

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 54

Aufwärmaufgaben

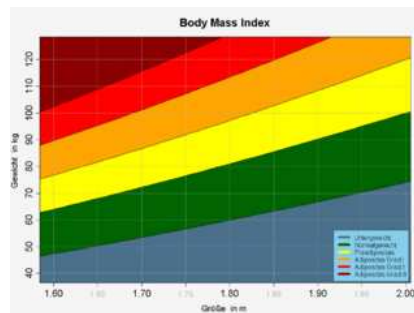
AUFGABE 54.1. Es sei

$$h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Linearform. Bestimme das zugehörige Gradientenfeld und die Lösungen der zugehörigen Differentialgleichung.

AUFGABE 54.2. Skizziere die Höhenlinien und das Gradientenfeld zur Funktion

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto 2(x - 3)^2 + 3(y - 1)^2.$$



AUFGABE 54.3. Der Body-Mass-Index wird bekanntlich über die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, (m, l) \longmapsto \frac{m}{l^2},$$

berechnet, wobei m für die Masse und l für die Länge eines Menschen (oder eines Tieres, einer Pflanze, eines Gebäudes) steht (in den Einheiten Kilogramm und Meter).

- (1) Für welche Punkte ist diese Abbildung regulär?
- (2) Skizziere das zugehörige Gradientenfeld.
- (3) Wenn man seinen Body-Mass-Index verringern möchte, und dabei dem Gradienten dieser Abbildung vertraut, sollte man dann besser abnehmen oder größer werden? Inwiefern hängt dies vom Punkt, inwiefern von den gewählten Einheiten ab?

- (4) Wie lassen sich die Fasern dieser Abbildung als Graphen von Funktionen beschreiben?
- (5) Berechne die Hesse-Matrix von φ und bestimme ihren Typ in jedem Punkt.
- (6) Zu welchen Daten wird das Maximum bzw. das Minimum des Body-Mass-Index angenommen, wenn man ihn auf $[30, 300] \times [1, 2]$ einschränkt, und welche Werte besitzt er dann?
- (7) Modelliere die Abbildung, die den Menschen aus einer Menge T ihren Body-Mass-Index zuordnet, mittels Messungen, Produktabbildung und Hintereinanderschaltung.

AUFGABE 54.4.*

Sei

$$G: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein Gradientenfeld und sei

$$\varphi: J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

($J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung $v' = G(v)$. Es gelte $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Zeige, dass φ injektiv ist.



Die Himmelscheibe von Nebra. Ist die Mondsichel darauf sternförmig?

AUFGABE 54.5. Betrachte zu $r, s \in \mathbb{R}_+$ mit $r + s > 1$ und $s < r + 1$ die „sichelförmige“ Menge

$$M_{r,s} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq r, \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \geq s \right\}.$$

Für welche r, s ist diese Menge sternförmig?

AUFGABE 54.6. Zeige, dass das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (2x - y \cos x, -\sin x),$$

ein Gradientenfeld ist und bestimme ein Potential dazu.

Ob ein Vektorfeld auf $U \subseteq \mathbb{R}^3$ die Integrabilitätsbedingung erfüllt lässt sich äquivalent mit der sogenannten Rotation ausdrücken.

Zu einem partiell differenzierbaren Vektorfeld

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ nennt man

$$\operatorname{rot}(G)(P) := \begin{pmatrix} \frac{\partial G_3}{\partial x_2}(P) - \frac{\partial G_2}{\partial x_3}(P) \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_3}(P) - \frac{\partial G_3}{\partial x_1}(P) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(P) - \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(P) \end{pmatrix}$$

die *Rotation* von G .

Die Rotation ist ebenfalls ein Vektorfeld.

AUFGABE 54.7. Es sei

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Zeige, dass G genau dann die Integrabilitätsbedingung erfüllt, wenn $\operatorname{rot}(G) = 0$ ist.

AUFGABE 54.8. Berechne zum Vektorfeld

$$G: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto \left(x^3 - z^2, \frac{xy}{z}, \frac{z}{x^2y}\right)$$

die Rotation.

AUFGABE 54.9. Es seien V und W euklidische Vektorräume und

$$f, g: G \longrightarrow W$$

seien Abbildungen auf einer offenen Menge $G \subseteq V$, die in Richtung $v \in V$ differenzierbar seien. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$h: G \longrightarrow \mathbb{R}, P \longmapsto \langle f(P), g(P) \rangle,$$

in Richtung $v \in V$ differenzierbar ist, und dass

$$(D_v h)(P) = \langle f(P), (D_v g)(P) \rangle + \langle (D_v f)(P), g(P) \rangle$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 54.10. (4 Punkte)

Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung, die zum Gradientenfeld der Funktion

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x + y^2,$$

gehört.

AUFGABE 54.11. (3 Punkte)

Welche linearen Vektorfelder

$$G: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, v \longmapsto Mv,$$

sind Gradientenfelder? Wie sehen die Potentialfunktionen dazu aus?

AUFGABE 54.12. (3 Punkte)

Zeige, dass das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (ye^z - 3x^2z, xe^z + 2yz, xye^z + y^2 - x^3),$$

ein Gradientenfeld ist und bestimme ein Potentialfeld dazu.

AUFGABE 54.13. (3 Punkte)

Berechne zum Vektorfeld

$$G: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0, z > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto \left(\frac{e^{3x} - z}{y}, \frac{\cos x}{z^2}, \frac{\ln z}{xy} \right)$$

die Rotation.

Aufgabe zum Hochladen

AUFGABE 54.14. (5 Punkte)

Fertige eine Illustration zu Beispiel 54.3 an.