Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 4

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 4.1. Sei $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine Teilmenge, die aus endlich vielen Punkten bestehe. Zeige: V ist genau dann irreduzibel, wenn V einpunktig ist.

Aufgabe 4.2. Skizziere ein Beispiel einer *zusammenhängenden*, aber nicht irreduziblen affin-algebraischen Teilmenge.

Aufgabe 4.3. Betrachte die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der metrischen Topologie. Ist $\mathbb{R}$ irreduzibel?

Aufgabe 4.4. Sei p eine Primzahl und $\mathbb{Z}/(p)$ der zugehörige Restklassenkörper. Zeige: Jede Quadrik der Form

$$F = aX^2 + bY^2 + c = 0$$

mit $a, b \neq 0$ hat mindestens eine Lösung in $\mathbb{Z}/(p)$.

Aufgabe 4.5. Erkläre, wo der Beweis zu Satz 4.8 zusammenbricht, wenn man ihn auf mehr als zwei Variablen ausdehnen will.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 4.6. (3 Punkte)

Berechne in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ den Schnitt des Zylinders $V(x^2 + y^2 - 1)$ mit der Kugel mit Mittelpunkt $P = (0, 0, 0)$ und Radius r in Abhängigkeit von r. Wann ist der Durchschnitt leer, wann irreduzibel?

Man darf verwenden, dass der reelle Kreis irreduzibel ist.

Aufgabe 4.7. (6 Punkte)

Sei p eine Primzahl ≥ 3 und $\mathbb{Z}/(p)$ der zugehörige Restklassenkörper. Es sei ein Polynom $F \in \mathbb{Z}/(p)[X,Y]$ der Form

$$F = \alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2 + \delta X + \epsilon Y + \eta$$

gegeben. Zeige, dass für das zugehörige Nullstellengebilde $V(F) \subseteq \mathbb{A}_K^2$ (wenn α, β, γ nicht alle null sind, so ist das eine Quadrik) die folgenden drei Alternativen bestehen.

(1) $V(F)$ besitzt mindestens einen Punkt.
(2) $F = c$ mit einer Konstanten $c \neq 0$.
(3) Es gibt eine Variablentransformation derart, dass das Polynom in den neuen Koordinaten die Gestalt $Z^2 - u$ mit einem Nichtquadrat $u \in \mathbb{Z}/(p)$ besitzt.

Die folgende Aufgabe benutzt einige weiterführende topologische Begriffe.

Aufgabe 4.8. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper.

(1) Man zeige, dass für $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$ die Standardtopologie feiner ist als die Zariski-Topologie.
(2) Man zeige, dass für $K[X]$ die Zariski-Topologie mit der kofiniten Topologie übereinstimmt. Gilt dies auch für $K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $n > 1$?
(3) Wann ist die Zariski-Topologie T_1, wann ist sie hausdorffsch?
(4) Wie sieht die Zariski-Topologie aus, wenn K ein endlicher Körper ist?

Aufgabe 4.9. (3 Punkte)

Sei V eine irreduzible, affin-algebraische Menge mit mindestens zwei Punkten und seien $P_1, \ldots, P_m \in V$ endlich viele Punkte darin. Zeige, dass dann auch $V \setminus \{P_1, \ldots, P_m\}$ (in der induzierten Topologie) irreduzibel ist.

Aufgabe 4.10. (4 Punkte)

Sei R ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper $Q(R)$. Zeige: Wenn $F, G \in R[X]$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen, so besitzen sie aufgefasst in $Q(R)[X]$ ebenfalls keinen gemeinsamen Teiler.

(Man darf sich auf Hauptidealbereiche R beschränken.)