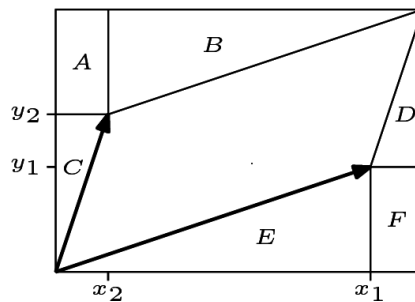


## Invariantentheorie

### Arbeitsblatt 1

#### Aufwärmaufgaben

AUFGABE 1.1. Man mache sich anhand des Bildes klar, dass zu zwei Vektoren  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  die Determinante der durch die Vektoren definierten  $2 \times 2$ -Matrix mit dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten *Parallelogramms* (bis auf das Vorzeichen) übereinstimmt.



AUFGABE 1.2. Es seien  $P_1 = (a_1, b_1)$ ,  $P_2 = (a_2, b_2)$  und  $P_3 = (a_3, b_3)$  drei Punkte im  $\mathbb{R}^2$ . Stelle den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks mit  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$  dar.

AUFGABE 1.3. Drücke die Funktion  $\nu^2$  als Funktion der  $L_{ij}^2$  (siehe Vorlesung) aus.

AUFGABE 1.4. Drücke die Funktion  $S_{12} + S_{13} + S_{23}$  als Funktion der  $L_{ij}^2$  (siehe Vorlesung) aus.

AUFGABE 1.5. Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \longmapsto \left( \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}, \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \right),$$

die einem Dreieck die Längen seiner Seiten zuordnet. Zeige, dass das Bild dieser Abbildung die Punkte  $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3$  sind, die die Dreiecksungleichung erfüllen.

AUFGABE 1.6. Diskutiere die Ähnlichkeit von Dreiecken analog zu Beispiel 1.1.

AUFGABE 1.7. Wir fassen ein Dreieck  $\triangle$  als ein geordnetes Tripel  $(P_1, P_2, P_3) \in \mathbb{R}^6$  auf. Begründe die folgenden topologischen Eigenschaften.

- (1) Die Menge der nichtentarteten Dreiecke ist offen.
- (2) Die Menge der gleichseitigen Dreiecke ist abgeschlossen.
- (3) Die Menge der gleichschenkligen Dreiecke ist abgeschlossen.

AUFGABE 1.8. Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \longmapsto \left( (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2, (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 \right),$$

die einem Dreieck die Längenquadrate seiner Seiten zuordnet. Bestimme die regulären Punkte der Abbildung.

AUFGABE 1.9. Es sei  $K$  ein Körper und sei  $R = K[X_1, \dots, X_n]$  der Polynomring über  $K$ . Zeige, dass ein Polynom  $F \in R$  genau dann symmetrisch ist, wenn die homogenen Komponenten von  $F$  symmetrisch sind.

AUFGABE 1.10. Es sei  $K$  ein Körper und sei  $R = K[X_1, \dots, X_n]$  der Polynomring über  $K$ . Zu  $f \in R$ ,  $f \neq 0$ , sei  $\text{LM}(f)$  das Leitmonom zu  $f$  in der lexikographischen Ordnung. Zeige, dass das Leitmonom sich multiplikativ verhält, dass also

$$\text{LM}(fg) = \text{LM}(f) \cdot \text{LM}(g)$$

für Polynome  $f, g \neq 0$  gilt.

AUFGABE 1.11. Schreibe das symmetrische Polynom

$$X^3Y^3 - 2X^2Y^2 + 5XY$$

als Polynom in den elementar-symmetrischen Polynomen.

AUFGABE 1.12. Schreibe das symmetrische Polynom

$$3X^2Y^2Z^2 - X^4 - Y^4 - Z^4 + X^3Y^3Z^3$$

als Polynom in den elementar-symmetrischen Polynomen.

AUFGABE 1.13. Schreibe die symmetrischen Polynome

$$X_1^k + \dots + X_n^k$$

als Polynom in den elementar-symmetrischen Polynomen.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 1.14. (4 Punkte)

Bestimme die Fasern (bis auf Homöomorphie) der Längenabbildung  $L$  aus Beispiel 1.1.

AUFGABE 1.15. (5 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, y_1, x_2, y_2, x_2, y_2) \longmapsto \left( \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}, \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \right),$$

die einem Dreieck die Längen seiner Seiten zuordnet. Es sei  $B$  das Bild der Abbildung. Gibt es eine stetige Abbildung

$$s: B \longrightarrow \mathbb{R}^6$$

mit

$$L \circ s = \text{Id}_B?$$

AUFGABE 1.16. (5 Punkte)

Es sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass die Abbildung

$$K^6 \longrightarrow K^3, (x_1, y_1, x_2, y_2, x_2, y_2) \longmapsto \left( (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2, (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 \right),$$

surjektiv ist.

## AUFGABE 1.17. (3 Punkte)

Es sei  $K$  ein Körper, der eine dritte primitive Einheitswurzel  $\zeta$  enthalte. Zeige, dass das Polynom

$$(X_1 + \zeta X_2 + \zeta^2 X_3)^3 \in K[X_1, X_2, X_3]$$

symmetrisch ist und bestimme seine Darstellung mit den elementarsymmetrischen Polynomen.

## AUFGABE 1.18. (4 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte der durch die elementarsymmetrischen Polynome definierten Gesamtabbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (E_1(x_1, \dots, x_n), \dots, E_n(x_1, \dots, x_n)).$$

## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Linalg parallelogram area.png , Autor = Nicholas Longo (= Benutzer Thenub314 auf Commons), Lizenz = CC-by-sa 2.5 1