Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Vorlesung 10

Noethersche Ringe

Unser Ziel ist es zu zeigen, dass wenn R ein noetherscher Ring ist, dass dann auch der Polynomring $R[X]$ ein noetherscher Ring ist (Hilbertscher Basissatz). Dies gilt dann auch für die Hinzunahme von mehreren (endlich vielen) Variablen und insbesondere für Polynomringe in endlich vielen Variablen über einem Körper. Wir erinnern an den Begriff des noetherschen Ringes.

Emmy Noether (1882-1935)

Definition 10.1. Ein kommutativer Ring R heißt *noethersch*, wenn jedes Ideal darin endlich erzeugt ist.

Proposition 10.2. *Für einen kommutativen Ring R sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *R ist noethersch.*
(2) *Jede aufsteigende Idealkette*

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \dots$$

wird stationär, *d.h. es gibt ein n mit $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+1} = \dots$.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Sei

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \dots$$

eine aufsteigende Idealkette in R. Wir betrachten die Vereinigung $\mathfrak{a} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}_n$, die wieder ein Ideal in R ist. Da R noethersch ist, ist $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt, d.h. $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_k)$. Da diese f_i in der Vereinigung der Ideale $\mathfrak{a}_n$ liegen, und da die Ideale aufsteigend sind, muss es ein n geben derart, dass $f_1, \dots, f_k \in \mathfrak{a}_n$ liegt. Wegen

$$(f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{a}_{n+m} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}_n \subseteq (f_1, \dots, f_k)$$

für $m \geq 0$ muss hier Gleichheit gelten, so dass die Idealkette ab n stationär ist.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in R. Wir nehmen an, $\mathfrak{a}$ sei nicht endlich erzeugt, und konstruieren sukzessive eine unendliche echt aufsteigende Idealkette $\mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}$, wobei die $\mathfrak{a}_n$ alle endlich erzeugt sind. Sei dazu

$$\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{a}$$

bereits konstruiert. Da $\mathfrak{a}_n$ endlich erzeugt ist, aber $\mathfrak{a}$ nicht, ist die Inklusion $\mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{a}$ echt und es gibt ein Element

$$f_{n+1} \in \mathfrak{a},\ f_{n+1} \notin \mathfrak{a}_n\,.$$

Dann setzt das Ideal $\mathfrak{a}_{n+1} := \mathfrak{a}_n + (f_{n+1})$ die Idealkette echt aufsteigend fort. □

LEMMA 10.3. *Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist auch jeder Restklassenring $R/\mathfrak{b}$ noethersch.*

Beweis. Sei $\mathfrak{a} \subseteq R/\mathfrak{b}$ ein Ideal und sei $\tilde{\mathfrak{a}} \subseteq R$ das Urbildideal davon. Dieses ist endlich erzeugt nach Voraussetzung, also $\tilde{\mathfrak{a}} = (f_1, \dots, f_n)$. Die Restklassen dieser Erzeuger, also $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$, bilden ein Idealerzeugendensystem von $\mathfrak{a}$: Für ein Element $\bar{g} \in \mathfrak{a}$ gilt ja $g = \sum_{i=1}^n r_i f_i$ in R und damit $\bar{g} = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \bar{f}_i$ in $R/\mathfrak{b}$. □

Der Hilbertsche Basissatz

Wie viele grundlegende Aussagen der kommutativen Algebra geht der Hilbertsche Basissatz, dem wir uns jetzt zuwenden, auf David Hilbert zurück, genauer auf seine Arbeit von 1890, „Ueber die Theorie der algebraischen Formen“.

David Hilbert (1862-1943)

Satz 10.4. *Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist auch der Polynomring $R[X]$ noethersch.*

Beweis. Sei $\mathfrak{b}$ ein Ideal im Polynomring $R[X]$. Zu $n \in \mathbb{N}$ definieren wir ein Ideal $\mathfrak{a}_n$ in R durch

$$\mathfrak{a}_n = \left\{ c \in R \,|\, \text{es gibt } F \in \mathfrak{b} \text{ mit } F = cX^n + c_{n-1}X^{n-1} + \ldots + c_1X + c_0 \right\} .$$

Das Menge $\mathfrak{a}_n$ besteht also aus allen Leitkoeffizienten von Polynomen vom Grad n aus $\mathfrak{b}$. Es handelt sich dabei offensichtlich um Ideale in R (wobei wir hier 0 als Leitkoeffizient zulassen). Ferner ist $\mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{a}_{n+1}$, da man ja ein Polynom F vom Grad n mit Leitkoeffizient c mit der Variablen X multiplizieren kann, um ein Polynom vom Grad $n+1$ zu erhalten, das wieder c als Leitkoeffizienten besitzt. Da R noethersch ist, muss diese aufsteigende Idealkette stationär werden; sei n so, dass $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+1} = \ldots$ ist.

Zu jedem $i \leq n$ sei nun $\mathfrak{a}_i = (c_{i1}, \ldots, c_{ik_i})$ ein endliches Erzeugendensystem, und es seien

$$F_{ij} = c_{ij}X^i + \text{ Terme von kleinerem Grad}$$

zugehörige Polynome aus $\mathfrak{b}$ (die es nach Definition der $\mathfrak{a}_i$ geben muss).

Wir behaupten, dass $\mathfrak{b}$ von allen $\{F_{ij} \,|\, 0 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq k_i\}$ erzeugt wird. Dazu beweisen wir für jedes $G \in \mathfrak{b}$ durch Induktion über den Grad von G, dass es als Linearkombination mit diesen F_{ij} darstellbar ist. Für G konstant, also $G \in R$, ist dies klar. Sei nun der Grad von G gleich d und die Aussage sei für kleineren Grad bewiesen. Wir schreiben

$$G = cX^d + c_{d-1}X^{d-1} + \ldots + c_1X + c_0 \,.$$

Es ist $c \in \mathfrak{a}_d$ und damit kann man c schreiben als R-Linearkombination der $c_{ij}, 0 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k_i$. Bei $d \leq n$ kann man c sogar schreiben als R-Linearkombination der c_{dj}, $j = 1, \ldots, k_d$, sagen wir $c = \sum_{j=1}^{k_d} r_j c_{dj}$. Dann ist $G - \sum_{j=1}^{k_d} r_j F_{dj} \in \mathfrak{b}$ und hat einen kleineren Grad, sodass man darauf die Induktionsvoraussetzung anwenden kann. Bei $d > n$ ist

$$c = \sum_{i=0,\ldots,n,\, j=1,\ldots,k_i} r_{ij} c_{ij} \,.$$

Damit gehört

$$G - \sum_{i=0,\ldots,n,\, j=1,\ldots,k_i} r_{ij} X^{d-i} F_{ij}$$

ebenfalls zu $\mathfrak{b}$ und hat einen kleineren Grad, so dass man wieder die Induktionsvoraussetzung anwenden kann. □

Korollar 10.5. *Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist auch $R[X_1, \ldots, X_n]$ noethersch.*

Beweis. Dies folgt durch induktive Anwendung des Hilbertschen Basissatzes auf die Kette

$$\begin{aligned} R \subset R[X_1] \subset (R[X_1])[X_2] &= R[X_1, X_2] \\ &\subset (R[X_1, X_2])[X_3] = R[X_1, X_2, X_3] \subset \ldots \subset R[X_1, \ldots, X_n]. \end{aligned}$$

□

Korollar 10.6. *Sei K ein Körper. Dann ist $K[X_1, \ldots, X_n]$ noethersch.*

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Korollar 10.5. □

Definition 10.7. Es sei R ein kommutativer Ring. Eine R-Algebra A heißt *von endlichem Typ* (oder *endlich erzeugt*), wenn sie die Form

$$A = R[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$$

besitzt.

Eine endlich erzeugte R-Algebra besitzt also eine Darstellung als Restklassenring einer Polynomalgebra über R in endlich vielen Variablen. Eine solche Darstellung ist keineswegs eindeutig.

Korollar 10.8. *Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist jede R- Algebra von endlichem Typ ebenfalls noethersch. Insbesondere ist für einen Körper K jede K-Algebra von endlichem Typ noethersch.*

Beweis. Dies folgt aus Korollar 10.5 und aus Lemma 10.3. □

Noethersche Moduln

Definition 10.9. Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Der Modul M heißt *endlich erzeugt* oder *endlich*, wenn es ein endliches Erzeugendensystem v_i, $i \in I$, für ihn gibt (also mit einer endlichen Indexmenge).

Wir wollen zeigen, das für einen noetherschen Ring R und einen endlich erzeugten R-Modul jeder R-Untermodul wieder endlich erzeugt ist. Solche Moduln nennt man noethersch.

Definition 10.10. Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Dann heißt M *noethersch*, wenn jeder R-Untermodul von M endlich erzeugt ist.

Für $M = R$ stimmt dies mit der Definition eines noetherschen Ringes überein, da ja die R-Untermoduln von R gerade die Ideale sind.

In den folgenden Aussagen verwenden wir folgende Sprech- bzw. Schreibweise.

Definition 10.11. Sei R ein kommutativer Ring und seien M_1, M_2, M_3 R-Moduln. Man nennt ein Diagramm der Form

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

eine *kurze exakte Sequenz* von R-Moduln, wenn M_1 ein R-Untermodul von M_2 ist, und wenn M_3 ein Restklassenmodul von M_2 ist, der isomorph zu M_2/M_1 ist.

Lemma 10.12. *Sei R ein kommutativer Ring und*

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann ist M genau dann noethersch, wenn sowohl M_1 als auch M_3 noethersch sind.

Beweis. Sei zunächst M noethersch, und $U \subseteq M_1$ ein Untermodul. Dann ist U direkt auch ein Untermodul von M, also nach Voraussetzung endlich erzeugt. Sei nun $V \subseteq M_3$ ein Untermodul des Restklassenmoduls. Das Urbild von V in M unter der Restklassenabbildung sei $\tilde{V}$. Dieser Modul ist nach Voraussetzung endlich erzeugt, und die Bilder eines solchen Erzeugendensystems erzeugen auch den Bildmodul V.

Seien nun die äußeren Moduln M_1 und M_3 noethersch, und sei $U \subseteq M$ ein Untermodul. Es sei $U_3 \subseteq M_3$ der Bild-Untermodul davon. U_3 wird von endlich vielen Elementen $s_1, \ldots, s_n$ erzeugt, und wir können annehmen, dass diese $s_i = \overline{r}_i$ die Bilder von Elementen $r_i \in U$ sind. Betrachte $U \cap M_1$. Dies ist ein Untermodul von M_1, und daher endlich erzeugt, sagen wir von $t_1, \ldots, t_k$, die wir als Elemente in U auffassen. Wir behaupten, dass

$$r_1, \ldots, r_n, t_1, \ldots, t_k$$

ein Erzeugendensystem von U bilden. Sei dazu $m \in U$ ein beliebiges Element. Dann ist $\overline{m} = \sum_{i=1}^n a_i s_i$ und daher geht das Element $m - \sum_{i=1}^n a_i r_i$ rechts auf null. Dann gehört es aber zum Kern der Restklassenabbildung, also zu M_1. Andererseits gehört dieses Element auch zu U, also zum Durchschnitt $M_1 \cap U$, der ja von den $t_1, \ldots, t_k$ erzeugt wird. Also kann man schreiben

$$m - \sum_{i=1}^n a_i r_i = \sum_{j=1}^k b_j t_j$$

bzw. $m = \sum_{i=1}^n a_i r_i + \sum_{j=1}^k b_j t_j$. □

Satz 10.13. *Sei R ein noetherscher kommutativer Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist M ein noetherscher Modul.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Anzahl n der Modulerzeuger von M. Bei $n = 0$ liegt der Nullmodul vor. Sei $n = 1$. Dann gibt es eine surjektive Abbildung $R \to M \cong R/\mathfrak{a}$. Nach Lemma 10.12 ist aber ein Restklassenmodul eines noetherschen Moduls wieder noethersch, und der Ring selbst ist nach Voraussetzung noethersch, also ist M noethersch.

Sei nun $n \geq 2$ und die Aussage für kleinere n bereits bewiesen. Sei $m_1, \ldots, m_n$ ein Erzeugendensystem von M. Wir betrachten den durch $m_1, \ldots, m_{n-1}$ erzeugten R-Untermodul, den wir mit M_1 bezeichnen. Dieser Untermodul gibt Anlass zu einer kurzen exakten Sequenz, nämlich

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M/M_1 =: M_3 \longrightarrow 0\,.$$

Hier wird der linke Modul von $n-1$ Elementen erzeugt und ist nach Induktionsvoraussetzung noethersch. Der rechte Modul wird von der Restklasse von m_n, also von einem Element erzeugt, ist also auch noethersch. Nach Lemma 10.12 ist dann M noethersch. □

Abbildungsverzeichnis