Universität Osnabrück
Vorlesung *Algebraische Kurven* 2008/2009
Prof. Dr. Holger Brenner
Arbeitsblatt 24

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Gebe ein Beispiel für ein irreduzibles reelles Polynom $F \in \mathbb{R}[X,Y]$ derart, dass beide partiellen Ableitungen übereinstimmen und nicht konstant sind. Zeige, dass dies über $\mathbb{C}$ nicht möglich ist.

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Betrachte die Kurve $C = V(X^2-Y^2-Y^3)$ mit der in Beispiel 24.2 besprochenen Parametrisierung. Bestimme die singulären Punkte der Kurve zusammen mit den Multiplizitäten und Tangenten. Berechne ebenfalls die Bildpunkte und die Tangenten für die Parameterwerte $t = -1, 0, 1$.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Beschreibe ein Beispiel einer glatten Kurve $C \subset \mathbb{A}_K^2$ mit einer Parametrisierung, deren Differential an mindestens einem Punkt verschwindet.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Betrachte das Achsenkreuz $V(xy) \subset \mathbb{A}_K^2$ und den zum Nullpunkt gehörigen lokalen Ring R mit maximalem Idealm $\mathfrak{m}$. Beschreibe explizit eine K-Basis für die Restklassenringe $R/\mathfrak{m}^n$ und bestimme die Dimensionen davon.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Sei $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal in einem kommutativen Ring, das in genau einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ als einzigem Primoberideal enthalten sei. Zeige, dass dann $R/\mathfrak{a} \cong (R_\mathfrak{m})/\mathfrak{a}$ ist. Folgere daraus, dass für ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ in einem noetherschen kommutativen Ring die Isomorphie $R/\mathfrak{m}^n \cong (R_\mathfrak{m})/\mathfrak{m}^n$ für jedes n gilt.

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Sei K ein Körper und $K[[T]]$ der Potenzreihenring. Gebe die inverse Potenzreihe zu $1-T$ an. (Es geht also um eine Potenzreihe F mit $F \cdot (1-T) = 1$.)

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Sei K ein Körper, $\mathfrak{m} = (T) \subset K[T]$ das zum Nullpunkt gehörige maximale Ideal mit der Lokalisierung $R = K[T]_{\mathfrak{m}}$. Definiere einen K-Algebra Homomorphismus $R \to K[[T]]$, wobei $K[[T]]$ den Ring der formalen Potenzreihen bezeichnet.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Beschreibe eine formale Potenzreihe über $\mathbb{C}$, die in keiner Umgebung des Nullpunktes konvergiert.

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Sei K ein Körper. Vergleiche die beiden Ringe

$$(K[X])[[Y]] \text{ und } (K[[Y]])[X]\,.$$

Aufgabe 10. (6 Punkte)

Sei R ein noetherscher kommutativer Ring. Man zeige, dass dann der Potenzreihenring $R[[T_1, \ldots, T_n]]$ noethersch ist.

Hinweis: Lassen Sie sich vom Beweis des Hilbertschen Basissatzes inspirieren!

Aufgabe 11. (2 Punkte)

Sei R ein lokaler Ring mit Restekörper K. Zeigen Sie, dass R und K genau dann die gleiche Charakteristik haben, wenn R einen Körper enthält.