht sich die Dimension beim Übergang zum Polynomring genau um eins, dies ist aber schwieriger zu beweisen.)

24. VORLESUNG - POTENZREIHENRINGE I

Tangenten bei Parametrisierungen

Satz 24.1. *Es sei K ein unendlicher Körper und*

$$\varphi: \mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^n$$

eine durch n Polynome $\varphi = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ in einer Variablen gegebene Abbildung, deren Bild in der Kurve $C = V(F_1, \dots, F_m)$ liege. Es sei $P = \varphi(Q) \in C$. Dann liegt der (Ableitungs)-Vektor $(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(Q), \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t}(Q))$ im Kern der durch die Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(P) \right)_{ij}$$

definierten linearen Tangentialabbildung

$$(TF)_P: \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^m.$$

Ist $n = 2$ und verschwinden nicht beide Ableitungen von φ und ist P ein glatter Punkt von C , so definiert der Vektor $(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(Q), \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(Q))$ die Richtung der Tangente von C in P .

Beweis. Wegen $\varphi(\mathbb{A}_K^1) \subseteq V(F_1, \dots, F_m)$ ist die Hintereinanderschaltung $F \circ \varphi$ die konstante Abbildung auf den Nullpunkt. Über einem unendlichen Körper sind dann auch die beschreibenden Komponentenpolynome null. Daher ist auch

$$0 = (T(F \circ \varphi))_Q = (TF)_P \circ (T\varphi)_Q,$$

und das ist die Behauptung. Daraus folgt auch der Zusatz, da unter den angegebenen Bedingungen der Kern der Jacobi-Matrix und das Bild der Tangentialabbildung eindimensional sind, also wegen der Inklusion übereinstimmen müssen. \square

Beispiel 24.2. Es sei K der endliche Körper mit $q = p^e$ Elementen, wobei p eine Primzahl und $e \geq 1$ ist. Die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2, t \longmapsto (t^q - t, t^q - t)$$

besitzt den einzigen Bildpunkt $(0, 0)$. Der formale Ableitungsvektor dieser Parametrisierung ist aber

$$(-1, -1).$$

Eine geometrisch konstante Kurve kann also in positiver Charakteristik eine nicht-verschwindende Ableitung besitzen. Der Nullpunkt ist ein glatter Punkt auf sämtlichen Geraden $C = V(aX + bY)$. Die Tangente stimmt mit der Geradengleichung überein, diese annulliert aber nur bei $a = -b$ den Vektor $(-1, -1)$. In Satz 24.1 kann man also nicht auf die Unendlichkeitsvoraussetzung verzichten.

Beispiel 24.3. Wir knüpfen an Beispiel 6.3 an, d.h. wir betrachten die Kurve $V(y^2 - x^2 - x^3)$ mit der Parametrisierung

$$(\varphi(t), \psi(t)) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1)) = (x, y).$$

Die partiellen Ableitungen von F sind

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x - 3x^2 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

Die Jacobimatrix der Parametrisierung ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{pmatrix} = (2t, 3t^2 - 1).$$

Damit ist in der Tat (mit $P = (\varphi(t), \psi(t))$)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(P) & \frac{\partial F}{\partial y}(P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 1 \end{pmatrix} &= (-2(t^2 - 1) - 3(t^2 - 1)^2, 2(t^3 - t)) \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 1 \end{pmatrix} \\ &= -4t(t^2 - 1) - 6t(t^2 - 1)^2 + 2(t^3 - t)(3t^2 - 1) \\ &= -4t^3 + 4t - 6t^5 + 12t^3 - 6t + 6t^5 - 2t^3 - 6t^3 + 2t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für $t = 2$ ergibt sich beispielsweise der Bildpunkt $P = (3, 6)$. Für diesen Wert ist der Ableitungsvektor gleich $(4, 11)$. Die partiellen Ableitungen an P ergeben den Gradienten $(-33, 12)$, der senkrecht zum Tangentialvektor steht. Die Tangente selbst wird durch

$$\{(3, 6) + s(4, 11) \mid s \in K\} \text{ oder als } V(-11x + 4y + 9)$$

beschrieben.

Tangenten bei Raumkurven

Wir beschränken uns zwar hauptsächlich auf den Fall von ebenen Kurven, dennoch kann man auch für Kurven in einer höherdimensionalen Umgebung und überhaupt für beliebige Varietäten mit der Hilfe von Ableitungen die Begriffe glatt und singular definieren. Wir demonstrieren dies kurz für Raumkurven, die durch zwei Polynome $F, G \in K[X, Y, Z]$ in drei Variablen ohne gemeinsame Komponenten gegeben seien (nicht jede Raumkurve lässt sich so beschreiben). In diesem Fall betrachtet man zu einem Punkt $P \in C = V(F, G)$ wieder die *Jacobi-Matrix*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}_P : \mathbb{A}_K^3 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2.$$

Dann ist P ein glatter Punkt der Kurve genau dann, wenn diese Matrix den Rang zwei hat. Der eindimensionale Kern definiert dann die *Tangente*.

Beispiel 24.4. Wir knüpfen an Beispiel 4.6 an, also den Schnitt C der beiden Zylinder, die durch

$$F = x^2 + y^2 - 1 \text{ und } G = x^2 + z^2 - 1$$

gegeben sind. Die partiellen Ableitungen sind

$$\partial F = (2x, 2y, 0) \text{ und } \partial G = (0, 2y, 2z).$$

Ein singulärer Punkt liegt vor, wenn diese durch die Jacobi-Matrix definierte Abbildung einen Rang ≤ 1 hat, und dies ist genau dann der Fall, wenn die beiden partiellen Ableitungstupel linear abhängig sind (und es ein Punkt der zugehörigen Varietät ist). Wegen den beiden Nullen kann lineare Abhängigkeit nur bei $x = z = 0$ vorliegen, und dort liegt sie für beliebiges y auch vor. Bei $x = z = 0$ ergibt allerdings nur $y = \pm 1$ ein Punkt der Kurve, und das sind die zwei singulären Punkte von C . Dies sind natürlich genau die beiden Schnittpunkte der beiden Kreise, die nach Beispiel 4.6 die irreduziblen Komponenten von C sind.

Wenn die Radien der beiden Zylinder nicht gleich groß sind, sagen wir $r_1 \neq r_2$, so funktioniert die Bestimmung der singulären Punkte zunächst genau gleich, und man gelangt zur Bedingung $y^2 = r_1$ und $y^2 = r_2$, die nicht beide zugleich erfüllt sein können. Bei unterschiedlichen Radien ist die Schnittkurve also glatt.

Potenzreihenringe

Definition 24.5. Sei R ein kommutativer Ring und T_1, \dots, T_n eine Menge von Variablen. Eine *formale Potenzreihe* ist ein Ausdruck der Form

$$F = \sum_{\nu} a_{\nu} T^{\nu} = \sum_{\nu} a_{\nu} T_1^{\nu_1} \dots T_n^{\nu_n}.$$

wobei $a_{\nu} \in R$ ist für alle $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$.

Man addiert zwei Potenzreihen komponentenweise und multipliziert sie in der gleichen Weise wie Polynome. In einer Variablen hat man

$$F \cdot G = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j T^j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T^k$$

mit $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$.

Definition 24.6. Sei R ein kommutativer Ring. Dann bezeichnet man mit

$$R[[X_1, \dots, X_n]]$$

den *Potenzreihenring in n Variablen* (oder den *Ring der formalen Potenzreihen in n Variablen*).

Wir interessieren uns hauptsächlich für den Potenzreihenring $K[[T]]$ in einer Variablen über einem Körper K . Mit Hilfe von Potenzreihenringen kann man „formale Parametrisierungen“ für beliebige algebraische Kurven in jedem Punkt finden, was wir in der nächsten Vorlesung behandeln werden. Zunächst müssen wir einige grundlegende Eigenschaften der Potenzreihenringe verstehen.

Satz 24.7. *Sei K ein Körper und sei $K[[T]]$ der Ring der formalen Potenzreihen in einer Variablen. Dann ist eine formale Potenzreihe $F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ genau dann eine Einheit, wenn der konstante Term $a_0 \neq 0$ ist.*

Beweis. Die angegebene Bedingung ist notwendig, da die Abbildung

$$K[[T]] \longrightarrow K, T \longmapsto 0,$$

die eine Potenzreihe auf den konstanten Term schickt, ein Ringhomomorphismus ist. Für die Umkehrung müssen wir eine Potenzreihe $G = \sum_{j=0}^{\infty} b_j T^j$ mit

$$FG = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j T^j \right) = 1$$

angeben. Für b_0 ergibt sich daraus die Bedingung $a_0 b_0 = 1$, die wegen $a_0 \neq 0$ eine eindeutige Lösung besitzt, nämlich $b_0 = a_0^{-1}$. Nehmen wir induktiv an, dass die Koeffizienten b_j für $j < n$ schon konstruiert seien derart, dass sämtliche Koeffizienten c_k , $1 \leq k < n$, der Produktreihe FG gleich null sind. Für den n -ten Koeffizienten ergibt sich die Bedingung

$$0 = c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0.$$

Dabei sind bis auf b_n alle Werte festgelegt, und wegen $a_0 \neq 0$ ergibt sich eine eindeutige Lösung für b_n . \square

Korollar 24.8. *Sei K ein Körper und $R = K[[T]]$ der Potenzreihenring in einer Variablen. Dann ist R ein diskreter Bewertungsring.*

Beweis. Zunächst ist R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = (T)$. Wenn nämlich eine Potenzreihe F keine Einheit ist, so muss nach Satz 24.7 der konstante Term von F null sein. Dann kann man aber $F = T\tilde{F}$ mit der umindizierten Potenzreihe \tilde{F} schreiben. Die Nullteilerfreiheit folgt durch Betrachten der Anfangsterme: Sind F und G von 0 verschiedene Potenzreihen, so ist

$$F = a_k T^k + a_{k+1} T^{k+1} + \dots$$

und

$$G = b_\ell T^\ell + a_{\ell+1} T^{\ell+1} + \dots$$

mit $a_k, b_\ell \neq 0$. Für die Produktreihe ist dann der Koeffizient

$$c_{k+\ell} = a_k b_\ell \neq 0,$$

da die kleineren Koeffizienten alle null sind. Es bleibt also noch noethersch zu zeigen. Es ergibt sich aber direkt, dass ein Hauptidealbereich vorliegt, und

zwar wird jedes Ideal $\neq 0$ von T^j erzeugt, wobei j das Minimum über alle Indizes von Koeffizienten $\neq 0$ von Potenzreihen in dem Ideal ist. \square

Man kann Potenzreihen nicht nur addieren und multiplizieren, sondern auch, unter gewissen Zusatzbedingungen, Potenzreihen in andere Potenzreihen einsetzen. Diese Operation entspricht der Hintereinanderschaltung von Abbildungen.

Definition 24.9. Es sei K ein Körper und $F = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \in K[[T]]$ eine Potenzreihe. Es sei $G = \sum_{j=0}^{\infty} b_j T^j$ eine weitere Potenzreihe mit konstantem Term null. Dann nennt man die Potenzreihe

$$\begin{aligned} F(G) &= a_0 + a_1 \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j T^j \right) + a_2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j T^j \right)^2 + a_3 \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j T^j \right)^3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k T^k \end{aligned}$$

die *eingesetzte Potenzreihe*. Ihre Koeffizienten sind durch

$$c_k = \sum_{s=0}^k a_s \left(\sum_{j_1+\dots+j_s=k} b_{j_1} \cdots b_{j_s} \right)$$

festgelegt. Hierbei wird über alle geordneten s -Tupel $(j_1, \dots, j_s) \in \mathbb{N}_+^s$ summiert.

Man beachte in der vorstehenden Definition, dass wegen $b_0 = 0$ nur über $j \geq 1$ summiert wird, so dass alle beteiligten Summen endlich sind. Die Formeln für das Einsetzen sind derart, dass sie bei Polynomen das übliche Einsetzen von Polynomen in Polynome ergeben. Einsetzen von Potenzreihen in Potenzreihen liefert wieder einen Einsetzungshomomorphismus der Potenzreihenringe.

Lemma 24.10. Sei K ein Körper mit dem Potenzreihenring $K[[T]]$. Es sei $G \in K[[S]]$ eine Potenzreihe mit konstantem Term null. Dann definiert G durch Einsetzen einen K -Algebra-Homomorphismus

$$K[[T]] \longrightarrow K[[S]], F \longmapsto F(G).$$

Beweis. Die Abbildung ist wohldefiniert. Um zu zeigen, dass ein Ringhomomorphismus vorliegt, muss man lediglich gewisse Koeffizienten vergleichen. Diese hängen immer nur von endlich vielen Koeffizienten der beteiligten Potenzreihen an, so dass sich diese Aussage aus dem polynomialen Fall ergibt. \square

Lemma 24.11. Sei K ein Körper, $K[[T]]$ der Potenzreihenring über K und $G = \sum_{j=0}^{\infty} b_j T^j$ mit $b_0 = 0$ und $b_1 \neq 0$. Dann definiert der durch $T \mapsto G$ definierte Einsetzungshomomorphismus einen K -Algebra-Automorphismus auf $K[[T]]$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass es eine Potenzreihe $F = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i$ gibt mit $F(G) = T$. Dabei muss $a_0 = 0$ und $a_1 = b_1^{-1}$ sein. Sei nun die Potenzreihe F mit der gewünschten Eigenschaft bis zum $(k-1)$ -Koeffizienten bereits konstruiert. Für den Koeffizienten c_k hat man nach die Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &= c_k \\ &= \sum_{s=0}^k a_s \left(\sum_{j_1+\dots+j_s=k} b_{j_1} \cdots b_{j_s} \right) \\ &= \sum_{s=0}^{k-1} a_s \left(\sum_{j_1+\dots+j_s=k} b_{j_1} \cdots b_{j_s} \right) + a_k b_1^k. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich eine eindeutig lösbare Bedingung an a_k .

Wir betrachten nun die Hintereinanderschaltung

$$K[[T]] \xrightarrow{T \mapsto F} K[[T]] \xrightarrow{T \mapsto G} K[[T]].$$

Dabei ist die Gesamtabbildung der Einsetzungshomomorphismus $T \mapsto T$, und das ist die Identität. Insbesondere ist die hintere Abbildung surjektiv. Da $K[[T]]$ nach Korollar 24.8 ein diskreter Bewertungsring, sind die Ideale darin bekannt, und nur das Nullideal kommt als Kern der Abbildung in Frage. Die Abbildung ist also auch injektiv und damit bijektiv. \square

24. ARBEITSBLATT

Aufwärmataufgaben

Aufgabe 24.1. Beschreibe ein Beispiel einer glatten Kurve $C \subset \mathbb{A}_K^2$ mit einer Parametrisierung, deren Differential an mindestens einem Punkt verschwindet.

Aufgabe 24.2. Betrachte das Achsenkreuz $V(xy) \subset \mathbb{A}_K^2$ und den zum Nullpunkt gehörigen lokalen Ring R mit maximalem Ideal \mathfrak{m} . Beschreibe explizit eine K -Basis für die Restklassenringe R/\mathfrak{m}^n und bestimme die Dimensionen davon.

Aufgabe 24.3. Sei K ein Körper und $K[[T]]$ der Potenzreihenring. Gebe die inverse Potenzreihe zu $1 - T$ an.

Aufgabe 24.4. Sei K ein Körper, $\mathfrak{m} = (T) \subset K[T]$ das zum Nullpunkt gehörige maximale Ideal mit der Lokalisierung $R = K[T]_{\mathfrak{m}}$. Definiere einen K -Algebra-Homomorphismus

$$\varphi: R \longrightarrow K[[T]]$$

mit $\varphi(T) = T$, wobei $K[[T]]$ den Ring der formalen Potenzreihen bezeichnet.

Aufgabe 24.5. Berechne die ersten fünf Glieder (bis einschließlich c_4) der eingesetzten Potenzreihe $F(G)$ im Sinne von Definition.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 24.6. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für ein irreduzibles reelles Polynom $F \in \mathbb{R}[X, Y]$ derart, dass beide partiellen Ableitungen übereinstimmen und nicht konstant sind. Zeige, dass dies über \mathbb{C} nicht möglich ist.

Aufgabe 24.7. (3 Punkte)

Betrachte die Kurve $C = V(X^2 - Y^2 - Y^3)$ mit der in Beispiel 24.3 besprochenen Parametrisierung. Bestimme die singulären Punkte der Kurve zusammen mit den Multiplizitäten und Tangenten. Berechne ebenfalls die Bildpunkte und die Tangenten für die Parameterwerte $t = -1, 0, 1$.

Aufgabe 24.8. (3 Punkte)

Beschreibe eine formale Potenzreihe über \mathbb{C} , die in keiner Umgebung des Nullpunktes konvergiert.

Aufgabe 24.9. (3 Punkte)

Sei K ein Körper. Vergleiche die beiden Ringe

$$(K[X])[[Y]] \text{ und } (K[[Y]])[X].$$

Aufgabe 24.10. (6 Punkte)

Sei R ein noetherscher kommutativer Ring. Man zeige, dass $R[[T_1, \dots, T_n]]$ noethersch ist.

Hinweis: Lassen Sie sich vom Beweis des Hilbertschen Basissatzes inspirieren!

Lösung in Potenzreihen für algebraische Kurven

Sei $F \neq 0$ ein Polynom, das die ebene algebraische Kurve C beschreibe, und sei $P = (0, 0) \in C$ vorausgesetzt (was keine Einschränkung ist, und durch Verschiebung immer erreicht werden kann). Wie kann man die Kurve im Nullpunkt mittels Potenzreihen beschreiben, wann gibt es also einen durch nichtkonstante Potenzreihen G und H mit konstantem Term 0 definierten Ringhomomorphismen

$$K[X, Y] \longrightarrow K[[T]] \text{ mit } X \longmapsto G \text{ und } Y \longmapsto H$$

mit $F(G, H) = 0$ (also einen Ringhomomorphismus $K[X, Y]/(F) \rightarrow K[[T]]$). Es geht also um Lösungen der Gleichung

$$F(X, Y) = 0$$

in Potenzreihen, die das Verhalten der Kurve um die Punktlösung 0 herum genauer beschreiben.

Der grundsätzliche Ansatz ist hier ein *Potenzreihenansatz*, wie er beispielsweise auch in der Theorie der Differentialgleichungen verwendet wird. Man setzt

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k \text{ und } H = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell T^\ell$$

mit zunächst unbestimmten Koeffizienten a_k und b_ℓ an. Das direkte Einsetzen in die beschreibende Gleichung $F = 0$ und Ausmultiplizieren ergibt dann einen prinzipiell unendlichen Ausdruck. Allerdings ist für jedes T^k der zugehörige Ausdruck für den Koeffizienten nur durch endlich viele Daten bestimmt, und zwar sind dafür nur die Koeffizienten von F, G und H unterhalb des Grades k relevant. Da $F(G, H) = 0$ sein soll, müssen die Koeffizienten von F, G, H so sein, dass sich als Koeffizient zu T^k stets null ergibt.

Man sucht dann nach Bedingungen, wann es dafür Lösungen gibt, wie sie aussehen und ob sie eindeutig sind. Die Bedingung $a_0 = b_0 = 0$ ist dabei eine *Anfangsbedingung*, die widerspricht, dass die Potenzreihenlösung durch den Nullpunkt gehen soll.

Es ergibt sich schnell eine Bedingung an die linearen Terme der Potenzreihen (also an a_1 und b_1), die man als eine weitere Rechtfertigung dafür ansehen kann, dass wir die Linearfaktoren des ersten homogenen Bestandteiles F_m in der homogenen Zerlegung von F als Tangentengleichungen interpretiert haben.

Lemma 25.1. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \in K[X, Y]$ ein Polynom mit homogener Zerlegung $F = F_d + \dots + F_m$ mit*

$d \geq m \geq 1$ und $F_m \neq 0$. Es sei

$$F_m = \prod_{\lambda=1}^m (u_\lambda X + v_\lambda Y)$$

die Faktorzerlegung in Linearfaktoren (diese Linearfaktoren definieren also die Tangenten von $C = V(F)$ an $P = (0, 0)$). Es seien

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \quad \text{und} \quad H = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell T^\ell \in K[[T]]$$

Potenzreihen, die eine Lösung der Kurvengleichung $F = 0$ durch den Nullpunkt beschreiben (d.h. $a_0 = b_0 = 0$). Dann ist $u_\lambda a_1 + v_\lambda b_1 = 0$ für ein λ , d.h. der lineare Term der Potenzreihen ist durch eine der Tangenten vorgegeben.

Beweis. Wir setzen

$$G = a_1 T + a_2 T^2 + \dots \quad \text{und} \quad H = b_1 T + b_2 T^2 + \dots$$

in F ein. In einem homogenen Bestandteil F_k , der ja eine Summe von Ausdrücken der Form $c_{ij} X^i Y^j$ mit $i + j = k$ ist, kann man sofort T^k ausklammern, und zwar ergibt sich ein Ausdruck der Form

$$F_k(G, H) = \left(\sum_{i+j=k} c_{ij} a_1^i b_1^j \right) T^k + \left(\sum_{i+j=k} c_{ij} (i a_1^{i-1} a_2 b_1^j + j a_1^i b_1^{j-1} b_2) \right) T^{k+1} + \dots$$

In den Koeffizient von T^k gehen also a_1, b_1 in einer übersichtlichen Form über F_k ein, aber auch kompliziertere Terme, die von F_ℓ , $\ell < k$, herrühren. Auf F_m angewandt, wo ja keine kleineren homogenen Komponenten mitberücksichtigt werden müssen, heißt dies, dass

$$\sum_{i+j=m} c_{ij} a_1^i b_1^j = 0$$

die entscheidende Gleichung für a_1 und b_1 ist. Dies ist aber nichts anderes als die Bedingung $F_m(a_1, b_1) = 0$. Da F_m ein Produkt von Linearfaktoren ist, muss (a_1, b_1) einen der Linearfaktoren annullieren, was die behauptete Aussage ist. \square

Man beachte, dass im vorstehenden Lemma die Möglichkeit $a_1 = b_1 = 0$ nicht ausgeschlossen ist. In der Tat gibt es nur unter zusätzlichen Bedingungen eine Realisierung einer Kurve mittels Potenzreihen entlang einer vorgegebenen Tangente, siehe Satz 25.2 und die Beispiele weiter unten.

Der Rechenaufwand zur Bestimmung einer Potenzreihenlösung lässt sich wesentlich verringern, wenn man sich auf „Graphlösungen“ beschränkt, wo die

eine Potenzreihe einfach ein lineares Polynom ist (und zwar eines, das durch eine Tangente gegeben ist), und die zweite eine zu bestimmende Potenzreihe. Das ist häufig keine wesentliche Einschränkung, wie aus Lemma 24.11 folgt. Mit diesem Lemma können wir nämlich die Potenzreihen $G, H \in K[[T]]$ einfach transformieren, wenn nicht beide lineare Terme verschwinden. Sei hierzu $G = a_1T + \dots$, $a_1 \neq 0$ angenommen. Mit einer geeigneten Potenzreihe $U(T)$ ist $U(G(T)) = T$ und $U(H(T)) = \tilde{H}(T)$. Man schaltet also einen Potenzreihenautomorphismus dahinter, damit die Hintereinanderschaltung

$$K[X, Y] \xrightarrow{X \mapsto G, Y \mapsto H} K[[T]] \xrightarrow{T \mapsto U(T)} K[[T]]$$

die besonders einfache Gestalt $X \mapsto T$, $Y \mapsto \tilde{H}$ bekommt. Dies bedeutet, dass man die Kurve als Graph zu einer formalen Funktion in einer Variablen realisieren möchte.

Satz 25.2. *Sei K ein Körper und sei $F \in K[X, Y]$ ein Polynom $\neq 0$ mit $(0, 0) \in C = V(F)$ und sei $F = F_d + \dots + F_m$ die homogene Zerlegung von F mit $d \geq m$ und mit $F_m \neq 0$. Es sei $uX + vY$ ein einfacher Linearfaktor von F_m (also ein lineares Polynom, das eine Tangente mit Multiplizität 1 definiert). Dann gibt es Potenzreihen*

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n, \quad H = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell T^\ell \in K[[T]]$$

mit $F(G, H) = 0$ und mit konstantem Term $a_0, b_0 = 0$ und mit $a_1u + b_1v = 0$. Dabei kann eine der Potenzreihen als ein lineares Polynom gewählt werden.

Beweis. Durch eine lineare Variablentransformation können wir annehmen, dass $uX + vY = Y$ ist. Wir zeigen, dass es dann eine Potenzreihenlösung mit $G = T$ und mit (zu konstruierendem) $H = b_2T^2 + b_3T^3 + \dots$ gibt. Wegen $a_1 = 1$ und $b_1 = 0$ erfüllt das die angegebene lineare (Tangenten)Bedingung. Sei $F = \sum_{i,j} c_{ij} X^i Y^j$. Es ist $c_{m,0} = 0$, da andernfalls Y kein Linearfaktor von F_m sein könnte, und es ist $c_{m-1,1} \neq 0$, da sonst Y ein Linearfaktor mit einer Multiplizität ≥ 2 wäre.

Wir zeigen, dass es bei diesen Anfangsdaten eine eindeutig bestimmte Potenzreihe $H = b_2T^2 + b_3T^3 + \dots$ gibt. Einsetzen von G und H in F ergibt für jedes k eine Bedingung, da der resultierende Koeffizient zu T^k gleich null sein muss. Der k -te Koeffizient ist eine Summe von Ausdrücken der Form

$$c_{ij} b_{\ell_1} \cdots b_{\ell_j} \quad \text{mit} \quad i + \sum_{\rho=1}^j \ell_\rho = k$$

(diese Ausdrücke kommen mehrfach mit einem gewissen Multinomialkoeffizienten vor). Da $\ell_\rho \geq 2$ ist, kommt für $k < m + \ell - 1$ der Term b_ℓ nicht vor. Der Term b_ℓ kommt erstmalig im $k = (m + \ell - 1)$ -ten Koeffizienten vor, und zwar in der einzigen Weise

$$c_{m-1,1} b_\ell.$$

Ansonsten kommen in diesem Koeffizienten nur die c_{ij} und b_r mit $r < \ell$ vor. Da nach Voraussetzung $c_{m-1,1} \neq 0$ ist, ist dadurch der Wert von b_ℓ eindeutig festgelegt. Die Koeffizienten b_ℓ werden also induktiv konstruiert, wobei die Werte jeweils eindeutig durch die Bedingung an die Koeffizienten festgelegt sind. \square

Beispiel 25.3. Wir betrachten die ebene affine Kurve vom Grad drei, die durch die Gleichung $F = X^3 + XY + Y = 0$ gegeben ist. Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial F}{\partial X} = 3X^2 + Y \text{ und } \frac{\partial F}{\partial Y} = X + 1.$$

Die zweite Ableitung ist nur bei $X = -1$ null, dort hat aber F den Wert -1 , d.h. die Kurve ist glatt. Im Nullpunkt haben die partiellen Ableitungen den Wert $(0, 1)$. Die zugehörige Tangente ist also die X -Achse, was dazu passt, dass der lineare Term der Kurvengleichung Y ist.

Wir berechnen die Potenzreihe $Y = H(T) = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell T^\ell$, die die Kurve im Nullpunkt als Graph beschreibt (es ist $X = T$). Die Anfangsbedingungen sind $b_0 = b_1 = 0$. Für die folgenden Koeffizienten von H müssen wir aus der Gleichung

$$F(T, H) = T^3 + TH + H = 0,$$

also

$$T^3 + T(b_2T^2 + b_3T^3 + \dots) + (b_2T^2 + b_3T^3 + \dots) = 0$$

über die Koeffizienten der T^k die Bedingungen an b_ℓ herauslesen.

b_2 . Der zweite Koeffizient liefert sofort $b_2 = 0$.

b_3 . Der dritte Koeffizient liefert die Bedingung $1 + b_3 = 0$, woraus $b_3 = -1$ folgt.

Die folgenden Koeffizienten liefern die Bedingung $b_{\ell-1} + b_\ell = 0$, so dass also die folgenden b_ℓ abwechselnd 1 und -1 sind. Man hat also eine einfache Rekursionsformel und es ist

$$H = -T^3 + T^4 - T^5 + T^6 - T^7 + \dots$$

Die Umformung der Kurvengleichung in

$$Y = \frac{-X^3}{1+X}$$

zeigt, dass hier der Graph einer rationalen Funktion (mit einem Pol bei $X = -1$) vorliegt. Die angegebene Potenzreihe beschreibt also den Graph einer rationalen Funktion als Graph einer formal-analytischen Funktion.

Beispiel 25.4. Wir betrachten das Kartesische Blatt, das durch $X^3 + Y^3 - 3XY = 0$ gegeben ist, im Nullpunkt und bezüglich der durch $Y = 0$ gegebenen Tangente und wollen die Potenzreihe bestimmen, mit der sich der „Zweig“ der Kurve, der diese Tangente definiert, als Graph beschreiben lässt. Wir setzen also $X = T$ und $H = b_2T^2 + b_3T^3 + b_4T^4 + \dots$ an und haben

diese Koeffizienten zu bestimmen (die Charakteristik von K sei nicht 3). Die Koeffizienten b_ℓ sind durch die Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &= T^3 + H^3 - 3TH \\ &= T^3 + (b_2T^2 + b_3T^3 + \dots)^3 - 3T(b_2T^2 + b_3T^3 + \dots) \end{aligned}$$

festgelegt. Das Einsetzen bzw. Ausmultiplizieren dieser Potenzreihe liefert zum ersten Mal für $k = 3$ eine Bedingung. Der Summand X^3 (bzw. T^3) muss überhaupt nur einmal berücksichtigt werden, nämlich für $k = 3$. Der Summand Y^3 muss erst ab $k \geq 6$ berücksichtigt werden, da ja $Y = H$ ein Vielfaches von T^2 ist. Der Summand XY muss ab $k = 3$ berücksichtigt werden.

b_2 . Hier hat man die Bedingung

$$1 - 3b_2 = 0,$$

woraus sich $b_2 = \frac{1}{3}$ ergibt.

b_3 . Dies taucht erstmals in der Bedingung für den vierten Koeffizienten auf. Dort steht es aber isoliert, so dass $b_3 = 0$ sein muss.

b_4 . Aus dem gleichen Grund ist $b_4 = 0$.

b_5 . Hierfür ist der sechste Koeffizient entscheidend, und dabei ist jetzt auch Y^3 zu berücksichtigen. Es ergibt sich die Bedingung

$$b_2^3 - 3b_5 = 0,$$

also $b_5 = \frac{1}{81}$.

b_6, b_7, b_8 . Der Summand

$$Y^3 = (b_2T^2 + b_5T^5 + \dots)(b_2T^2 + b_5T^5 + \dots)(b_2T^2 + b_5T^5 + \dots)$$

leistet erstmalig wieder für den neunten Koeffizienten einen Beitrag, und zwar ist dieser $3b_2^2b_5$. Dies bedeutet, dass b_6 und b_7 isoliert stehen und daher null sein müssen. Für b_8 ergibt sich die Bedingung

$$3b_2^2b_5 - 3b_8 = 0$$

und daher ist $b_8 = \frac{1}{729}$.

Die Anfangsglieder der Potenzreihe H , die den einen Kurvenzweig im Nullpunkt als Graph beschreibt, ist also

$$H = \frac{1}{3}T^2 + \frac{1}{81}T^5 + \frac{1}{729}T^8 + \dots$$

Beispiel 25.5. Wir betrachten die durch $X^3 - Y^2 = 0$ definierte Neilsche Parabel. Hier ist der Nullpunkt singular, und es gibt nur eine Tangente, nämlich $Y = 0$, diese hat aber die Multiplizität zwei, d.h. Satz 25.2 ist hier nicht anwendbar. Wir werden zeigen, dass es überhaupt keine Potenzreihenlösung im Nullpunkt mit nicht verschwindendem linearen Term gibt.

Seien dazu $X = G = a_1T + a_2T^2 + \dots$ und $Y = H = b_1T + b_2T^2 + \dots$ Potenzreihen, die die Kurvengleichung erfüllen. Wir setzen in die Kurvengleichung

ein und erhalten für den zweiten Koeffizient die Bedingung $-b_1^2 = 0$, woraus $b_1 = 0$ folgt. Für den dritten Koeffizienten ergibt sich hingegen $a_1^3 = 0$, also wieder $a_1 = 0$.

Dennoch gibt es Potenzreihenlösungen für die Neilsche Parabel durch den Nullpunkt. Hierzu kann man einfach die monomiale Lösung $G = T^2$ und $H = T^3$ nehmen (die ja sogar eine Bijektion zwischen der affinen Geraden und der Neilschen Parabel stiftet). Der lineare Term davon ist freilich null.

Bemerkung 25.6. Sei $K = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$ und $F \in K[X, Y]$. Bei

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(P), \frac{\partial F}{\partial y}(P) \right) \neq (0, 0),$$

wenn also P ein regulärer Punkt der Funktion F ist (oder, äquivalent, ein glatter Punkt von $C = V(F - F(P))$), so sichert der Satz über implizite Funktionen, dass sich die Kurve in einer (metrischen) Umgebung des Punktes als Graph einer differenzierbaren Funktion darstellen lässt.

25. ARBEITSBLATT

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 25.1.*

Bestimme für die ebene algebraische Kurve

$$V(X^3 + Y^2 - XY + X)$$

eine nichtkonstante Potenzreihenlösung $X = F(Y)$ im Nullpunkt bis zum sechsten Glied.

Aufgabe 25.2.*

Bestimme für die ebene algebraische Kurve

$$V(X^2Y + X^2 + Y^2 - 5XY + Y)$$

eine nicht-konstante Potenzreihenlösung $Y = F(X)$ im Nullpunkt bis zur fünften Ordnung.

Die folgenden Aufgaben beschäftigen sich mit der Kompletzierung eines lokalen Ringes.

Aufgabe 25.3. Betrachte zu einem lokalen Ring R mit maximalem Ideal \mathfrak{m} das Diagramm

$$\longrightarrow R/\mathfrak{m}^4 \longrightarrow R/\mathfrak{m}^3 \longrightarrow R/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow R/\mathfrak{m}.$$

Dabei sind die Abbildungen die kanonischen Projektionen $\varphi_n : R/\mathfrak{m}^{n+1} \rightarrow R/\mathfrak{m}^n$, die durch die Idealinklusionen $\mathfrak{m}^{n+1} \subseteq \mathfrak{m}^n$ induziert werden. Eine Folge von Elementen

$$a_n \in R/\mathfrak{m}^n$$

heißt *verträglich*, wenn $\varphi_n(a_{n+1}) = a_n$ gilt für alle n . Definiere eine Ringstruktur auf der Menge aller verträglichen Elemente (diesen Ring nennt man die *Komplettierung* von R .) Zeige ferner, dass es einen kanonischen Ringhomomorphismus von R in die Komplettierung gibt.

Aufgabe 25.4. Sei R ein eindimensionaler lokaler noetherscher kommutativer Ring. Zeige, dass die kanonische Abbildung von R in die Komplettierung von R injektiv ist.

Bemerkung: Die Injektivität gilt für jeden noetherschen lokalen Ring, ist aber schwieriger zu beweisen.

Aufgabe 25.5. Sei R ein kommutativer Ring und I ein Ideal. Zeigen Sie, dass durch

$$\{x + I^n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in R)$$

Umgebungsbasen definiert werden. Zeigen Sie außerdem, dass die auf R induzierte Topologie genau dann hausdorffsch ist, wenn $\bigcap_n I^n = \{0\}$.

Bemerkung: Die Komplettierung eines lokalen Ringes bezüglich seines maximalen Ideals entspricht dann genau der (topologischen) Komplettierung bezüglich dieser Topologie.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 25.6. (4 Punkte)

Betrachte die Kardioide

$$V((X^2 + Y^2)^2 - 2X(X^2 + Y^2) - Y^2)$$

im Punkt $(2, 0)$. Bestimme eine formale Parametrisierung (bis zum fünften Term) der Kurve in diesem Punkt in Abhängigkeit von einem Tangentenparameter.

Aufgabe 25.7. (4 Punkte)

Betrachte den Einheitskreis $X^2 + Y^2 = 1$ im Punkt $(1, 0)$. Bestimme Potenzreihen G und $H \in K[[T]]$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ und mit $G(T)^2 + H(T)^2 = 1$.

Aufgabe 25.8. (4 Punkte)

Betrachte die Neilsche Parabel $C = V(Y^3 - X^2)$ im Punkt $(1, 1)$. Finde eine Parametrisierung der Kurve in diesem Punkt mit Potenzreihen (bis zum fünften Glied) derart, dass eine Potenzreihe davon ein lineares Polynom ist.

Aufgabe 25.9. (3 Punkte)

Sei K ein Körper. Eine *formale Laurentreihe* ist eine unendliche Summe der Form

$$F = \sum_{n=k}^{\infty} a_n T^n \text{ mit } a_n \in K \text{ und } k \in \mathbb{Z}.$$

Zeige, dass der Ring der formalen Laurentreihen (mit geeigneten Ringoperationen) isomorph zum Quotientenkörper des Potenzreihenringes $K[[T]]$ ist.

Aufgabe 25.10. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[T]$ der Polynomring in einer Variablen. Es sei R die Lokalisierung von $K[T]$ am maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (T)$. Zeige, dass die Kompletterung von R isomorph zum Potenzreihenring $K[[T]]$ ist.

Aufgabe 25.11. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $R = K[[T]]$ der Potenzreihenring. Zeige, dass es in R keine Quadratwurzel für T gibt. Zeige ferner, dass für $K = \mathbb{Z}/(7)$ das Element $T + 2$ eine Quadratwurzel in R besitzt, und gebe die ersten fünf Koeffizienten von einer Quadratwurzel davon an.

Aufgabe 25.12. (5 Punkte)

Sei $F \in K[X, Y]$ ein irreduzibles Polynom und $R = K[X, Y]/(F)$ der integrale Koordinatenring der ebenen Kurve $C = V(F)$. Es sei $R \rightarrow S = R^{\text{norm}}$ die Normalisierung von R und es sei $R \rightarrow K[[T]]$ der Ringhomomorphismus zu einer nichtkonstanten formalen Potenzreihenlösung der Kurve. Zeige, dass es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $S \rightarrow K[[T]]$ gibt derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ & \searrow & \downarrow \\ & & K[[T]] \end{array}$$

kommutiert.

Aufgabe zum Hochladen

Aufgabe 25.13. (4 Punkte)

Zeichne mittels eines geeigneten Programms eine der Beispielkurven der Vorlesung sowie die verschiedenen dort berechneten polynomialen Approximationen.

26. VORLESUNG - SCHNITTMULTIPLIZITÄT

Es seien zwei ebene algebraische Kurven $C, D \subset \mathbb{A}_K^2$ gegeben, die keine Komponente gemeinsam haben. Dann besteht der Durchschnitt $C \cap D$ nach Satz 4.8 nur aus endlich vielen Punkten. Wir wollen das Schnittverhalten der beiden Kurven in einem Punkt $P \in C \cap D$ quantitativ erfassen. Dabei empfiehlt es sich, eine etwas allgemeinere Situation zu betrachten, und zwar schreiben wir $C = V(F)$ und $D = V(G)$ und berücksichtigen, dass in F und in G Primfaktoren (jeweils) mehrfach vorkommen können. D.h. wir unterscheiden von nun an zwischen den Kurven $V(F)$ und $V(F^n)$, obwohl es sich geometrisch um das gleiche Objekt handelt.

Lemma 26.1. *Sei K ein Körper und seien $F, G \in K[X, Y]$ Polynome ohne gemeinsamen Primteiler. Es sei $P \in V(F, G)$ und $R = K[X, Y]_{\mathfrak{m}_P}$ die zugehörige Lokalisierung. Dann besitzt der Restklassenring $R/(F, G)$ eine endliche K -Dimension.*

Beweis. Sei \mathfrak{m} das maximale Ideal in R . Da F und G keinen gemeinsamen Teiler haben, gibt es in R zwischen (F, G) und \mathfrak{m} kein weiteres Primideal. Daher ist in $R/(F, G)$ jede Nichteinheit nilpotent. Daher gilt in R die Beziehung $\mathfrak{m}^s \subseteq (F, G) \subseteq \mathfrak{m}$ für ein s . Es liegt daher eine Surjektion

$$R/\mathfrak{m}^s \longrightarrow R/(F, G)$$

vor. Nach Lemma 23.3 besitzt der Restklassenring links eine endliche K -Dimension, so dass dies auch für den Restklassenring rechts gilt. \square

Aufgrund von diesem Lemma ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition 26.2. Sei K ein Körper und seien $F, G \in K[X, Y]$ zwei nicht-konstante Polynome ohne gemeinsame Komponente und sei

$$P \in V(F) \cap V(G) = V(F, G).$$

Dann nennt man die Dimension

$$\dim_K(K[X, Y]_P/(F, G))$$

die *Schnittmultiplizität* der beiden Kurven $V(F)$ und $V(G)$ im Punkt P . Sie wird mit

$$\text{mult}_P(F, G) \text{ oder mit } \text{mult}_P(V(F), V(G))$$

bezeichnet.

Beispiel 26.3. Sei $C = V(F)$ und eine Gerade $G = V(cX + dY)$ in der affinen Ebene \mathbb{A}_K^2 gegeben, die keine Komponente von C sei. Es sei $P = (a, b) \in C \cap G$ ein Punkt des Durchschnitts. Den Restklassenring

$$K[X, Y]_P / (F, cX + dY)$$

berechnet man, indem man mittels des linearen Terms nach einer der Variablen X oder Y auflöst. Damit kann man eine Variable eliminieren und der Restklassenring ist isomorph zu $K[X]_P / (\tilde{F})$, wobei man \tilde{F} erhält, indem man in F die Variable Y durch $-\frac{c}{d}X$ ersetzt. Dies kann man auch so sehen, dass man zuerst $K[X] / (\tilde{F})$ berechnet und dann an dem Punkt lokalisiert. Das Polynom \tilde{F} hat in $K[X]$ eine Faktorisierung in Linearfaktoren

$$\tilde{F} = (X - \lambda_1)^{\nu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\nu_k}.$$

Da der Punkt P eine Nullstelle ist, muss $a = \lambda_i$ sein für ein i . Bei der Lokalisierung werden die anderen Linearfaktoren zu Einheiten gemacht und „übrig“ bleibt

$$K[X] / (X - \lambda_i)^{\nu_i}.$$

Dieser Ring hat die Dimension ν_i .

Lemma 26.4. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, sei $F = F_d + \dots + F_m \in K[X, Y]$, $d \geq m$, ein Polynom in homogener Zerlegung und $L = V(aX + bY)$ eine Gerade durch den Nullpunkt P , die keine Komponente von $V(F)$ sei. Dann ist $\text{mult}_P(L, V(F)) \geq m_P(F) = m$, d.h. die Schnittmultiplizität einer Kurve mit einer Geraden ist mindestens so groß wie die Multiplizität der Kurve im Schnittpunkt. Wenn L keine Tangente der Kurve ist, so gilt hierbei Gleichheit.

Beweis. Wir setzen $R = K[X, Y]_{(X, Y)}$ und $H = aX + bY$, und wir nehmen $b \neq 0$ an, so dass wir $Y = cX$ schreiben können. Es sei zunächst die Gerade L keine Tangente von $V(F)$ in P , also keine Komponente von $V(F_m)$. Es ist dann

$$R / (F, H) = K[X]_{(X)} / (F_d(X, cX) + \dots + F_m(X, cX)).$$

Hierbei ist $F_m(X, cX) \neq 0$ und es wird $X^m u$ mit einer Einheit u rausdividiert, so dass der Restklassenring die Dimension m besitzt. Im allgemeinen Fall gibt es ein minimales i , $m \leq i \leq d$, mit $F_i(X, cX) \neq 0$ (sonst wäre L eine Komponente von $V(F)$). Dann ist mit dem gleichen Argument die Dimension des Restklassenringes gleich $i \geq m$. \square

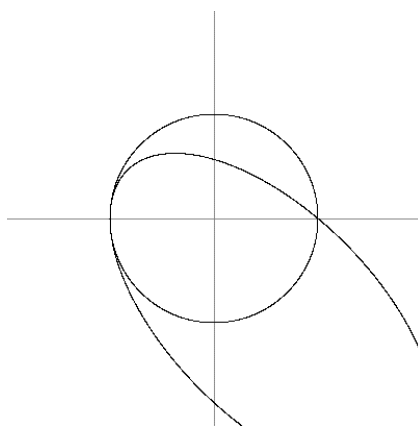
Lemma 26.5. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $F, G \in K[X, Y]$ Polynome ohne gemeinsame Komponente und sei $P \in \mathbb{A}_K^2$ ein Punkt. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Es ist $\text{mult}_P(F, G) = 0$ genau dann, wenn $P \notin V(F, G)$ ist.
- (2) Es ist $\text{mult}_P(F, G) = \text{mult}_P(G, F)$.
- (3) Die Schnittmultiplizität ändert sich nicht bei einer affinen Variablentransformation.

- (4) Wenn $F = F_1F_2$ ist mit $F_2(P) \neq 0$, so ist $\text{mult}_P(F, G) = \text{mult}_P(F_1, G)$.
- (5) Es ist $\text{mult}_P(F, G) = \text{mult}_P(F, G + HF)$ für jedes $H \in K[X, Y]$.

Beweis. Das ist trivial. □

Teil (4) der letzten Aussage kann man auch so formulieren, dass die Schnittmultiplizität nur von den Komponenten von F und G abhängen, die durch P gehen.



Ein transversaler und ein nichttransversaler Schnitt.

Definition 26.6. Es seien $F, G \in K[X, Y]$ und $P \in V(F, G)$. Dann sagt man, dass sich $V(F)$ und $V(G)$ im Punkt P *transversal schneiden*, wenn P sowohl auf $V(F)$ als auch auf $V(G)$ ein glatter Punkt ist und wenn die Tangenten der beiden Kurven im Punkt P verschieden sind.

Lemma 26.7. Sei K ein Körper und seien $F, G \in K[X, Y]$ Polynome ohne gemeinsame Komponente. Es sei $P \in V(F, G) \subseteq \mathbb{A}_K^2$ ein Schnittpunkt. Dann schneiden sich $V(F)$ und $V(G)$ in P transversal genau dann, wenn die Schnittmultiplizität $\text{mult}_P(V(F), V(G)) = 1$ ist.

Beweis. Es sei $R = K[X, Y]_{\mathfrak{m}}$ der lokale Ring zum (Null-)Punkt P in der Ebene. Sei zunächst der Schnitt als transversal vorausgesetzt. Dann sind insbesondere beide Kurven in P glatt, und $B = R/(F)$ ist ein diskreter Bewertungsring nach Lemma 23.2. Da die Tangenten verschieden sind, können wir annehmen, dass die Tangente an $V(F)$ durch $V(Y)$ und die Tangente an $V(G)$ durch $V(X)$ gegeben ist. Nach dem Beweis zu Lemma 23.2 ist dann X eine Ortsuniformisierende von B . Da G die Form hat $G = X + H$ mit $H \in \mathfrak{m}^2$ ist G ebenfalls eine Ortsuniformisierende in B und daher ist $B/(G) = K$. Daher ist die Schnittmultiplizität eins.

Für die Rückrichtung folgt aus Lemma 26.4, dass die Multiplizität der beiden Kurven in P eins sein muss und daher beide Kurven in P glatt sind. Nehmen

wir an, dass die Tangenten übereinstimmen. Dann können wir annehmen, dass sowohl F als auch G die Form $Y +$ Terme von größerem Grad besitzen. Man kann die Idealerzeuger (F, G) durch $(F, F - G)$ ersetzen, und dabei ist $F - G \in \mathfrak{m}^2$. Dann erzeugt aber $F - G$ in $B = R/(F)$ nicht das maximale Ideal, und die Schnittmultiplizität kann nicht eins sein. \square

Satz 26.8. *Seien $F, G \in K[X, Y]$ Polynome ohne gemeinsamen Primteiler mit Faktorzerlegungen*

$$F = \prod_{i=1}^m F_i^{\nu_i} \quad \text{und} \quad G = \prod_{j=1}^n G_j^{\mu_j}$$

Dann ist

$$\text{mult}_P(F, G) = \sum_{i,j} \nu_i \mu_j \text{mult}_P(F_i, G_j).$$

Beweis. Diese Aussage folgt durch Induktion aus dem Spezialfall $F = F_1 F_2$ (und $G = G$). Sei $R = K[X, Y]_P$. Wegen $(F_1 F_2, G) \subseteq (F_2, G)$ hat man eine surjektive Abbildung $R/(F_1 F_2, G) \rightarrow R/(F_2, G)$. Andererseits induziert die Multiplikation mit F_2 einen R -Modul-Homomorphismus $R/(F_1, G) \rightarrow R/(F_1 F_2, G)$. Wir behaupten, dass eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow R/(F_1, G) \xrightarrow{\cdot F_2} R/(F_1 F_2, G) \longrightarrow R/(F_2, G) \longrightarrow 0$$

vorliegt. Dabei ist die Surjektivität klar und ebenso, dass die hintereinander geschalteten Abbildungen die Nullabbildung sind. Sei $z \in R/(F_1 F_2, G)$ ein Element, das rechts auf null abgebildet wird. Dann kann man in R schreiben: $z = AF_2 + BG$. Dann wird $AF_2 \in R/(F_1 F_2, G)$ ebenfalls auf diese Klasse abgebildet, und dieses kommt von links. Sei nun $w \in R/(F_1, G)$, dass durch Multiplikation mit F_2 auf 0 abgebildet wird, also $wF_2 = CF_1 F_2 + DG$. Wir schreiben dies als $(w - CF_1)F_2 = DG$. Da F und G keinen gemeinsamen Primteiler besitzen, gilt dies erst recht für F_2 und G . Also muss F_2 ein Teiler von D sein und es ergibt sich eine Beziehung $(w - CF_1) = \tilde{D}G$, woraus folgt, dass bereits $w = 0$ ist.

Aus der Additivitätseigenschaft von kurzen exakten Sequenzen folgt die gewünschte Identität

$$\begin{aligned} \text{mult}_P(F_1 F_2, G) &= \dim_K (R/(F_1 F_2, G)) \\ &= \dim_K (R/(F_1 F_2, G)) \\ &= \dim_K (R/(F_1, G)) + \dim_K (R/(F_2, G)). \end{aligned}$$

\square

Satz 26.9. *Sei R ein noetherscher kommutativer Ring mit nur endlich vielen Primidealen $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$, die alle maximal seien. Dann gibt es eine kanonische Isomorphie*

$$R \cong R_{\mathfrak{m}_1} \times \dots \times R_{\mathfrak{m}_n}.$$

Beweis. Die maximalen Ideale sind zugleich die minimalen Primideale. Daher besteht der Durchschnitt $\mathfrak{a} = \bigcap_i \mathfrak{m}_i$ aller maximaler Ideale nur aus nilpotenten Elementen. Da der Ring noethersch ist, gibt es dann auch ein s mit $\mathfrak{a}^s = 0$. Zu jedem maximalen Ideal \mathfrak{m}_i betrachten wir die Lokalisierung $R \rightarrow R_{\mathfrak{m}_i}$. Wir behaupten, dass diese Lokalisierung isomorph zum Restklassenring

$$R/\mathfrak{a}_i \text{ mit } \mathfrak{a}_i := \mathfrak{m}_i^s$$

ist. Wegen $\prod \mathfrak{m}_i \subseteq \bigcap \mathfrak{m}_i$ ist $(\prod \mathfrak{m}_i)^s \subseteq (\bigcap \mathfrak{m}_i)^s$ und daher ist auch $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n = 0$. Sei $i = 1$. Zu jedem $j \neq 1$ gibt es ein $g_j \in \mathfrak{m}_j$ mit $g_j \notin \mathfrak{m}_1$. Daher gilt für jedes Element $f \in \mathfrak{a}_1$ die Beziehung

$$f g_2^s \cdots g_n^s = 0.$$

Wegen $g_2^s \cdots g_n^s \notin \mathfrak{m}_1$ bedeutet dies, dass f unter der Lokalisierungsabbildung auf null geht. Wir erhalten also einen Ringhomomorphismus

$$R/\mathfrak{a}_1 \longrightarrow R_{\mathfrak{m}_1}.$$

Damit ist die Lokalisierung rechts auch eine Lokalisierung des Restklassenringes links. Die maximalen Ideale erzeugen paarweise das Einheitsideal. Dies gilt dann auch für beliebige Potenzen davon. Daraus folgt zunächst, dass das Ideal \mathfrak{a}_1 nur in \mathfrak{m}_1 enthalten ist. Daher ist der Restklassenring links selbst ein lokaler Ring. Also muss die Abbildung ein Isomorphismus sein.

Die gegebene Abbildung kann man also auch schreiben als

$$R \longrightarrow \prod_{i=1}^n R/\mathfrak{a}_i.$$

Hierbei erzeugen die \mathfrak{a}_i paarweise das Einheitsideal, so dass nach einer Form des Chinesischen Restsatzes eine Isomorphie vorliegt. \square

Korollar 26.10. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $F, G \in K[X, Y]$ Polynome ohne gemeinsamen Primteiler. Es seien $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{A}_K^2$ die endlich vielen Punkte aus $V(F, G)$ mit den zugehörigen maximalen Idealen $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ in $K[X, Y]$. Dann gibt es eine kanonische Isomorphie*

$$K[X, Y]/(F, G) \cong (K[X, Y]_{\mathfrak{m}_1})/(F, G) \times \cdots \times (K[X, Y]_{\mathfrak{m}_n})/(F, G).$$

Beweis. Da F und G keinen gemeinsamen Primteiler haben, umfasst das Ideal (F, G) nur endlich viele Primideale, die alle maximal sind. Daher erfüllt Der Restklassenring $R/(F, G)$ die Bedingungen aus Satz 26.9. Da der Körper algebraisch abgeschlossen ist, entsprechen die maximalen Ideale eindeutig den Punkten im Schnitt der beiden zugehörigen Kurven $V(F)$ und $V(G)$, so dass sich die Aussage ergibt. \square

Satz 26.11. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $F, G \in K[X, Y]$ Polynome ohne gemeinsamen Primteiler. Dann ist*

$$\dim_K (K[X, Y]/(F, G)) = \sum_P \text{mult}_P(F, G).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus der in Korollar 26.10 bewiesenen Isomorphie. \square

Wir erwähnen noch abschließend ohne Beweis folgenden Satz, der eine Abschätzung zwischen der Schnittmultiplizität und den Multiplizitäten der beiden Kurven angibt.

Satz 26.12. *Es seien $F, G \in K[X, Y]$ und $P \in V(F, G)$. Dann gilt die Abschätzung*

$$\text{mult}_P(F, G) \geq m_P(F) \cdot m_P(G).$$

Beweis. Siehe Fulton, Algebraic Curves, Chapter III.3. \square

26. ARBEITSBLATT

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 26.1. Man gebe für jedes n ein Beispiel von zwei aus der Schule bekannten ebenen algebraischen Kurven, die sich in genau einem Punkt mit Schnittmultiplizität n schneiden.

Aufgabe 26.2. Betrachte die durch $y = 2x^4 + 3x^2 - x + 1$ gegebene Kurve mit dem Punkt $P = (1, 5)$. Finde eine Koordinatentransformation derart, dass P zum Punkt $(0, 0)$ wird und die Tangente an P zur x -Achse.

Aufgabe 26.3. (3 Punkte)

Es sei eine monomiale ebene Kurven $C = V(X^d - Y^e)$ (mit d, e teilerfremd) gegeben. Berechne die Schnittmultiplizität der Kurve mit einer jeden Geraden G durch den Nullpunkt.

Aufgabe 26.4.*

Bestimme die Schnittmultiplizität im Nullpunkt des Kartesischen Blattes

$$C = V(X^3 + Y^3 - 3XY)$$

mit jeder affinen Geraden der affinen Ebene.

Man setze voraus, dass die Charakteristik des Körpers nicht 3 ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 26.5. (4 Punkte)

Berechne die Schnittmultiplizität der beiden monomialen Kurven

$$C = V(X^5 - Y^2) \text{ und } D = V(X^7 - Y^3)$$

im Nullpunkt.

Aufgabe 26.6. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und seien $C = V(F)$ und $D = V(G)$ ebene algebraische Kurven. Es sei $P \in C$ ein glatter Punkt, so dass der lokale Ring $R = (K[X, Y]_{\mathfrak{m}})/(F)$ ein diskreter Bewertungsring ist. Zeige, dass die Beziehung

$$\text{mult}_P(F, G) = \text{ord}(G)$$

gilt, wobei ord die Ordnung im Bewertungsring R bezeichnet.

Aufgabe 26.7. (4 Punkte)

Betrachte die Parabel $C = V(Y - X^2)$ und den Kreis D mit Mittelpunkt $(0, r)$ und Radius r . Bestimme die Schnittpunkte von C und D und die jeweiligen Schnittmultiplizitäten.

Aufgabe 26.8. (4 Punkte)

Bestimme für den Restklassenring $\mathbb{C}[X, Y]/(XY - 1, X^2 + Y^2 - a)$ (für jedes $a \in \mathbb{C}$) eine Beschreibung als Produktring von lokalen Ringen. Man gebe dabei die \mathbb{C} -Dimensionen der beteiligten Ringe an.

Aufgabe 26.9. (4 Punkte)

Bestimme für die Kurve $V(X^3 + Y^3 - 3XY + 1)$ die singulären Punkte über \mathbb{R} und über \mathbb{C} . Man gebe jeweils die Multiplizität und die Tangenten an.

Aufgabe 26.10. (3 Punkte)

Betrachte die durch $y = 2x^4 + 3x^2 - x + 1$ gegebene Kurve im Punkt $P = (1, 5)$ in den in Aufgabe 26.2 gefundenen Koordinaten. Bestimme die Potenzreihe für die Kurve in P entlang der Tangente.

Die folgende Aufgabe ist vermutlich schwieriger.

Aufgabe 26.11. (8 Punkte)

Es seien zwei verschiedene monomiale ebene Kurven $C = V(X^d - Y^e)$ und $D = V(X^r - Y^s)$ gegeben (mit d, e und r, s teilerfremd). Berechne die Schnittmultiplizität der beiden Kurven im Nullpunkt.

27. VORLESUNG - DER PROJEKTIVE RAUM



Die Geraden durch einen Punkt

Definition 27.1. Sei K ein Körper. Der *projektive n -dimensionale Raum* \mathbb{P}_K^n besteht aus allen Geraden des \mathbb{A}_K^{n+1} durch den Nullpunkt, wobei diese Geraden als Punkte aufgefasst werden. Ein solcher Punkt wird repräsentiert durch *homogene Koordinaten* (a_0, a_1, \dots, a_n) , wobei nicht alle $a_i = 0$ sein dürfen, und wobei zwei solche Koordinatentupel genau dann den gleichen Punkt repräsentieren, wenn sie durch Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in K^\times$ ineinander übergehen.

Wir werden den projektiven Raum nach und nach mit zusätzlichen Strukturen versehen.

Satz 27.2. Sei K ein Körper und sei \mathbb{P}_K^n ein projektiver Raum. Sei $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ fixiert. Dann gibt es eine natürliche Abbildung

$$\varphi_i: \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{P}_K^n, (u_1, \dots, u_n) \longmapsto (u_1, \dots, u_i, 1, u_{i+1}, \dots, u_n)$$

Diese Abbildung ist injektiv und induziert eine Bijektion zu denjenigen Punkten des projektiven Raumes, bei denen die i -te homogene Koordinate nicht null ist. Die Umkehrabbildung wird gegeben durch

$$\mathbb{P}_K^n \supset D_+(X_i) := \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid x_i \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{A}_K^n, (x_0, x_1, \dots, x_n) \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

Der projektive Raum wird überdeckt von diesen $n + 1$ affinen Räumen. Das Komplement eines solchen affinen Raumes $\mathbb{A}_K^n \cong D_+(X_i) \subset \mathbb{P}_K^n$ ist ein $(n - 1)$ -dimensionaler projektiver Raum.

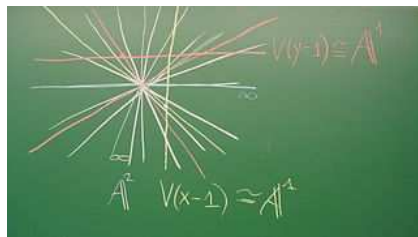
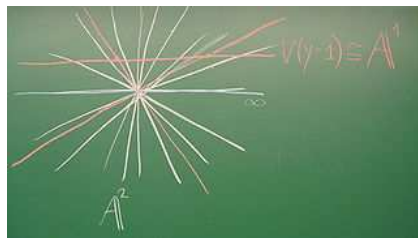
Beweis. Die Abbildung ist offensichtlich wohldefiniert, da die 1 sicher stellt, dass mindestens eine homogene Koordinate nicht null ist. Die Abbildung ist injektiv, da aus einer Gleichung der Form (für homogene Koordinaten)

$$(u_1, \dots, u_i, 1, u_{i+1}, \dots, u_n) = \lambda(v_1, \dots, v_i, 1, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

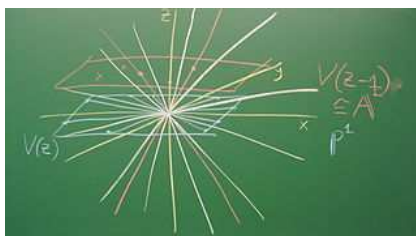
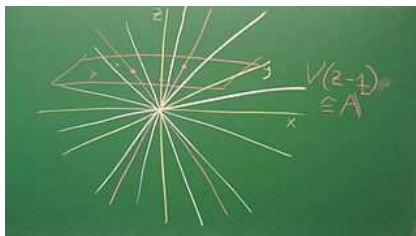
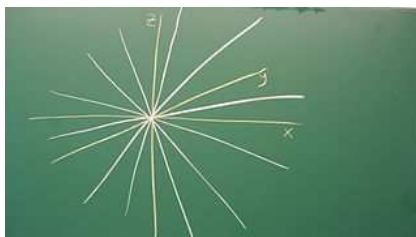
sofort $\lambda = 1$ folgt wegen der 1. Die Umkehrabbildung ist auf der angegebenen Teilmenge wohldefiniert, und ist invers zu der Abbildung. Die Überdeckungseigenschaft ist klar, da für jeden Punkt des projektiven Raumes mindestens eine homogene Koordinate nicht null ist. Das Komplement zu $D_+(X_i)$ ist

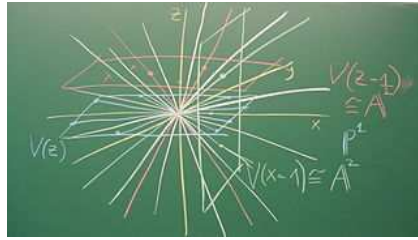
$$V_+(X_i) = \{(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \mid x_j \in K\}$$

mit keinerlei Einschränkung an die übrigen n Variablen und mit der Identifizierung von zwei solchen Tupeln, wenn sie durch Multiplikation mit einem Skalar ineinander übergehen. \square



Beispiel 27.3. Die projektive Gerade \mathbb{P}_K^1 ist gegeben als die Menge der Geraden durch den Nullpunkt in der affinen Ebene \mathbb{A}_K^2 . Eine solche Gerade ist entweder die x -Achse oder aber eine Gerade, die die Gerade $V(y-1)$ (also die zur x -Achse parallele Gerade durch $(0,1)$) in genau einem Punkt schneidet. Umgekehrt liefert jeder Punkt $P \in V(y-1) \cong \mathbb{A}_K^1$ eine eindeutig bestimmte Gerade durch den Nullpunkt. D.h. die projektive Gerade besteht aus einer affinen Gerade und einem weiteren Punkt, den man den „unendlich fernen“ Punkt nennt. Wichtig ist dabei aber, dass dieser unendlich ferne Punkt nicht wesensverschieden von den anderen Punkten ist. Wenn man eine beliebige Gerade G durch den Nullpunkt nimmt sowie eine dazu parallele Gerade $L \neq G$, so übernimmt L die Rolle der affinen Geraden, und G repräsentiert dann einen (von dieser affinen Geraden aus gesehen) unendlich fernen Punkt.





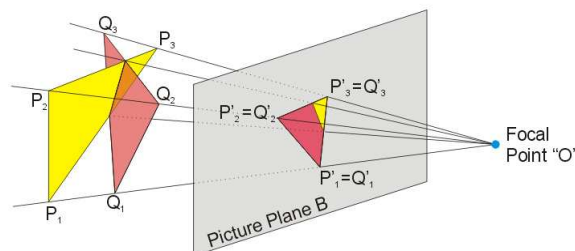
Beispiel 27.4. Die Punkte in der projektiven Ebene \mathbb{P}_K^2 entsprechen den Geraden durch den Nullpunkt im affinen Raum \mathbb{A}_K^3 . Jeder Punkt der projektiven Ebene wird repräsentiert durch ein Tupel (x, y, z) , wobei nicht alle x, y, z gleichzeitig null sein dürfen und wobei zwei Koordinatentupel identifiziert werden, wenn sie durch Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \neq 0$ ineinander überführt werden können. Die projektive Ebene wird überdeckt durch drei affine Ebenen, nämlich

$$D_+(X), D_+(Y) \text{ und } D_+(Z).$$

Dabei besteht $D_+(Z)$ aus allen Punkten wo die dritte Koordinate nicht null ist. Durch Multiplikation mit z^{-1} kann man diese Punkte identifizieren mit

$$(x/z, y/z, z/z) = (u, v, 1),$$

so dass wirklich eine affine Ebene vorliegt. Das Komplement der affinen Ebene $D_+(Z)$ ist die Menge $V_+(Z)$ der Punkte, wo die dritte Komponente null ist. Da man nach wie vor Punkte identifiziert, die durch Multiplikation mit einem Skalar ineinander überführbar sind, ist $V_+(Z)$ eine projektive Gerade. Ein Punkt $(x, y, 0)$ auf dieser Geraden und der Nullpunkt $(0, 0, 1)$ von $D_+(Z)$ definieren die Gerade durch den Nullpunkt mit dem Richtungsvektor (x, y) (und der homogenen Geradengleichung $yX - xY = 0$ bzw. $V_+(yX - xY)$). Man kann sich also die projektive Ebene gut vorstellen als eine affine Ebene, in der jede Gerade durch den Nullpunkt noch einen zusätzlichen („unendlich fernen“) Punkt definiert.



Nullstellen von homogenen Polynomen

Für ein beliebiges Polynom $F \in K[X_0, \dots, X_n]$ macht es keinen Sinn zu sagen, ob ein Punkt $P \in \mathbb{P}_K^n$ eine Nullstelle davon ist, da diese Eigenschaft nicht invariant unter der Multiplikation mit einem Skalar ist und daher vom Repräsentanten von P abhängt. Für homogene Polynome sieht das anders aus.

Lemma 27.5. *Sei K ein Körper und sei $F \in K[X_0, \dots, X_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad d . Dann gilt für einen Punkt (x_0, \dots, x_n) und einen Skalar λ die Beziehung*

$$F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n).$$

Insbesondere verschwindet F in (x_0, \dots, x_n) genau dann, wenn F für ein beliebiges $\lambda \neq 0$ in $\lambda(x_0, \dots, x_n)$ verschwindet.

Beweis. Dies kann man auf den Fall eines Monoms vom Grad d zurückführen. Für $X_0^{d_0} \cdots X_n^{d_n}$ mit $\sum_{i=0}^n d_i = d$ und $\lambda \in K$ gilt

$$(\lambda X_0)^{d_0} \cdots (\lambda X_n)^{d_n} = (\lambda^{d_0} X_0^{d_0}) \cdots (\lambda^{d_n} X_n^{d_n}) = \lambda^d (X_0^{d_0} \cdots X_n^{d_n}).$$

□

Man beachte, dass es durch diese Aussage zwar wohldefiniert ist, ob ein homogenes Polynom an einem projektiven Punkt verschwindet oder nicht, dass es aber keinen Sinn macht, einem homogenen Polynom einen Wert an jedem Punkt des projektiven Raumes zuzuordnen. Ein homogenes Polynom definiert keine Funktion auf dem projektiven Raum.

Definition 27.6. Sei K ein Körper. Zu einem homogenen Polynom $F \in K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ bezeichnet man die Menge

$$V_+(F) = \{P = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}_K^n \mid F(x_0, \dots, x_n) = 0\}$$

als die *projektive Nullstellenmenge* zu F .

Definition 27.7. Sei K ein Körper und $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal. Das Ideal heißt *homogen*, wenn für jedes $H \in \mathfrak{a}$ mit homogener Zerlegung $H = \sum_i H_i$ auch $H_i \in \mathfrak{a}$ ist für alle homogenen Bestandteile H_i .

Definition 27.8. Zu einem homogenen Ideal $\mathfrak{a} \subseteq K[X_0, \dots, X_n]$ nennt man

$$V_+(\mathfrak{a}) = \{P = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}_K^n \mid F(P) = 0 \text{ für alle homogenen } F \in \mathfrak{a}\}$$

das *projektive Nullstellengebilde* oder die *projektive Varietät* zu \mathfrak{a} .

Definition 27.9. Der projektive Raum \mathbb{P}_K^n wird mit der *Zariski-Topologie* versehen, bei der die Mengen $V_+(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{P}_K^n$ zu einem homogenen Ideal $\mathfrak{a} \subseteq K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ als abgeschlossen erklärt werden.

Die offenen Mengen des projektiven Raumes sind demnach die Mengen der Form $D_+(\mathfrak{a})$ mit einem homogenen Ideal $\mathfrak{a} \subseteq K[X_0, \dots, X_n]$. Dabei sind die offenen Mengen $D_+(X_i)$ isomorph zu einem affinen Raum der Dimension n .

Bemerkung 27.10. Ein Punkt $P = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{P}_K^n$ ist abgeschlossen, und zwar ist $P = V_+(\mathfrak{a})$ mit

$$\mathfrak{a} = (a_i X_j - a_j X_i : 0 \leq i, j \leq n).$$

Wenn $a_0 \neq 0$ ist, so kann man dies auch schreiben als $(X_j - \frac{a_j}{a_0} X_0 : j \neq 0)$. Die Erzeuger $a_i X_j - a_j X_i$, $i \neq 0$, sind dann überflüssig. Dieses Ideal ist offenbar homogenen, und P liegt in $V_+(\mathfrak{a})$. Sei $a_0 \neq 0$ angenommen. Für einen weiteren Punkt $Q = (b_0, \dots, b_n) \in V_+(\mathfrak{a})$ folgt sofort $b_j - \frac{a_j}{a_0} b_0 = 0$ bzw.

$$(b_0, \dots, b_n) = \frac{b_0}{a_0} (a_0, \dots, a_n),$$

so dass es sich projektiv um den gleichen Punkt handelt.

\mathfrak{a} ist kein maximales Ideal, es ist aber maximal unter allen homogenen Idealen, die von (X_0, \dots, X_n) verschieden sind. Der Restklassenring $K[X_0, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$ ist ein Polynomring in einer Variablen.

Zwischen dem affinen Raum \mathbb{A}_K^{n+1} und dem projektiven Raum \mathbb{P}_K^n gibt es keine natürliche Abbildung. Allerdings gibt es die natürliche Abbildung

$$\mathbb{A}_K^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_K^n, (x_0, x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_0, x_1, \dots, x_n).$$

Diese Abbildung ordnet einem Punkt $\neq 0$ die durch diesen Punkt (und den Nullpunkt) bestimmte Gerade zu. Man spricht von der *kanonischen Abbildung* oder von der *Kegelabbildung*. Das Urbild von $D_+(X_i)$ unter dieser Abbildung ist $D(X_i)$.

Der projektive Raum über \mathbb{R} und über \mathbb{C}

Wir wollen uns ein Bild über die projektiven Räume für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ machen. Die (reell) n -dimensionale Sphäre ist

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}.$$

Dabei ist $\|x\| = \sqrt{x_0^2 + \dots + x_n^2}$ die *euklidische Norm*.

Satz 27.11. *Man kann den reell-projektiven Raum $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ repräsentieren durch die n -dimensionale Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ modulo der Äquivalenzrelation, die antipodale Punkte miteinander identifiziert.*

Den komplex-projektiven Raum $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ kann man repräsentieren durch die $(2n+1)$ -dimensionale Sphäre $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2} \cong \mathbb{C}^{n+1}$ modulo der Äquivalenzrelation, die zwei Punkte $z, w \in S^{2n+1}$ miteinander identifiziert, wenn man $z = \lambda w$ mit einem $\lambda \in S^1$ schreiben kann.

Beweis. Wir behandeln die beiden Fälle parallel. Jeder Punkt der Sphäre S definiert eine (reelle oder komplexe) Gerade durch den Nullpunkt im umliegenden Raum \mathbb{R}^{n+1} oder \mathbb{C}^{n+1} und damit einen Punkt im projektiven Raum. Zwei Punkte $z, w \in S$ definieren genau dann die gleiche Gerade, wenn es einen Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ gibt mit $z = \lambda w$. Wegen der Multiplikativität der Norm

ist dann auch $\|z\| = |\lambda| \cdot \|w\|$, woraus sich wegen $z, w \in S$ sofort $|\lambda| = 1$ ergibt. Dies bedeutet im reellen Fall $\lambda = \pm 1$ und im komplexen Fall, dass $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$ ist, also zum Einheitskreis gehört. \square

Wir haben insgesamt Abbildungen

$$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$$

(im reellen Fall) bzw.

$$S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2} \setminus \{0\} \cong \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$$

(im komplexen Fall). Nach dem vorstehenden Lemma sind die Gesamtabbildungen jeweils surjektiv. Man versieht die reell und die komplex-projektiven Räume mit der Quotiententopologie zur metrischen Topologie des reellen Vektorraumes unter dieser Abbildung, d.h. man erklärt eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ für offen, wenn das Urbild in $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{n+1} \setminus \{0\}$ offen ist (dies ist äquivalent dazu, dass das Urbild auf der jeweiligen Sphäre offen ist). Mit dieser (*metrischen* oder *natürlichen*) Topologie auf dem projektiven Raum sind diese Abbildungen stetig. Dies hat folgende Konsequenz.

Lemma 27.12. *Für den reell-projektiven und den komplex-projektiven Raum sind die Teilmengen $D_+(X_i)$ offen in der natürlichen Topologie und homöomorph zu \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n . Insbesondere sind die reell- und komplex-projektiven Räume topologische Mannigfaltigkeiten.*

Beweis. Das Urbild von $D_+(X_i)$ unter der kanonischen Abbildung $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ ist $D(X_i)$, also das Komplement eines n -dimensionalen Untervektorraumes und damit offen in der natürlichen Topologie. Wir betrachten die stetigen Abbildungen

$$\mathbb{K}^n \cong V(X_i - 1) \subset D(X_i) \longrightarrow D_+(X_i).$$

Die Gesamtabbildung ist eine Bijektion und $D_+(X_i)$ trägt die Quotiententopologie unter der zweiten Abbildung. Wir müssen zeigen, dass die Bijektion eine Homöomorphie ist. Dazu genügt es, die Offenheit zu zeigen. Sei also $U \subseteq V(X_i - 1) \cong \mathbb{K}^n$ offen und U' das zugehörige Bild in $D_+(X_i)$. Die Offenheit von U' ist nach Definition der Quotiententopologie äquivalent dazu, dass das Urbild $U'' \subseteq D(X_i)$ von U' offen ist. Diese Menge U'' besteht aus allen Punkten in $D(X_i)$, die auf einer Geraden durch den Nullpunkt und durch einen Punkt aus U liegen. Sei Q ein solcher Punkt, und $Q = \lambda P$ mit $P \in U$ und $\lambda \in \mathbb{K}^\times$. Sei B eine offene Umgebung um P in $V(X_i - 1)$. Dann ist auch der dadurch definierte Kegel in $D(X_i)$ offen und liegt ganz in U'' . \square



Die projektive Gerade über \mathbb{C} ist eine Sphäre.

Korollar 27.13. *Die reell-projektiven und die komplex-projektiven Räume sind kompakt und hausdorffsch in der natürlichen Topologie.*

Beweis. Es gibt eine surjektive stetige Abbildung von einer Sphäre auf einen jeden projektiven Raum. Die Sphäre ist eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge eines reellen endlichdimensionalen Vektorraumes und daher kompakt. Da unter einer stetigen Abbildung das Bild einer kompakten Menge wieder kompakt ist, folgt, dass die projektiven Räume kompakt sind.

Für die Hausdorff-Eigenschaft seien $P, Q \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ zwei verschiedene Punkte. Man kann annehmen, dass sie beide auf einem der affinen überdeckenden Räume $D_+(X_i)$ liegen. Damit gibt es nach Lemma 27.12 trennende Umgebungen. \square

27. ARBEITSBLATT

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 27.1. Definiere eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{A}_K^{n+1} \setminus \{0\}$ derart, dass der Quotient unter der Äquivalenzrelation der projektive n -dimensionale Raum ist.

Aufgabe 27.2. Man definiere den Begriff *projektiv-linearer Unterraum* eines projektiven Raumes \mathbb{P}_K^n .

Aufgabe 27.3. Sei $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal. Zeige, dass \mathfrak{a} genau dann ein homogenes Ideal ist, wenn es von homogenen Elementen erzeugt wird.

Aufgabe 27.4. Sei $K = \mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper. Berechne auf zwei verschiedene Arten, wie viele Elemente der projektive Raum \mathbb{P}_K^n besitzt.

Die folgenden drei Aufgaben besprechen die Zariski-Topologie auf den projektiven Räumen.

Aufgabe 27.5. Zeige, dass die Zariski-Topologie auf dem projektiven Raum wirklich eine Topologie ist.

Aufgabe 27.6. Sei K ein unendlicher Körper und \mathbb{P}_K^n der projektive Raum. Charakterisiere die homogenen Ideale \mathfrak{a} , für die $D_+(\mathfrak{a}) = \emptyset$ ist.

Aufgabe 27.7. Sei K ein unendlicher Körper. Zeige, dass der projektive Raum \mathbb{P}_K^n irreduzibel ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 27.8. (3 Punkte)

Zeige, dass zwei verschiedene Punkte P und Q in der projektiven Ebene eindeutig eine projektive Gerade definieren, auf der beide Punkte liegen. Wie berechnet man die Geradengleichung aus den Koordinaten der Punkte? Bestimme die homogene Geradengleichung für die beiden Punkte $(2, 3, 7)$ und $(1, 5, -2)$.

Aufgabe 27.9. (3 Punkte)

Es sei \mathbb{P}_K^n ein projektiver Raum der Dimension n und es seien $X, Y \subseteq \mathbb{P}_K^n$ projektiv-lineare Unterräume der Dimension r und s . Es sei $r + s \geq n$. Zeige, dass dann $X \cap Y \neq \emptyset$ ist.

Aufgabe 27.10. (3 Punkte)

Sei K ein unendlicher Körper und sei P_1, \dots, P_m eine endliche Ansammlung von Punkten in einem projektiven Raum \mathbb{P}_K^n . Zeige: Dann gibt es eine homogene Linearform $L \in K[X_0, \dots, X_n]$ derart, dass all diese Punkte auf der durch L definierten offenen Teilmenge $D_+(L)$ liegen.

Die nächste Aufgabe benötigt noch die folgende Definition:

Für ein homogenes Ideal I in $R = A[X_0, \dots, X_n]$ mit der Standardgraduierung definiert man die *Sättigung* (oder *Saturierung*) von I als

$$\{r \in R \mid \text{es existiert ein } n \text{ mit } r \cdot (R_+)^n \subseteq I\}.$$

Dabei ist R_+ das *irrelevante Ideal* $\bigoplus_{d \geq 1} R_d = (X_0, \dots, X_n)$.

Aufgabe 27.11. (3 Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring und $R = A[X_0, \dots, X_n]$ der Polynomring mit der Standardgraduierung. Zeige, dass die Sättigung eines homogenen Ideals I wieder ein homogenes Ideal ist.

28. VORLESUNG - PROJEKTIVE KURVEN I

Projektive Varietäten

Definition 28.1. Eine *projektive Varietät* ist eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge

$$V_+(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{P}_K^n,$$

wobei \mathfrak{a} ein homogenes Ideal in $K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ ist.

Eine projektive Varietät Y ist also die Nullstellenmenge im projektiven Raum einer (endlichen) Menge von homogenen Polynomen.

Über die induzierte Topologie ist eine projektive Varietät wieder mit einer Zariski-Topologie versehen. Die offenen Mengen haben wieder die Form $D_+(\mathfrak{b})$ zu einem homogenen Ideal \mathfrak{b} aus $K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ bzw. aus dem Restklassenring $K[X_0, X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$, den man auch den *homogenen Koordinatenring* zu $V(\mathfrak{a})$ nennt. Insbesondere definiert jedes homogene Element $F \in K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ eine offene Menge $D_+(F) \subseteq Y$.

Lemma 28.2. Sei $Y \subseteq \mathbb{P}_K^n$ eine projektive Varietät. Dann liefern die affinen Räume $D_+(X_i) \cong \mathbb{A}_K^n \subset \mathbb{P}_K^n$ affine Varietäten

$$D_+(X_i) \cap Y,$$

die Y überdecken. Insbesondere gibt es zu jedem Punkt $P \in Y$ und jeder offenen Umgebung $P \in U$ affine offene Umgebungen von P innerhalb von U .

Beweis. Es ist

$$D_+(X_i) = D_+(X_i) \cap Y \cong \mathbb{A}_K^n \cap Y,$$

wobei links die zugehörige offene Menge in Y steht und rechts die entsprechende offene Teilmenge des projektiven Raumes. Daher ist $D_+(X_i) \cap Y$ eine abgeschlossene (siehe Aufgabe 28.2) Teilmenge des affinen Raumes $D_+(X_i) \cong \mathbb{A}_K^n$ und als solche selbst eine affine Varietät. Da die $D_+(X_i)$,

$i = 0, \dots, n$, den projektiven Raum überdecken, gilt dies auch für die Durchschnitte mit Y . \square

Diese Aussage hat die unmittelbare Konsequenz, dass sich „lokale Konzepte“, die wir für affine Varietäten entwickelt haben, sofort auf projektive Varietäten übertragen. Für Eigenschaften, die für oder in einem Punkt gelten sollen, kann man sich sofort auf eine offene affine Umgebung des Punktes zurückziehen. Dies gilt beispielsweise für Konzepte wie Glattheit, Normalität oder den Begriff der regulären Funktion.

Algebraische Funktionen und Morphismen

Mit dem zuletzt bewiesenen Resultat können wir auf einer projektiven Varietät wieder definieren, was eine reguläre oder algebraische Funktion sein soll.

Definition 28.3. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, $Y \subseteq \mathbb{P}_K^n$ eine projektive Varietät, $U \subseteq Y$ eine offene Teilmenge und $P \in U$ ein Punkt. Dann heißt eine Funktion

$$f: U \longrightarrow \mathbb{A}_K^1 = K$$

algebraisch (oder *regulär* oder *polynomial*) im Punkt P , wenn es eine offene affine Umgebung $P \in V \subseteq U$ gibt, derart, dass auf V die eingeschränkte Funktion $f|_V$ algebraisch im Punkt P ist. f heißt *algebraisch* auf U , wenn f in jedem Punkt aus U algebraisch ist.

Zu einer offenen Menge U bildet die Menge der auf U definierten regulären Funktionen wieder eine kommutative K -Algebra, die wieder mit $\Gamma(U, \mathcal{O})$ bezeichnet wird. Von nun an verstehen wir unter einer projektiven Varietät ein projektives Nullstellengebilde zusammen mit der induzierten Zariski-Topologie und versehen mit der *Strukturgarbe* \mathcal{O} der regulären Funktionen. Diese Konzepte übertragen sich sofort auf offene Teilmengen, was zum Begriff der quasiprojektiven Varietät führt.

Definition 28.4. Eine offene Teilmenge einer projektiven Varietät zusammen mit der induzierten Zariski-Topologie und versehen mit der Strukturgarbe der regulären Funktionen nennt man eine *quasiprojektive Varietät*.

Insbesondere ist eine projektive Varietät, aber auch eine affine Varietät quasiprojektiv. Letzteres folgt daraus, dass man eine affine Varietät $Y \subseteq \mathbb{A}_K^n$ fortsetzen kann zu einer projektiven Varietät $\tilde{Y} \subseteq \mathbb{P}_K^n$, in der Y eine offene Teilmenge ist. Auch die Definition von Morphismus lässt sich wortgleich auf die allgemeinere Situation übertragen.

Definition 28.5. Seien X und Y zwei quasiprojektive Varietäten und sei

$$\psi: Y \longrightarrow X$$

eine stetige Abbildung. Dann nennt man ψ einen *Morphismus* (von quasi-projektiven Varietäten), wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ und jede algebraische Funktion $f \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ gilt, dass die zusammengesetzte Funktion

$$f \circ \psi : \psi^{-1}(U) \longrightarrow U \xrightarrow{f} \mathbb{A}_K^1$$

zu $\Gamma(\psi^{-1}(U), \mathcal{O})$ gehört.

Homogenisierung und projektiver Abschluss

Betrachten wir die Hyperbel $V(XY - 1) \subset \mathbb{A}_K^2 \subset \mathbb{P}_K^2$. Die Hyperbel ist abgeschlossen in der affinen Ebene, aber nicht in der projektiven Ebene. Dies sieht man, wenn man die affine Ebene als $V(Z - 1)$ in den dreidimensionalen Raum einbettet und die durch die Punkte auf der Hyperbel definierten Geraden durch den Nullpunkt betrachtet. Diese Geraden neigen sich zunehmend stärker, und scheinen gegen die x -Achse und gegen die y -Achse zu konvergieren. Dies ist in der Tat der Fall, was auch die algebraische Berechnung ergibt.

Definition 28.6. Zu einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ heißt das Ideal in $K[X_1, \dots, X_n, Z]$, das von allen Homogenisierungen von Elementen aus \mathfrak{a} erzeugt wird, die *Homogenisierung* \mathfrak{a}^h des Ideals \mathfrak{a} .

Man beachte, dass es hier im Allgemeinen nicht ausreicht, nur die Homogenisierungen aus einem Ideal-Erzeugendensystem aus \mathfrak{a} zu betrachten.

Definition 28.7. Zu einer affinen Varietät $V(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{A}_K^n \subset \mathbb{P}_K^n$ heißt der Zariski-Abschluss von $V(\mathfrak{a})$ in \mathbb{P}_K^n der *projektive Abschluss* von $V(\mathfrak{a})$.

Satz 28.8. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $V = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n \cong D_+(X_0)$ eine affine Varietät. Dann wird der projektive Abschluss durch $V_+(\mathfrak{b})$ beschrieben, wobei \mathfrak{b} die Homogenisierung von \mathfrak{a} in $K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ bezeichnet.

Beweis. Ein Punkt $P = (x_1, \dots, x_n)$ in \mathbb{A}_K^n definiert den Punkt $\hat{P} = (1, x_1, \dots, x_n)$ in \mathbb{P}_K^n . Für ein Polynom $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ und P gilt $F(P) = \hat{F}(\hat{P})$ für die Homogenisierung \hat{F} . Daher gilt insbesondere $\hat{F}(\hat{P}) = 0$ für alle Punkte $P \in V(\mathfrak{a})$ und alle homogenen Polynome aus dem homogenisierten Ideal \mathfrak{b} . Es ist also $V(\mathfrak{a}) \subseteq V_+(\mathfrak{b})$. Damit liegt insgesamt das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V(\mathfrak{a}) & \longrightarrow & V_+(\mathfrak{b}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A}_K^n & \longrightarrow & \mathbb{P}_K^n \end{array}$$

vor (wobei alle Abbildungen injektiv sind). Der projektive Abschluss von $V(\mathfrak{a})$ wird von einer Menge $V_+(\mathfrak{c})$ mit einem homogenen Ideal \mathfrak{c} und mit $V(\mathfrak{a}) \subseteq V_+(\mathfrak{c})$ und $V_+(\mathfrak{c}) \subseteq V_+(\mathfrak{b})$ beschrieben.

Wir haben die Inklusion $V_+(\mathfrak{b}) \subseteq V_+(\mathfrak{c})$ zu zeigen, was aus $\mathfrak{c} \subseteq \text{rad}(\mathfrak{b})$ folgt. Da beides homogene Ideale sind, kann man sich auf $F \in \mathfrak{c}$ homogen beschränken. Wir schreiben $F = X_0^r G$, so dass G kein Vielfaches von X_0 ist. Da F auf $V(\mathfrak{a})$ verschwindet und da X_0 eingeschränkt auf $V(\mathfrak{a}) \subseteq D_+(X_0)$ keine Nullstelle besitzt, folgt, dass G auf $V(\mathfrak{a})$ verschwindet. Wir können also annehmen, dass F kein Vielfaches von X_0 ist. Dann ist die Dehomogenisierung $\tilde{F} = F(1, X_1, \dots, X_n)$ die Nullfunktion auf $V(\mathfrak{a})$ und besitzt den gleichen Grad wie F . Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz gehört \tilde{F} zu \mathfrak{a} (wir können annehmen, dass \mathfrak{a} ein Radikal ist). Dann gehört aber auch F , das sich aus \tilde{F} durch Homogenisieren ergibt, zur Homogenisierung von \mathfrak{a} , also zu \mathfrak{b} . \square

Projektive ebene Kurven

Definition 28.9. Eine *projektive ebene Kurve* ist die Nullstellenmenge $C = V_+(F) \subset \mathbb{P}_K^2$ zu einem homogenen nicht-konstanten Polynom $F \in K[X, Y, Z]$.

Zu einer ebenen affinen Kurve $V(F) \subset \mathbb{A}_K^2$ liegt insgesamt die Situation

$$V = V(F) \subset \mathbb{A}_K^2 \subset \mathbb{P}_K^2$$

vor. Den (topologischen) Abschluss von V in \mathbb{P}_K^2 nennt man den *projektiven Abschluss* der Kurve.

Korollar 28.10. Zu einer ebenen affinen Kurve $V = V(G) \subseteq \mathbb{A}_K^2 \subseteq \mathbb{P}_K^2$, $G \in K[X, Y]$, wird der Zariski-Abschluss von V in \mathbb{P}_K^2 durch $C = V_+(H)$ beschrieben, wobei H die Homogenisierung von G in $K[X, Y, Z]$ bezeichnet.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 28.8, da die Homogenisierung eines Hauptideals das durch die Homogenisierung erzeugte Hauptideal ist. \square

Bemerkung 28.11. Sei $G \in K[X, Y]$ mit der Homogenisierung $F \in K[X, Y, Z]$. Man gewinnt G aus F zurück, indem man Z durch 1 ersetzt. G beschreibt dann den Durchschnitt $D_+(Z) \cap V_+(F)$. Die beiden anderen affinen Ausschnitte, also

$$D_+(X) \cap V_+(F) \text{ und } D_+(Y) \cap V_+(F),$$

sind gleichberechtigt und liefern insbesondere affine Umgebungen für die Punkte von $C = V_+(F)$, die nicht in $D_+(Z)$ liegen.

Um beispielsweise die Glattheit in einem Punkt $P \in C$ nachzuweisen wählt man sich eine offene affine Umgebung (am besten eine der $D_+(L) \cap C$, $L = X, Y, Z$) und überprüft dort mit dem Ableitungskriterium und der affinen Gleichung die Glattheit in diesem Punkt. Dabei hängt das Ergebnis für den Punkt nicht davon ab, mit welcher affinen Umgebung man arbeitet (es kann aber manchmal die eine Umgebung rechnerisch geschickter sein als eine andere).

Von der affinen Kurve $V(G)$ aus gesehen sind die Punkte im Unendlichen die Punkte aus $V_+(F) \cap V_+(Z)$. Das ist der Schnitt der projektiven Kurve mit einer projektiven Geraden. Dies ist eine endliche Menge, es sei denn die projektive Gerade ist eine Komponente der Kurve, was aber nicht sein kann, wenn man mit einer affinen Kurve startet (da Z kein Teiler der Homogenisierung ist). Zur Berechnung der unendlich fernen Punkte betrachtet man die homogene Zerlegung

$$G = G_d + \dots + G_m \text{ mit } m \leq d$$

und die Homogenisierung

$$F = G_d + G_{d-1}Z + \dots + G_m Z^{d-m}.$$

Zur Berechnung des Durchschnittes mit $V_+(Z)$ muss man $Z = 0$ setzen, so dass man die Nullstellen des homogenen Polynoms $G_d(X, Y)$ (in zwei Variablen) berechnen muss. Der Grad d gibt also sofort eine Schranke, wie viele unendlich fernen Punkte es maximal auf der Kurve geben kann.

Beispiel 28.12. Wir betrachten den Standardkegel $V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subset \mathbb{A}_K^3$. Da dies durch eine homogene Gleichung gegeben ist, kann man diesen Kegel auch sofort als eine ebene projektive Kurve (vom Grad zwei) auffassen. Die Schnitte des Kegels mit einer beliebigen Ebene $E \subset \mathbb{A}_K^3$ nennt man Kegelschnitte. Diese bekommen nun eine neue Interpretation. Eine Ebene E , auf der nicht der Nullpunkt liegt, kann man in natürlicher Weise identifizieren mit einer offenen affinen Ebene $D_+(L) \subseteq \mathbb{P}_K^2$ (wobei L eine homogene Linearform ist). Die Schnitte mit dem Kegel sind dann verschiedene affine Ausschnitte aus der ebenen projektiven Kurve $V_+(X^2 + Y^2 - Z^2)$. Insbesondere sind also Kreis, Hyperbel und Parabel solche affinen Ausschnitte.

Die Schnitte mit einer Ebenen durch den Nullpunkt sind hingegen projektiv verstanden die endlichen Teilmengen $V_+(X^2 + Y^2 - Z^2) \cap V_+(L)$.

Definition 28.13. Sei K ein Körper und $d \geq 1$. Dann heißt die ebene projektive Kurve

$$V(X^d + Y^d + Z^d) \subset \mathbb{P}_K^2$$

die *Fermat-Kurve* vom Grad d .

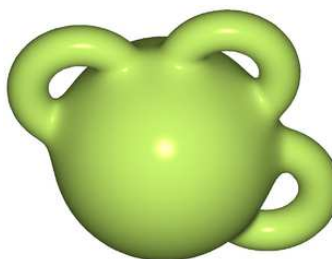
Für $d = 1$ handelt es sich einfach um eine projektive Gerade.

Lemma 28.14. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p \geq 0$ und sei $C = V_+(X^d + Y^d + Z^d) \subset \mathbb{P}_K^2$ die Fermat-Kurve vom Grad d . Die Charakteristik sei kein Teiler von d . Dann ist C eine glatte Kurve.

Beweis. Da Glattheit eine lokale Eigenschaft ist, können wir mit einem beliebigen affinen Ausschnitt argumentieren. Da die Situation symmetrisch ist, können wir uns auf das affine Teilstück

$$V(X^d + Y^d + 1) \subset \mathbb{A}_K^2$$

beschränken. Die partiellen Ableitungen sind dX^{d-1} und dY^{d-1} . Aufgrund der Voraussetzung über die Charakteristik ist $d \neq 0$, so dass beide Ableitungen nur bei $x = y = 0$ verschwinden. Dieser Punkt gehört aber nicht zur Kurve. \square



Bemerkung 28.15. Wählt man die komplexen Zahlen \mathbb{C} als Grundkörper, so kann man eine glatte projektive Kurve auch als eine reell zweidimensionale kompakte orientierte Mannigfaltigkeit auffassen. Diese lassen sich topologisch einfach klassifizieren, und zwar ist eine solche Mannigfaltigkeit homöomorph zu einer Kugeloberfläche, an die g Henkel angeklebt werden. Diese Zahl nennt man das *Geschlecht* der reellen Fläche und damit auch der Kurve. Die komplex-projektive Gerade ist eine zweidimensionale Sphäre und hat keinen Henkel, ihr Geschlecht ist also null. Eine Fläche vom Geschlecht eins ist ein Torus (ein Autoreifen) der homöomorph zu $S^1 \times S^1$ ist. Projektive Kurven, die als topologische Mannigfaltigkeit das Geschlecht eins besitzen, nennt man *elliptische Kurven*.

Es gibt auch algebraische Definitionen für das Geschlecht, so dass diese Invariante für glatte projektive Kurven über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper definiert ist. Und zwar ist das Geschlecht gleich der K -Dimension

der *ersten Kohomologiegruppe der Strukturgarbe* und auch gleich der K -Dimension der *globalen Differentialformen* auf der Kurve. Zu jedem g gibt es projektive Kurven mit Geschlecht g . Insbesondere kann man jede orientierbare reell zweidimensionale kompakte Fläche als komplex-projektive Kurve realisieren. Man spricht dann auch von *Riemannschen Flächen*.

Für eine glatte ebene Kurve $C = V_+(F) \subset \mathbb{P}_K^2$ vom Grad $d = \deg(F)$ gibt es eine einfache Formel für das Geschlecht: es ist nämlich

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Damit haben glatte projektive Kurven vom Grad eins und zwei (Geraden und Quadriken) das Geschlecht null, es handelt sich (vom Isomorphietyp her) in der Tat um projektive Geraden. Für $d = 3$ erhält man das Geschlecht 1, also elliptische Kurven. Für $d = 4$ erhält man schon $g = 3$. Dies zeigt auch, dass sich nicht jedes Geschlecht als Geschlecht einer ebenen glatten Kurve realisieren lässt. Es ist beispielsweise gar nicht so einfach, explizit Gleichungen für eine Kurve vom Geschlecht 2 anzugeben.

28. ARBEITSBLATT

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 28.1. Sei $P = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{P}_K^n$ ein Punkt im projektiven Raum. Zeige, dass es eine offene affine Umgebung $U \cong \mathbb{A}_K^n \subset \mathbb{P}_K^n$ gibt derart, dass P in diesem affinen Raum dem Nullpunkt entspricht.

Aufgabe 28.2. Sei $D_+(L) \cong \mathbb{A}_K^n \subset \mathbb{P}_K^n$, wobei L eine homogene Linearform im zugehörigen Polynomring $K[X_0, \dots, X_n]$ sei. Zeige, dass die Zariski-Topologie auf dem projektiven Raum die Zariski-Topologie auf dem affinen Raum induziert.

Aufgabe 28.3. Definiere zu jedem $n \in \mathbb{Z}$ das Potenzieren $x \mapsto x^n$ als Morphismus der projektiven Gerade auf sich selbst. Wie sehen die Fasern unter diesem Morphismus aus?

Aufgabe 28.4. Bestimme den projektiven Abschluss der durch

$$V((X^2 + Y^2)^2 - 2X(X^2 + Y^2) - Y^2)$$

gegebenen *Kardioide* über den komplexen Zahlen und insbesondere die „Punkte im Unendlichen“.

Aufgabe 28.5. Zeige, dass die Kegelabbildung

$$\mathbb{A}_K^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_K^n$$

ein Morphismus von quasiprojektiven Varietäten ist.

Aufgabe 28.6. Zeige durch ein Beispiel, dass die Kegelabbildung

$$\mathbb{A}_K^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_K^n$$

nicht abgeschlossen sein muss.

Aufgabe 28.7. Seien X und Y quasiprojektive Varietäten und sei $\varphi : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Es sei $Y = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Zeige, dass φ genau dann ein Morphismus ist, wenn die Einschränkungen $\varphi_i : \varphi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ Morphismen sind für jedes i .

Aufgabe 28.8. Sei K ein Körper. Bestimme den globalen Schnitttring

$$\Gamma(\mathbb{P}_K^1, \mathcal{O}).$$

Was folgt daraus für einen Morphismus $\mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{A}_K^1$?

Aufgabe 28.9. Man definiere und charakterisiere, wann eine irreduzible quasiprojektive Varietät *normal* ist.

Aufgabe 28.10.*

Sei K ein Körper. Betrachte die affine ebene Kurve

$$C = V(Y - X^3 + X + 2).$$

Definiere einen Isomorphismus zwischen C und der affinen Geraden \mathbb{A}_K^1 . Lässt sich ein solcher Isomorphismus zu einem Isomorphismus zwischen \mathbb{P}_K^1 und dem projektiven Abschluss $\bar{C} \subset \mathbb{P}_K^2$ fortsetzen?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 28.11. (3 Punkte)

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$. Es sei $H \subset \mathbb{K}^{n+1}$ ein n -dimensionaler affiner Unterraum, der den Nullpunkt nicht enthält, und es sei \tilde{H} der dazu parallele Unterraum durch den Nullpunkt. Es sei $U \subseteq H$ eine in $H \cong \mathbb{K}^n$ offene Menge (in der metrischen Topologie) und es sei V die Menge aller Geraden durch den Nullpunkt und durch einen Punkt von U . Zeige, dass der Durchschnitt von V mit $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \tilde{H}$ offen ist.

Aufgabe 28.12. (4 Punkte)

Bestimme für die Kegelabbildung

$$\mathbb{A}_K^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_K^n$$

den Zariski-Abschluss im \mathbb{P}_K^n des Bildes einer abgeschlossenen Menge $V(\mathfrak{a}) \cap \mathbb{A}_K^{n+1} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 28.13. (3 Punkte)

Sei X eine irreduzible quasiprojektive Varietät mit Funktionenkörper $L = K(X)$. Es seien U und U_i , $i \in I$, offene Teilmengen mit $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Zeige, dass

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) = \bigcap_{i \in I} \Gamma(U_i, \mathcal{O})$$

ist, wobei der Durchschnitt in L genommen wird.

Aufgabe 28.14. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und \mathbb{P}_K^n der projektive Raum. Zeige, dass die Konstanten die einzigen globalen algebraischen Funktionen sind, d.h. es gilt

$$\Gamma(\mathbb{P}_K^n, \mathcal{O}) = K.$$

Bemerkung: Diese Aussage gilt für jede zusammenhängende projektive Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper.

29. VORLESUNG - PROJEKTIVE KURVEN II

Projektion weg von einem Punkt

Definition 29.1. Die Abbildung

$$\mathbb{P}_K^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\} \longrightarrow \mathbb{P}_K^{n-1}, (x_0, x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n),$$

heißt *die Projektion weg vom Punkt* $(1, 0, \dots, 0)$.

Diese Abbildung ist ein wohldefinierter Morphismus, der außerhalb des *Zentrums* $(1, 0, \dots, 0)$ der Projektion definiert ist. Jedem anderen Punkt wird derjenige Punkt des \mathbb{P}_K^{n-1} zugeordnet, der der Geraden durch den Punkt und dem Zentrum entspricht. Daher ist die Abbildung surjektiv und jede Faser ist eine projektive Gerade ohne den Zentrumspunkt, also eine affine Gerade (es liegt ein sogenanntes *Geradenbündel* über dem \mathbb{P}_K^{n-1} vor). Es handelt sich um die Fortsetzung der Kegelabbildung

$$\mathbb{A}_K^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_K^{n-1}$$

auf den punktierten projektiven Raum. Die entsprechende Abbildung kann man zu jedem Zentrumspunkt definieren, siehe Aufgabe 29.6.

Abbildungen nach \mathbb{P}_K^1

Der folgende Satz liefert eine neue Version der Noetherschen Normalisierung.

Satz 29.2. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $C \subset \mathbb{P}_K^2$ eine ebene projektive Kurve vom Grad d . Dann gibt es einen surjektiven Morphismus*

$$C \longrightarrow \mathbb{P}_K^1$$

derart, dass alle Fasern aus maximal d Punkten bestehen.

Beweis. Es sei $P \in \mathbb{P}_K^2$ ein Punkt, der nicht auf der Kurve liegt. Einen solchen Punkt gibt es, da der Körper insbesondere unendlich ist. Wir betrachten die Projektion weg von P , die insgesamt einen Morphismus

$$C \hookrightarrow \mathbb{P}_K^2 \setminus \{P\} \longrightarrow \mathbb{P}_K^1$$

induziert. Die Faser dieses Morphismus über einem Punkt $Q \in \mathbb{P}_K^1$ (der eine Richtung in $P \in \mathbb{P}_K^2$ repräsentiert) besteht genau aus den Punkten der Kurve, die auf der durch Q definierten Geraden

$$G = V_+(aX + bY + cZ) \cong \mathbb{P}_K^1 \subset \mathbb{P}_K^2$$

liegen. Daher wird die Faser über Q auf G beschrieben, indem man in der Kurvengleichung $C = V_+(F)$ mittels der Geradengleichung eine Variable eliminiert. Das Ergebnis ist ein homogenes Polynom \bar{F} in zwei Variablen vom Grad d , das nicht null ist, denn sonst wäre P ein Punkt der Kurve. Da wir über einem algebraisch abgeschlossenen Körper sind, besitzt dieses Polynom \bar{F} mindestens eine und höchstens d Nullstellen, die alle von P verschieden sind. Dies ergibt die Surjektivität und die Abschätzung für die Faser. \square

Satz 29.3. *Es sei K ein Körper und $C \subset \mathbb{P}_K^2$ eine glatte irreduzible ebene projektive Kurve. Es sei $D = C \cap D_+(Z) \cong K\text{-Spek}(R)$ ein affines Teilstück davon. Es sei $q = f/g \in Q(R)$ eine rationale Funktion (mit $f, g \in R$, $g \neq 0$). Dann gibt es einen eindeutigen Morphismus*

$$\varphi: C \longrightarrow \mathbb{P}_K^1$$

derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D(g) & \xrightarrow{f/g} & \mathbb{A}_K^1 \cong D_+(t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}_K^1 \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. Wir definieren zunächst auf D eine Fortsetzung

$$\varphi: D \longrightarrow \mathbb{P}_K^1$$

der rationalen Funktion f/g . Sei hierzu $P \in D$ ein Punkt der Kurve. Bei $P \in D(g)$ ist nichts zu tun, sei also $g(P) = 0$. Da die Kurve glatt ist, ist der

lokale Ring B der Kurve im Punkt P ein diskreter Bewertungsring. Daher hat der Quotient f/g dort eine Beschreibung als

$$\frac{f}{g} = u\pi^n$$

mit $u \in B^\times$ und $n \in \mathbb{Z}$ (π sei eine Ortsuniformisierende). Es gibt eine offene Umgebung $P \in D(h) \subseteq D$ derart, dass π und u über $D(h)$ definiert sind und u dort eine Einheit ist. Bei $n \geq 0$ ist $f/g \in R_h$ und die undefinierte Stelle ist also sogar als Abbildung nach \mathbb{A}_K^1 „hebbar“. Bei $n \leq 0$ ist der umgekehrte Bruch $g/f = u^{-1}\pi^{-n}$ auf $D(h)$ definiert als eine Abbildung nach \mathbb{A}_K^1 . Mittels der „verdrehten Einbettung“ $\mathbb{A}_K^1 \cong D_+(s) \hookrightarrow \mathbb{P}_K^1$ erhält man eine Abbildung nach \mathbb{P}_K^1 .

Wir müssen zeigen, dass diese zwei Morphismen in die projektive Gerade dort, wo beide definiert sind, übereinstimmen. Das sind die Punkte P mit $n = 0$. Die Verträglichkeit folgt daraus, dass in einer offenen Umgebung $P \in U$ eine Abbildung

$$f/g: U \longrightarrow (\mathbb{A}_K^1)^\times = \mathbb{A}_K^1 \setminus \{0\}$$

vorliegt, und dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{A}_K^1)^\times & \xrightarrow{i^{-1}} & \mathbb{A}_K^1 \cong D_+(s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A}_K^1 \cong D_+(t) & \longrightarrow & \mathbb{P}_K^1 \end{array}$$

kommutiert. Dies ergibt einen wohldefinierten Morphismus auf dem affinen Stück D .

Für einen beliebigen Punkt der projektiven Kurve C und eine affine Umgebung $P \in D' \subset C$ liegt die gleiche Situation vor, da $D_+(g) \cap D' \neq \emptyset$ ist, und somit auf einer offenen nichtleeren Menge die rationale Funktion (mit anderen Zählern und Nennern) definiert ist. Damit lässt sich das vorhergehende Argument genauso anwenden.

Die Eindeutigkeit folgt daraus, dass auf jeder affinen offenen Menge $P \in U$ der Durchschnitt $U \cap D_+(g)$ nicht leer ist. Ein Morphismus auf einer integren Varietät in die affine Gerade \mathbb{A}_K^1 ist durch die rationale Funktion eindeutig festgelegt. \square

Beispiel 29.4. Die Inversenbildung

$$\mathbb{A}_K^1 \supset D(z) \longrightarrow \mathbb{A}_K^1, z \longmapsto z^{-1},$$

lässt sich zu einem bijektiven Morphismus

$$\mathbb{P}_K^1 \longrightarrow \mathbb{P}_K^1, (x, y) \longmapsto (y, x)$$

fortsetzen. Dies folgt direkt aus Satz 29.3. Dabei geht ein Punkt $z \neq 0$ auf $1/z$ und der Nullpunkt geht auf den unendlich fernen Punkt ∞ .

Parametrisierte projektive ebene Kurven

Sei eine rational parametrisierte Kurve $s \mapsto \left(\frac{\varphi_1(s)}{\psi(s)}, \frac{\varphi_2(s)}{\psi(s)} \right)$ gegeben. Wir haben in Satz 6.11 gesehen, dass das Bild eine algebraische Gleichung erfüllt. Dabei haben wir im dortigen Beweis schon die homogenisierte Parametrisierung verwendet, die jetzt als projektive Fortsetzung wieder auftaucht.

Satz 29.5. *Es sei*

$$\mathbb{A}_K^1 \supseteq D(\psi) \longrightarrow \mathbb{A}_K^2, s \longmapsto \left(\frac{\varphi_1(s)}{\psi(s)}, \frac{\varphi_2(s)}{\psi(s)} \right),$$

eine rationale Parametrisierung in gekürzter (d.h. die $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ haben keinen gemeinsamen Teiler) Darstellung. Es sei d der maximale Grad der beteiligten Polynome und es seien $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \hat{\psi}$ die Homogenisierungen (bezüglich der neuen Variablen t) davon. Es seien H_i die Produkte dieser Homogenisierungen mit einer Potenz von t derart, dass H_1, H_2, H_3 alle den Grad d besitzen. Dann definieren die H_1, H_2, H_3 einen Morphismus

$$H: \mathbb{P}_K^1 \longrightarrow \mathbb{P}_K^2, (s, t) \longmapsto (H_1(s, t), H_2(s, t), H_3(s, t)),$$

derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_K^1 \supseteq D(\psi) & \longrightarrow & \mathbb{A}_K^2 \cong D_+(Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}_K^1 & \xrightarrow{H} & \mathbb{P}_K^2 \end{array}$$

kommutativ ist. Dabei liegt das Bild unter H auf dem projektiven Abschluss der affinen Bildkurve.

Beweis. Die Abbildung H ist aufgrund von Aufgabe 29.5 wohldefiniert, und zwar auf ganz \mathbb{P}_K^1 , da $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ insgesamt teilerfremd sind. Zur Kommutativität muss man lediglich beachten, dass $s \in D(\psi) \subseteq \mathbb{A}_K^1$ einerseits über $(s, 1)$ auf

$$(H_1(s, 1), H_2(s, 1), H_3(s, 1)) = (\varphi_1(s), \varphi_2(s), \psi(s))$$

abgebildet wird und andererseits auf

$$\left(\frac{\varphi_1(s)}{\psi(s)}, \frac{\varphi_2(s)}{\psi(s)}, 1 \right) = (\varphi_1(s), \varphi_2(s), \psi(s)).$$

Für den Zusatz sei C der affine Abschluss des Bildes und $\bar{C} \subset \mathbb{P}_K^2$ der projektive Abschluss davon. Wir betrachten das offene Komplement $U = \mathbb{P}_K^2 \setminus \bar{C}$. Da die Abbildung stetig ist, ist das Urbild $H^{-1}(U)$ offen in \mathbb{P}_K^1 , und es kann nur Punkte aus $\mathbb{P}_K^1 \setminus D(\psi)$ enthalten. Eine endliche und offene Teilmenge der projektiven Geraden muss aber leer sein. \square

Satz 29.6. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \in K[X]$ ein Polynom in einer Variablen vom Grad $d \geq 1$. Dann wird der projektive Abschluss C des Graphen $V(Y - F(X))$ durch $V(YZ^{d-1} - \hat{F}(X, Z))$ beschrieben, wobei $\hat{F}(X, Z)$ die Homogenisierung von F bezeichnet. Dabei gibt es in*

C bei $d = 1$ (mit $F = aX + b$) noch den glatten Punkt $(1, a, 0)$ und bei $d \geq 2$ noch den Punkt $(0, 1, 0)$, der bei $d \geq 3$ singulär ist. Bei $d \geq 2$ besitzt der Punkt im Unendlichen die Multiplizität $d - 1$.

Beweis. Die Gleichung für den projektiven Abschluss folgt direkt aus Satz 28.8. Den Schnitt von C mit der projektiven Geraden $V_+(Z)$ im Unendlichen erhält man, wenn man in der Gleichung $Z = 0$ setzt. Bei $d = 1$ liegt insgesamt die Geradengleichung $V_+(Y - aX - bZ)$ vor, und der Schnitt mit $V_+(Z)$ legt den einzigen Punkt $(1, a, 0)$ fest. Bei $d \geq 2$ liegt die Kurvengleichung

$$V_+(YZ^{d-1} - s_d X^d - s_{d-1} X^{d-1} Z - \dots - s_0 Z^d)$$

mit $s_d \neq 0$ vor. Setzt man $Z = 0$, so bleibt $V_+(-s_d X^d)$ übrig, woraus $X = 0$ folgt. Dies entspricht dem einzigen unendlich fernen Punkt $(0, 1, 0)$.

Für die Multiplizität betrachtet man die affine Gleichung der Kurve auf $D_+(Y)$. D.h. man setzt $Y = 1$ und erhält die affine Gleichung

$$V_+(Z^{d-1} - s_d X^d - s_{d-1} X^{d-1} Z - \dots - s_0 Z^d),$$

und der Punkt ist in diesen Koordinaten der Nullpunkt. Daher ist die Multiplizität gleich $d - 1$ mit der einzigen durch $Z = 0$ gegebenen Tangente. Bei $d \geq 3$ ist die Multiplizität ≥ 2 und daher liegt ein singulärer Punkt vor. \square

Dieser Satz ist so zu verstehen, dass bei $d \geq 2$ die y -Achse (dafür steht der Punkt $(0, 1, 0)$) „asymptotisch“ zum Graphen gehört (und auch die einzige Asymptote des Graphen ist). Die unendlich ferne Gerade $V_+(Z)$ ist die (einzige) Tangente an diesem Punkt. Die Normalisierung von C ist der \mathbb{P}_K^1 , und zwar ist die Normalisierungsabbildung nach Satz 29.5 gegeben durch

$$\mathbb{P}_K^1 \longrightarrow C \subset \mathbb{P}_K^2, (x, t) \longmapsto (xt^{d-1}, \hat{F}(x, t), t^d).$$

Dabei geht der unendlich ferne Punkt $(1, 0)$ auf $(0, s_d, 0) = (0, 1, 0)$.

Satz 29.7. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $G, H \in K[X]$ Polynome in einer Variablen vom Grad $d, e \geq 1$ ohne gemeinsame Nullstelle. Sei $H \neq 0$ und sei $F(X) = G(X)/H(X)$ die zugehörige rationale Funktion. Seien $\hat{G}(X, Z)$ und $\hat{H}(X, Z)$ die zugehörigen Homogenisierungen. Dann wird der projektive Abschluss C des Graphen von $F(X)$ bei $d > e$ durch

$$V_+(\hat{H}(X, Z)YZ^{d-e-1} - \hat{G}(X, Z))$$

und bei $d \leq e$ durch

$$V_+(\hat{H}(X, Z)Y - \hat{G}(X, Z)Z^{e-d+1})$$

beschrieben.

Beweis. Die affine Beschreibung der Kurve ist $V(YH - G)$. Nach Satz 28.8 wird der projektive Abschluss durch die Homogenisierung von $YH - G$ beschrieben. Für diese ist der maximale Grad von YH und G ausschlaggebend, der Summand mit kleinerem Grad muss durch eine geeignete Potenz von Z „aufgefüllt“ werden. Dies ergibt die angegebenen Gleichungen. \square

Monomiale projektive Kurven

Zu einer ebenen monomialen Kurve $s \mapsto (s^e, s^d) = (x, y)$ mit teilerfremden Exponenten $e > d$ gehört nach Satz 29.5 die monomiale projektive Kurve

$$(s, t) \mapsto (s^e, s^d t^{e-d}, t^e).$$

Auf der offenen Menge $D_+(t)$ ist dies die ursprüngliche Abbildung und auf $D_+(s)$ ist dies die affine Abbildung

$$t \mapsto (t^{e-d}, t^e).$$

Satz 29.8. *Seien $e > d$ teilerfremd. Für die durch*

$$(s, t) \mapsto (s^e, s^d t^{e-d}, t^e)$$

gegebene ebene projektive monomiale Kurve C vom Grad e gelten folgende Aussagen.

- (1) *Die Kurve wird beschrieben durch die homogene Gleichung $Y^e = X^d Z^{e-d}$ vom Grad e .*
- (2) *Die Kurve ist glatt für alle Punkte $\neq (0, 0, 1)$ und $\neq (1, 0, 0)$.*
- (3) *Die Kurve hat im Punkt $(0, 0, 1)$ die Multiplizität d und im Punkt $(1, 0, 0)$ die Multiplizität $e - d$.*
- (4) *Bei $e \geq 3$ ist die Kurve nicht glatt.*

Beweis. (1) Die affine Gleichung ist $X^d - Y^e$, und nach Satz 28.8 wird der projektive Abschluss durch die Homogenisierung, also durch $V(X^d Z^{e-d} - Y^e)$ beschrieben.

- (2) Auf der affinen Kurve $V(X^d - Y^e) \subset \mathbb{A}_K^2 \subset \mathbb{P}_K^2$ ist nach Satz 20.12 nur der Nullpunkt, der dem projektiven Punkt $(0, 0, 1)$ entspricht, (eventuell) nicht glatt. Die Punkte auf der Kurve außerhalb von $D_+(Z)$ erhält man, indem man in der Gleichung $Z = 0$ setzt. Dies erzwingt $Y = 0$, so dass es lediglich noch den Punkt $(1, 0, 0)$ gibt.
- (3) Die Multiplizität in einem Punkt ist eine lokale Eigenschaft. Der Punkt $(0, 0, 1)$ entspricht dem Nullpunkt auf der affinen monomialen Kurve $V(X^d - Y^e)$, deren Multiplizität im Nullpunkt nach Korollar 23.8 gleich dem kleineren Exponenten, also gleich d ist. Der Punkt $(1, 0, 0)$ liegt auf $D_+(X)$ und dort ist $V(Y^e - Z^{e-d})$ die affine Gleichung. Die Multiplizität ist wieder der kleinere Exponent, also gleich $e - d$.
- (4) Folgt aus (3).

□

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 29.1. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass eine ebene projektive Kurve mit jeder projektiven Geraden in der projektiven Ebene einen nichtleeren Durchschnitt hat.

Aufgabe 29.2.*

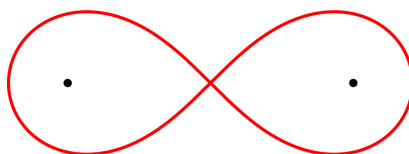
Sei $K = \mathbb{Z}/(5)$ und betrachte die beiden affinen ebenen algebraischen Kurven

$$C = V(X^2 + Y^2 - 1) \text{ und } D = V(X^3 - 2Y^2 + 3).$$

Bestimme den Durchschnitt $C \cap D$. Bestimme ferner die unendlich fernen Punkte der beiden Kurven (also die zusätzlichen Punkte auf dem projektiven Abschluss \bar{C} bzw. \bar{D}). Wenn man K durch einen algebraisch abgeschlossenen Körper $K \subset L$ ersetzt, wie viele Punkte besitzt dann der Durchschnitt $\bar{C} \cap \bar{D}$ und wie viele davon liegen auf der unendlich fernen Geraden?

Aufgabe 29.3.*

Sei K ein Körper. Zeige, dass sämtliche lokale Ringe der projektiven Geraden \mathbb{P}_K^1 isomorph zueinander sind. Man gebe eine möglichst einfache Beschreibung dieses Ringes.



Die Lemniskate von Bernoulli

Aufgabe 29.4. Bestimme für die durch $V((X^2 + Y^2)^2 - X^2 + Y^2)$ gegebene Lemniskate von Bernoulli die Singularitäten sowie die unendlich fernen Punkte in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Berechne in all diesen Punkten die Multiplizität und die Tangenten.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 29.5. (3 Punkte)

Seien $m + 1$ homogene Polynome F_0, \dots, F_m in $n + 1$ Variablen gegeben, die alle den gleichen Grad d besitzen. Zeige, dass es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{P}_K^n$ gibt, auf der die Polynome einen Morphismus

$$\mathbb{P}_K^n \supseteq U \longrightarrow \mathbb{P}_K^m$$

definieren.

Aufgabe 29.6. (3 Punkte)

Sei $P = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{P}_K^n$ ein Punkt im projektiven Raum. Zeige, dass die Projektion des \mathbb{P}_K^n auf \mathbb{P}_K^{n-1} mit Zentrum P durch die Matrix

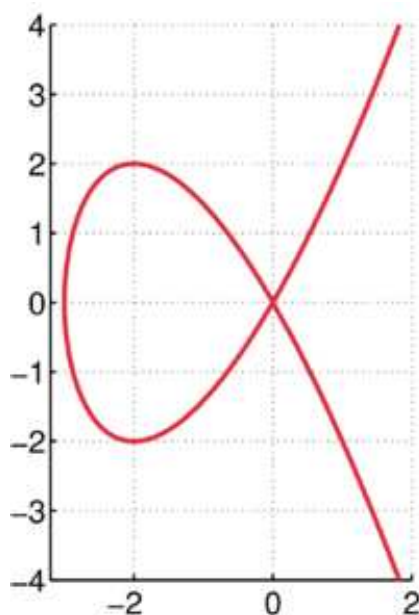
$$\begin{pmatrix} -a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, also durch die Abbildung

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 29.7. (3 Punkte)

Bestimme für die durch $V(X^3 + 3X^2 - Y^2)$ gegebene *Tschirnhausen Kubik* die Singularitäten unter Berücksichtigung der unendlich fernen Punkte. Bestimme die Tangenten in den Singularitäten und in den unendlich fernen Punkten.



Die Tschirnhausen Kubik

Aufgabe 29.8. (3 Punkte)

Bestimme für das durch $V(X^3 + Y^3 - 3XY)$ definierte Kartesische Blatt die unendlich fernen Punkte in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ und berechne die Multiplizität und die Tangenten in diesen Punkten.

Aufgabe 29.9. (5 Punkte)

Man gebe für die projektive Lemniskate von Bernoulli

$$V_+((X^2 + Y^2)^2 - Z^2 X^2 + Z^2 Y^2) \subset \mathbb{P}_K^2$$

einen surjektiven Morphismus auf eine projektive Quadrik an. Wie viele Punkte der Lemniskate werden dabei auf einen Punkt der Quadrik abgebildet?

30. VORLESUNG - SATZ VON BEZOUT

Der Satz von Bezout

Wir werden in dieser Vorlesung den Satz von Bezout für die projektive Ebene beweisen, das ist die Aussage, dass für zwei projektive Kurven in der projektiven Ebene ohne gemeinsame Komponente vom Grad m und n die Summe über alle Schnittmultiplizitäten gleich mn ist. Unsere Darstellung folgt weitgehend dem Aufbau in Fulton.

Zu einem Polynomring P und einer natürlichen Zahl ℓ bezeichnet P_ℓ im Folgenden die sogenannte ℓ -te Stufe, die aus allen homogenen Polynomen vom Grad ℓ besteht. Diese Bezeichnungsweise übernehmen wir auch für homogene Restklassenringe des Polynomrings (also einem Restklassenring des Polynomrings nach einem homogenen Ideal). Diese Stufen werden über dem Grundkörper K von allen Monomen vom Grad ℓ erzeugt. Insbesondere handelt es sich um endlichdimensionale K -Vektorräume.

Lemma 30.1. *Sei K ein Körper und seien $F, G \in K[X, Y, Z] = P$ zwei homogene Polynome vom Grad m und n ohne gemeinsamen nichtkonstanten Teiler. Dann ist*

$$\dim_K(P/(F, G))_\ell = mn \text{ für } \ell \text{ hinreichend groß.}$$

Beweis. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{(G, -F)} P \times P \xrightarrow{(F, G)} P \longrightarrow P/(F, G) \longrightarrow 0.$$

Dabei steht vorne die Abbildung $H \mapsto (GH, -FH)$, dann folgt die Abbildung $(A, B) \mapsto (AF + BG)$ und schließlich die Restklassenbildung. All diese Abbildungen sind P -Modul-Homomorphismen. Die Injektivität vorne ist klar, da P ein Integritätsbereich ist. Die Exaktheit an den beiden hinteren Stellen ist klar, bleibt noch die Exaktheit an der zweiten Stelle zu zeigen. Dort ist klar, dass die Verknüpfung die Nullabbildung ist. Sei also $AF + BG = 0$ in P . Da P faktoriell ist und da F und G teilerfremd sind folgt aber, dass A ein Vielfaches von G sein muss. Dann kann man durch G teilen und erhält, dass B ein Vielfaches von F sein muss (mit dem gleichen Faktor). Also kommt (A, B) von links.

Da F und G homogen sind mit fixierten Graden, kann man diese Sequenz einschränken auf homogene Stufen, und zwar ergibt sich dabei die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow P_{\ell-m-n} \xrightarrow{(G, -F)} P_{\ell-m} \times P_{\ell-n} \xrightarrow{(F, G)} P_\ell \longrightarrow (P/(F, G))_\ell \longrightarrow 0$$

(dabei sind die Stufen für negativen Index null). Die Exaktheit bleibt erhalten, da bei einem homogenen Homomorphismus die Stufen unabhängig voneinander sind. Alle beteiligten Stufen sind nun endlichdimensionale Vektorräume. Für $\ell \geq m + n$ sind alle Indizes nichtnegativ und daher gilt $\dim(P_\ell) = \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2}$. Wegen der Additivität der Dimension bei exakten Sequenzen ergibt sich

$$\begin{aligned} \dim((P/(F, G))_\ell) &= \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2} - \frac{(\ell-m+1)(\ell-m+2)}{2} - \frac{(\ell-n+1)(\ell-n+2)}{2} \\ &\quad + \frac{(\ell-m-n+1)(\ell-m-n+2)}{2} \\ &= \frac{2 - (-m+1)(-m+2) - (-n+1)(-n+2) + (-m-n+1)(-m-n+2)}{2} \\ &= \frac{2mn}{2} = mn. \end{aligned}$$

□

Lemma 30.2. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $F, G \in K[X, Y, Z]$ homogene Polynome ohne gemeinsame (projektive) Nullstelle auf $V_+(Z) \subset \mathbb{P}_K^2$. Es sei $R = K[X, Y, Z]/(F, G)$ der zugehörige Restklassenring. Dann ist die Abbildung*

$$R \longrightarrow R, H \longmapsto ZH,$$

injektiv.

Beweis. Sei $H \in K[X, Y, Z]$ und vorausgesetzt, dass H unter der angegebenen Abbildung auf 0 geht. Das bedeutet, dass eine Gleichung

$$ZH = LF + MG$$

mit $L, M \in K[X, Y, Z]$ vorliegt. Wir ersetzen in dieser Gleichung die Variable Z durch 0 und erhalten die Gleichung

$$0 = L(X, Y, 0)F(X, Y, 0) + M(X, Y, 0)G(X, Y, 0)$$

in $K[X, Y]$. Nach der Voraussetzung, dass es keine gemeinsame projektive Nullstelle auf $V_+(Z)$ gibt, besitzen $F(X, Y, 0)$ und $G(X, Y, 0)$ in \mathbb{A}_K^2 nur den Nullpunkt $(0, 0)$ als gemeinsame Nullstelle. Daher sind diese Polynome in $K[X, Y]$ teilerfremd. Das bedeutet, dass es ein Polynom $Q \in K[X, Y]$ mit

$$L(X, Y, 0) = QG(X, Y, 0) \text{ und } M(X, Y, 0) = -QF(X, Y, 0)$$

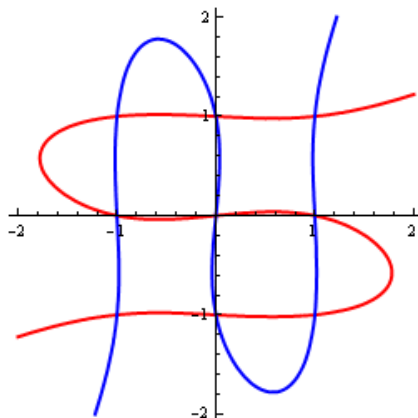
gibt. Dies wiederum heißt zurückübersetzt nach $K[X, Y, Z]$, dass dort

$$L = QG(X, Y, 0) + Z\bar{L} \text{ und } M = -QF(X, Y, 0) + Z\bar{M}$$

gilt. Mit $F = F(X, Y, 0) + Z\bar{F}$ und $G = G(X, Y, 0) + Z\bar{G}$ ergibt sich aus der Ausgangsgleichung

$$\begin{aligned} ZH &= LF + MG \\ &= (QG(X, Y, 0) + Z\bar{L})F + (-QF(X, Y, 0) + Z\bar{M})G \\ &= Q(G - Z\bar{G})F - Q(F - Z\bar{F})G + Z\bar{L}F + Z\bar{M}G \\ &= -QZ\bar{G}F + QZ\bar{F}G + Z\bar{L}F + Z\bar{M}G \\ &= Z(-Q\bar{G}F + Q\bar{F}G + \bar{L}F + \bar{M}G). \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung können wir Z herauskürzen und erhalten eine Darstellung für H als Linearkombination aus F und G . Damit ist die Restklasse von H in R ebenfalls 0. \square



Satz 30.3. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $F, G \in K[X, Y, Z]$ zwei homogene Polynome vom Grad m und n ohne gemeinsame Komponente mit zugehörigen Kurven $C = V_+(F), D = V_+(G) \subset \mathbb{P}_K^2$. Dann gilt

$$\sum_P \text{mult}_P(C, D) = mn.$$

Beweis. Der Durchschnitt $C \cap D$ besteht nur aus endlich vielen Punkten. Wir können daher annehmen, dass alle Schnittpunkte in $\mathbb{A}_K^2 = D_+(Z) \subset \mathbb{P}_K^2$ liegen. Es seien \tilde{F} und \tilde{G} die inhomogenen Polynome aus $K[X, Y]$, die die affinen Kurven $C \cap \mathbb{A}_K^2$ und $D \cap \mathbb{A}_K^2$ beschreiben. Damit ist

$$\begin{aligned} \sum_{P \in \mathbb{P}_K^2} \text{mult}_P(F, G) &= \sum_{P \in \mathbb{A}_K^2} \text{mult}_P(\tilde{F}, \tilde{G}) \\ &= \sum_{P \in \mathbb{A}_K^2} \dim_K (K[X, Y]_{\mathfrak{m}_P} / (\tilde{F}, \tilde{G})) \\ &= \dim_K (K[X, Y] / (\tilde{F}, \tilde{G})). \end{aligned}$$

Dabei beruht die letzte Gleichung auf Satz 26.11. Wie wollen die Dimension dieses inhomogenen Restklassenrings mit der Dimension einer Stufe des homogenen Restklassenrings $(K[X, Y, Z] / (F, G))_\ell$ in Verbindung bringen. Von letzterer wissen wir aufgrund von Lemma 30.1, dass sie für ℓ hinreichend groß gleich mn ist.

Wir wählen eine Basis V_1, \dots, V_{mn} von $(K[X, Y, Z] / (F, G))_\ell$ (ℓ hinreichend groß und fixiert) und behaupten, dass die Dehomogenisierungen $v_i = V_i(X, Y, 1)$ eine Basis von $K[X, Y] / (\tilde{F}, \tilde{G})$ bilden. Dazu sei $q \in K[X, Y]$ beliebig vorgegeben mit Homogenisierung $Q \in K[X, Y, Z]$ vom Grad d . Sei e so gewählt, dass $d + e \geq \ell$ ist. Aufgrund von Lemma 30.2 sind die Abbildungen ($\lambda \geq 1$)

$$(K[X, Y, Z] / (F, G))_\ell \longrightarrow (K[X, Y, Z] / (F, G))_{\ell+\lambda}, \quad H \longmapsto Z^\lambda H,$$

injektiv und daher auch bijektiv, da die Dimensionen übereinstimmen. Insbesondere bilden die $Z^\lambda V_i$, $i = 1, \dots, mn$, eine Basis von

$$(K[X, Y, Z]/(F, G))_{\ell+\lambda}.$$

Es gibt dann also eine Darstellung $Z^\ell Q = \sum_{i=1}^{mn} a_i Z^{d+e-\ell} V_i$. Durch Dehomogenisieren ergibt sich daraus sofort eine Darstellung für q .

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit sei

$$\sum_{i=1}^{mn} a_i v_i = 0$$

angenommen, so dass in $K[X, Y]$ eine Gleichung

$$\sum_{i=1}^{mn} a_i v_i = \tilde{A}\tilde{F} + \tilde{B}\tilde{G}$$

vorliegt. Dabei setzen wir \tilde{A}, \tilde{B} als Dehomogenisierung von zwei homogenen Polynomen $A, B \in K[X, Y, Z]$ an. Somit liegen zwei homogene Ausdrücke - nämlich $\sum_{i=1}^{mn} a_i V_i$ und $AF + BG$ - vor, deren Dehomogenisierungen übereinstimmen. Durch geeignete Wahl von r, s, t können wir annehmen, dass $\sum_{i=1}^{mn} a_i Z^r V_i$ und $Z^s AF + Z^t BG$ (homogen sind und) den gleichen Grad besitzen. Nach Aufgabe 6.10 ist dann bereits

$$\sum_{i=1}^{mn} a_i Z^r V_i = Z^s AF + Z^t BG.$$

Diese Gleichung bedeutet $\sum_{i=1}^{mn} a_i Z^r V_i = 0$ in $K[X, Y, Z]/(F, G)$, woraus sich $a_i = 0$ ergibt. \square

Korollar 30.4. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $C, D \subset \mathbb{P}_K^2$ zwei ebene projektive Kurven. Dann ist der Durchschnitt $C \cap D$ nicht leer.*

Beweis. Die Aussage stimmt, wenn C und D eine gemeinsame Komponente besitzen. Andernfalls folgt sie aus Satz 30.3. \square

Korollar 30.5. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $F, G \in K[X, Y, Z]$ zwei homogene Polynome vom Grad m und n ohne gemeinsame Komponente mit zugehörigen Kurven $C = V_+(F), D = V_+(G) \subset \mathbb{P}_K^2$. Dann gibt es maximal mn Schnittpunkte von C und D .*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 30.3, da jeder Schnittpunkt zumindest mit Schnittmultiplizität 1 in die Summe eingeht. \square

Beispiel 30.6. Wir betrachten die Neilsche Parabel $C = V_+(ZY^2 - X^3)$ und den Kreis mit Mittelpunkt $(1, 0, 1)$, also $D = V_+((X - Z)^2 + Y^2 - Z^2)$. Nach dem Satz von Bezout erwarten wir eine Gesamtschnittzahl von 6. Wir berechnen die Schnittpunkte. Für $Z = 0$ folgt aus der ersten Gleichung $X = 0$ und dann aus der zweiten $Y = 0$, so dass es keinen Schnittpunkt

auf der projektiven Geraden $V_+(Z)$ gibt. Wir betrachten daher die affinen Gleichungen $Y^2 - X^3 = 0$ und $(X - 1)^2 + Y^2 - 1 = 0$. Wir berechnen die Schnittpunkte, indem wir $Y^2 = 1 - (X - 1)^2$ in die erste Gleichung einsetzen. Dies ergibt

$$\begin{aligned} 1 - (X - 1)^2 - X^3 &= -X^3 - X^2 + 2X \\ &= X(-X^2 - X + 2) \\ &= -X(X - 1)(X + 2). \end{aligned}$$

Dies führt zu den Schnittpunkten

$$(0, 0), (1, 1), (1, -1), (-2, 2\sqrt{2}i), (-2, -2\sqrt{2}i).$$

Die beiden letzten Punkte zeigen auch, dass der Satz nur über einem algebraisch abgeschlossenen Körper gilt. Es gibt also nur 5 Schnittpunkte. Da die Neilsche Parabel im Nullpunkt eine Singularität besitzt und dieser ein Schnittpunkt ist, so muss dort die Schnittmultiplizität größer als 1 sein. Um dies zu bestätigen betrachten wir

$$\begin{aligned} K[X, Y]_{(X, Y)} / (Y^2 - X^3, Y^2 - 1 + (X - 1)^2) &= K[X, Y]_{(X, Y)} / (Y^2 - X^3, X(X - 1)(X + 2)) \\ &= K[X, Y]_{(X, Y)} / (Y^2 - X^3, X) \\ &= K[X, Y]_{(X, Y)} / (Y^2, X) \\ &= K[Y] / (Y^2). \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Einsetzungsrechnung von oben wiederholt und dann ausgenutzt, dass $X - 1$ und $X + 2$ Einheiten im lokalen Ring $K[X, Y]_{(X, Y)}$ sind. Die Dimension ist also 2 und damit muss die Schnittmultiplizität an allen anderen Schnittpunkten 1 sein, was man auch direkt bestätigen kann.

30. ARBEITSBLATT

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 30.1. Zeige durch ein Beispiel, dass Lemma 30.2 nicht ohne die Voraussetzung gilt, dass der Körper algebraisch abgeschlossen ist.

Aufgabe 30.2. Zeige, dass in den in Beispiel 30.6 berechneten Schnittpunkten $\neq (0, 0)$ der beiden Kurven ein transversaler Schnitt vorliegt.

Aufgabe 30.3.*

Sei $K = \mathbb{C}$. Bestimme für die beiden affinen Kurven

$$V(Y - X^3) \text{ und } V(Y^2 - X^3)$$

ihre Schnittpunkte zusammen mit den Schnittmultiplizitäten. Betrachte auch Schnittpunkte im $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ und bestätige den Satz von Bezout in diesem Beispiel.

Aufgabe 30.4.*

Sei $K = \mathbb{C}$ und betrachte die beiden ebenen algebraischen Kurven

$$C = V(X - Y^2) \text{ und } D = V(Y^2 - X^5).$$

Bestimme die Schnittpunkte der beiden Kurven in der affinen Ebene und bestimme jeweils die Schnittmultiplizität. Bestimme auch die unendlich fernen Punkte der beiden Kurven (also die zusätzlichen Punkte auf den projektiven Abschlüssen \bar{C} und \bar{D}) und überprüfe damit die Schnittpunkte im Unendlichen. Bestätige abschließend, dass der Satz von Bezout in diesem Beispiel erfüllt ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 30.5. (6 Punkte)

Sei $C \subset \mathbb{P}_K^2$ eine glatte Quadrik (also eine Kurve vom Grad zwei) über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Zeige, dass es eine Isomorphie der Kurve mit der projektiven Geraden \mathbb{P}_K^1 gibt.

Aufgabe 30.6. (5 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $C \subset \mathbb{P}_K^2$ eine glatte Kurve vom Grad $d \geq 2$. Zeige, dass es einen Morphismus $C \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ gibt derart, dass jede Faser aus maximal $d - 1$ Punkten besteht.

Aufgabe 30.7. (5 Punkte)

Es sei $C = V_+(X^3 + Y^3 + Z^3) \subset \mathbb{P}_K^2$ die *Fermat-Kubik* über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $\neq 3$. Beschreibe explizit einen Morphismus $C \rightarrow \mathbb{P}_K^1$, bei dem über jedem Punkt maximal zwei Punkte liegen.

Aufgabe 30.8. (4 Punkte)

Es sei $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ der komplex-projektive Abschluss des Einheitskreises. Bestimme eine explizite bijektive Parametrisierung $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow C$.

Aufgabe 30.9. (4 Punkte)

Bestätige Satz 30.3 für die beiden Kurven $C = V(ZY^2 - X^3)$ und $D = V(X^2 + (Y - Z)^2 - Z^2)$.

Skizziere die Situation.

Aufgabe 30.10. (4 Punkte)

Bestätige Satz 30.3 für die beiden Kurven $C = V(ZY - X^2)$ und $D = V(X^2 + (Y - Z)^2 - Z^2)$.

Skizziere die Situation.

Aufgabe 30.11. (4 Punkte)

Bestätige Satz 30.3 für die beiden monomialen Kurven, die affin durch $C = V(X^2 - Y^3)$ und $D = V(X^5 - Y^4)$ gegeben sind.

Aufgabe 30.12. (5 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und M, N R -Moduln. Ist

$$f: M \longrightarrow N$$

ein R -Modulhomomorphismus, so ist

$$f^*: \text{Hom}(N, R) \longrightarrow \text{Hom}(M, R), \varphi \longmapsto \varphi \circ f,$$

auch ein R -Modulhomomorphismus.

Sei nun $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln.

Zeige, dass dann die induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(P, R) \longrightarrow \text{Hom}(N, R) \longrightarrow \text{Hom}(M, R)$$

exakt ist. Man gebe auch ein Beispiel mit $R = \mathbb{Z}$, das zeigt, dass der letzte Pfeil im Allgemeinen nicht surjektiv ist.

ANHANG A: BIDLIZENZEN

Die Bilder dieses Textes stammen aus Commons (also <http://commons.wikimedia.org>), und stehen unter unterschiedlichen Lizenzen, die zwar alle die Verwendung hier erlauben, aber unterschiedliche Bedingungen an die Verwendung und Weitergabe stellen. Es folgt eine Auflistung der verwendeten Bilder dieses Textes (nach der Seitenzahl geordnet, von links nach rechts, von oben nach unten) zusammen mit ihren Quellen, Urhebern (Autoren) und Lizenzen. Dabei ist *Quelle* so zu verstehen, dass sich, wenn man

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:>

unmittelbar davor setzt, die entsprechende Datei auf Commons ergibt. *Autor* benennt den Urheber des Werkes, falls dieser bekannt ist. *Benutzer* meint den Hochlader der Datei; wenn keine weitere Information über den Autor vorliegt, so gilt der Benutzer als Urheber. Die Angabe des Benutzernamen ist so zu verstehen, dass sich, wenn man

<http://commons.wikimedia.org/wiki/User:>

unmittelbar davor setzt, die Benutzerseite ergibt. Wenn das Bild ursprünglich in einem anderen Wikimedia-Projekt hochgeladen wurde, so wird die Domäne (bspw. *de.wikipedia.org*) explizit angegeben.

Die *Lizenz* ist die auf der Dateiseite auf Commons angegebene Lizenz. Dabei bedeuten

- GFDL: Gnu Free Documentation License (siehe den angehängten Text, falls diese Lizenz vorkommt)
- CC-BY-SA-2.5 (3.0): Creative Commons Attribution ShareAlike 2.5 (oder 3.0)
- PD: gemeinfrei (public domain)

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Quelle = Linear function.svg , Autor = Benutzer Luks auf Commons, Lizenz = PD	4
Quelle = Polynomialdeg4.png , Autor = Benutzer Derbeth auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA-2.5	4
Quelle = RationalDegree2byXedi.gif , Autor = Sam Derbyshire (= Benutzer Ylebru auf en-wikipedia.org), Lizenz = CC-BY-SA-3.0	4
Quelle = Circle.svg , Autor = Benutzer Zorget auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	4

Quelle = Ellipse.svg , Autor = Benutzer Zorgit auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	4
Quelle = Cusp.png , Autor = Benutzer Satipatthana auf Commons, Lizenz = PD	4
Quelle = Elliptic curve simple.png , Autor = Sean ?. (= Benutzer Giro720 auf en-wikipedia.org), Lizenz = CC-BY-SA-3.0	5
Quelle = Tschirnhausen cubic.png , Autor = Oleg Alexandrov (= Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons), Lizenz = PD	5
Quelle = Eudoxus.png , Autor = Donald Hosek (= Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons), Lizenz = PD	5
Quelle = Conchoid of Pascal.png , Autor = Benutzer Luke33 auf Commons, Lizenz = PD	5
Quelle = Bifolium.png , Autor = Oleg Alexandrov (= Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons), Lizenz = PD	5
Quelle = Limacon.png , Autor = Benutzer Berto auf Commons, Lizenz = PD	5
Quelle = Quadrifolium.svg , Autor = Benutzer Gunther auf Commons, Lizenz = PD	5
Quelle = Lemniscate of Bernoulli.svg , Autor = Benutzer Zorgit auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	5
Quelle = Cicloide.svg , Autor = Benutzer Elborgo auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA-2.5	6
Quelle = Logarithmic spiral.png , Autor = Benutzer Anarkman auf en.wikipedia.org, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	6
Quelle = Sin.svg , Autor = Keytotime (= Benutzer Ysae auf Commons), Lizenz = PD	6
Quelle = Quadratic Koch.png , Autor = Alexis Monnerot-Dumaine (= Benutzer Prokofiev auf Commons), Lizenz = CC-BY-SA-2.5	6
Quelle = Rectangular hyperbola.svg , Autor = Benutzer Qef auf Commons, Lizenz = PD	8
Quelle = GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg , Autor = Godfrey Kneller, Lizenz = PD	9
Quelle = ECexamples01.png , Autor = Benutzer Dake auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	10

Quelle = Carl Friedrich Gauss.jpg , Autor = Benutzer Bcrowell auf Commons, Lizenz = PD	12
Quelle = Conic sections 2n.png , Autor = Benutzer NK auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	16
Quelle = Conjuntos algebraicos 2.svg , Autor = Benutzer Drini auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	21
Quelle = Linline.jpg , Autor = Benutzer Astur1 auf Commons, Lizenz = PD	24
Quelle = IntersectingPlanes.png , Autor = Benutzer Stib auf en.wikipedia.org, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	24
Quelle = Secretsharing-3-point.png , Autor = Benutzer Stib auf en.wikipedia.org, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	24
Quelle = Delaunay points.png , Autor = Benutzer Nü Es auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	30
Quelle = Gerade svg.svg , Autor = Benutzer Lokilech auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	30
Quelle = Linear space2.png , Autor = Benutzer Kmhkmh auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	30
Quelle = Hydrant Insel Krk Kroatien.jpg , Autor = Benutzer Usien auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	32
Quelle = Cylinder principal directions.svg , Autor = Luca Antonelli (= Benutzer Luke Antony auf Commons), Lizenz = CC-BY-SA-3.0	34
Quelle = Two cubic curves.png , Autor = Benutzer Hack auf Commons, Lizenz = PD	35
Quelle = Non cohen macaulay scheme thumb.png , Autor = Benutzer Jakob.scholbach auf en.wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0	35
Quelle = Kuzel obecny.svg , Autor = Benutzer Pajs auf cs.wikipedia.org, Lizenz = PD	39
Quelle = Elipsoid trojosy321.png , Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz =	47
Quelle = Krivka parametricky.png , Autor = Benutzer Beny auf cs.wikipedia.org, Lizenz = PD	47
Quelle = Cubic with double point.svg , Autor = Benutzer Gunther auf de.wikipedia.org, Lizenz = PD	49

Quelle = Dioklova kisoida.png , Autor = Benutzer Pajs auf cs.wikipedia.org, Lizenz = PD	53
Quelle = Conic sections.svg , Autor = Benutzer Anuskafm auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	56
Quelle = DoubleCone.png , Autor = Lars H. Rohwedder (= Benutzer RokerHRO auf Commons), Lizenz = PD	56
Quelle = Hauptachsentransformation1.png , Autor = Benutzer Rdb auf Commons, Lizenz = PD	60
Quelle = Hauptachsentransformation2.png , Autor = Benutzer Rdb auf Commons, Lizenz = PD	60
Quelle = Hauptachsentransformation3.png , Autor = Benutzer Rdb auf Commons, Lizenz = PD	60
Quelle = Johannes Kepler 1610.jpg , Autor = Unbekannt (1610), Lizenz = PD	63
Quelle = Elliptic orbit.gif , Autor = Benutzer Brandir auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA 2.5	63
Quelle = Parabolic orbit.gif , Autor = Benutzer Brandir auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA 2.5	63
Quelle = Hyperbolic orbit.gif , Autor = Benutzer Brandir auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA 2.5	63
Quelle = Lemniscate Building.gif , Autor = Benutzer Zorget auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA 3.0	67
Quelle = Parallele lijnen.png , Autor = Benutzer Ellywa auf nl.wikipedia.org, Lizenz = GFDL	69
Quelle = Ellipse tri.png , Autor = Benutzer ??? ?? auf he.wikipedia.org, Lizenz = GFDL	71
Quelle = Steam engine in action.gif , Autor = Benutzer Panther auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA 2.5	71
Quelle = Intersection of cylinders.jpg , Autor = Jan Schoenke, Lizenz = CC-by-sa 2.5	73
Quelle = Alg Kurven OS2008 Lsg8.10 v2.png , Autor = Christian Boberg, Lizenz = CC-BY-SA 2.5	75
Quelle = Noether.jpg , Autor = Unbekannt (vor 1910), Lizenz = PD	77
Quelle = David Hilbert 1886.jpg , Autor = Unbekannt (1886), Lizenz = PD	79

Quelle = Disjoint ellipses.png , Autor = Benutzer pmidden auf Commons, Lizenz = PD	94
Quelle = Alexander Grothendieck.jpg , Autor = Konrad Jacobs, Lizenz = CC-BY-SA 2.0	99
Quelle = Linline.jpg , Autor = Astur1, Lizenz = PD	100
Quelle = Lineair-cartesiaans.png , Autor = MADe, Lizenz = GFDL	100
Quelle = Polynomialdeg5.png , Autor = Benutzer Derbeth auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA-2.5	100
Quelle = Hyperbola one over x.svg , Autor = Benutzer Ktims auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	109
Quelle = Connected and disconnected spaces2.svg , Autor = Benutzer Dbc334 auf Commons, Lizenz = PD	111
Quelle = Monkey Saddle Surface (Shaded).png , Autor = Benutzer Inductiveload auf Commons, Lizenz = PD	120
Quelle = Cone intersects line.png , Autor = Benutzer Pmidden auf Commons, Lizenz = PD	122
Quelle = Concentric (PSF).png , Autor = Pearson Scott Foresman, Lizenz = PD	128
Quelle = Kaffeefilter.jpg , Autor = Elke Wetzig (= Benutzer Elya auf Commons), Lizenz = CC-BY-SA-3.0	135
Quelle = FiberBundle 2.png , Autor = Benutzer 132??' auf ja.wikipedia.org, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	140
Quelle = Cusp.svg , Autor = Benutzer Satipatthana auf Commons, Lizenz = PD	153
Quelle = Twisted cubic curve.png , Autor = Claudio Rocchini, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	160
Quelle = Whitney unbrella.png , Autor = Claudio Rocchini, Lizenz = CC-BY-SA-2.5	168
Quelle = Tangent.png , Autor = AxelBoldt, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	180
Quelle = 3 equations -5.JPG , Autor = Cronholm144, Lizenz = PD	181
Quelle = Intersect3.png , Autor = Michael Larsen, Lizenz = CC-BY-SA-3.0	183
Quelle = Cercle tangente rayon.svg , Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz =	184

- Quelle = Frans Hals - Portret van René Descartes.jpg , Autor = Frans Hals (= Benutzer Dedden auf Commons), Lizenz = PD 187
- Quelle = Kartesisches-Blatt.svg , Autor = Georg-Johann, Lizenz = CC-BY-SA-3.0 & GFDL 187
- Quelle = Cardioid.svg , Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz = 193
- Quelle = Intersect3.png , Autor = Michael Larsen (= Benutzer Maksim auf Commons), Lizenz = CC-BY-SA-3.0 212
- Quelle = Loewenzahn 20.jpg , Autor = Waugsberg, Lizenz = CC-BY-SA-2.5 217
- Quelle = Projektiveline1bb.jpg , Autor = Darapti, Lizenz = CC-BY-SA-3.0 218
- Quelle = Projektiveline2bb.jpg , Autor = Darapti, Lizenz = CC-BY-SA-3.0 218
- Quelle = Projektiveline3bb.jpg , Autor = Darapti, Lizenz = CC-BY-SA-3.0 218
- Quelle = Projektiveplane1bb.jpg , Autor = Darapti, Lizenz = CC-BY-SA-3.0 219
- Quelle = Projektiveplane2bb.jpg , Autor = Darapti, Lizenz = CC-BY-SA-3.0 219
- Quelle = Projektiveplane3bb.jpg , Autor = Darapti, Lizenz = CC-BY-SA-3.0 219
- Quelle = Projektiveplane4bb.jpg , Autor = Darapti, Lizenz = CC-BY-SA-3.0 220
- Quelle = Perspective Projection Principle.jpg , Autor = Benutzer Fantagu auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA-3.0 220
- Quelle = Blue-sphere.png , Autor = Benutzer Kieff auf Commons, Lizenz = PD 224
- Quelle = Soccerball.svg , Autor = Benutzer Ranveig auf Commons, Lizenz = PD 231
- Quelle = Torus illustration.png , Autor = Oleg Alexandrov, Lizenz = PD 231
- Quelle = Double torus illustration.png , Autor = Oleg Alexandrov, Lizenz = PD 231
- Quelle = Sphere with three handles.png , Autor = Oleg Alexandrov, Lizenz = PD 231

258

Quelle = Lemniscate of Bernoulli.svg , Autor = Benutzer auf Commons,
Lizenz = 240

Quelle = Tschirnhausen cubic.png , Autor = Benutzer auf Commons,
Lizenz = 242

Quelle = Two cubic curves.png , Autor = Hack, Lizenz = PD 245