Universität Osnabrück
Vorlesung *Algebraische Kurven* 2008
Prof. Dr. Holger Brenner
Arbeitsblatt 17

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Betrachte den Monoidhomomorphismus

$$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{Z},\, e_1 \longmapsto 1,\, e_2 \longmapsto -1\,.$$

Beschreibe die zugehörige Abbildung zwischen den Monoidringen (für einen Körper K) und den zugehörigen K-Spektren.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Seien $M \subseteq N$ kommutative Monoide. Zeige, dass durch

$$\tilde{M} = \{n \in N : \text{ es gibt } k \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } kn \in M\}$$

ein Untermonoid von N gegeben ist, das M umfasst.

Aufgabe 3. (6 Punkte)

Seien $M \subseteq N$ endlich erzeugte kommutative Monoide. Zeige, dass für einen Körper K der Ringhomomorphismus $K[M] \subseteq K[N]$ genau dann endlich ist, wenn es zu jedem $n \in N$ ein $k \in \mathbb{N}_+$ gibt mit $kn \in M$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei $M = (\mathbb{Q}, +)$ die additive Gruppe der rationalen Zahlen. Bestimme $\mathbb{Q} - \operatorname{Spec}(\mathbb{Q}[M])$. Wie sieht es aus, wenn man $\mathbb{Q}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt?

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Es sei $\varphi : M \to N$ ein Homomorphismus von kommutativen Monoiden. Zeige, dass die Menge aller Punkte aus $K - \operatorname{Spec} K[N]$, die unter der Spektrumsabbildung auf den Einspunkt $1 \in K - \operatorname{Spek}(K[M])$ (das ist der Punkt, der der konstanten Abbildung $M \mapsto 1$ entspricht) abgebildet werden, selbst die Struktur eines K-Spektrums eines geeigneten Monoids besitzt.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Wir betrachten Monoide der Form $M = (\mathbb{Z}/(m), +)$. Beschreibe das K-Spektrum $K - \operatorname{Spek}(K[M])$ allgemein sowie für die Körper $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/(5)$. Finde die idempotenten Elemente von $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/(3)]$.

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Sei M ein kommutatives Monoid. Zeige, dass die zugehörige Differenzgruppe $\Gamma = \Gamma(M)$ eine kommutative Gruppe ist, und dass sie folgende universelle Eigenschaft besitzt: Zu jedem Monoidhomomorphismus

$$\varphi : M \longrightarrow G$$

in eine Gruppe G gibt es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$\tilde{\varphi} : \Gamma \longrightarrow G \,,$$

der φ fortsetzt.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Sei M ein kommutatives Monoid mit zugehöriger Differenzgruppe $\Gamma = \Gamma(M)$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) M ist ein Monoid mit Kürzungsregel.
(2) Die kanonische Abbildung $M \to \Gamma(M)$ ist injektiv.
(3) M lässt sich realisieren als Untermonoid einer Gruppe.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und G eine Gruppe. Dann können wir den Monoidring $K[G]$ betrachten. Sei nun weiter M ein $K[G]$-Modul. Zeigen Sie, dass

(1) M nichts anderes ist als ein K-Vektorraum V zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(V)$.
(2) ein $K[G]$-Modulhomomorphismus $\varphi : M \to M$ eine K-lineare Abbildung ist, für die zusätzlich gilt, dass $\varphi \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \varphi$ für alle $g \in G$.

Bemerkung: ρ heißt dann eine *Darstellung* von G. Solche Darstellungen sind oft einfacher zu handhaben als G und man kann mit Hilfe von ρ oft hilfreiche Erkenntnisse über G selbst gewinnen.

Aufgabe 10. (2 Punkte)

Wir betrachten die kommutativen Monoide $M = \mathbb{N}^r$ und $N = \mathbb{N}^s$. Zeige, dass ein Monoidhomomorphismus von M nach N eindeutig durch eine Matrix (mit r Spalten und s Zeilen) mit Einträgen aus $\mathbb{N}$ bestimmt ist. Wie sieht die zugehörige Spektrumsabbildung aus?